Problemas – Tema 2

Problemas resueltos - 4 - ampliación a asíntotas

1. Calcula la ecuación de las asíntotas de la función $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}$.

Dominio de la función: dominio del numerador intersectado con el dominio del denominador, menos los valores que anulan al denominador.

El dominio del numerador son todos los reales porque el discriminante de la raíz siempre es positivo.

El dominio del denominador son todos los reales por se un polinomio.

El denominador se anula en $x=-1$.

Conclusión: El dominio de la función son todos los reales menos $x=-1$

Los candidatos a asíntotas verticales son los valores que no pertenecen al denominador. En nuestro caso debemos estudiar los límites laterales en $x=-1$.

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}=\frac{\sqrt{5}}{0-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}=\frac{\sqrt{5}}{0+}=+\infty$$

Existe AV en $x=-1$.

La asíntota horizontal se calcula estudiando la convergencia de los límites de la función en más y en menos infinito.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}=\frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación

Dividimos numerador y denominador por la variable elevada al mayor exponente. En nuestro caso el mayor exponente es x , ya que el factor x^2 del numerador está dentro de una raíz cuadrada. Y un polinomio de grado dos dentro de una raíz, en el infinito, se comporta como un polinomio de grado uno.

El factor x entra dividiendo dentro de la raíz como x^2 .

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{\frac{2x}{x}+\frac{2}{x}}=(simplificar)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{2}{x}}=\frac{\sqrt{4+0}}{2+0}=\frac{2}{2}=1$$

Existe AH $y=1$ si x tiende a más infinito.

Pasamos a estudiar la AH cuando x tiende a menos infinito.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}$ → cambiamos x por $-x$ y cambiamos ∞ por $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4(-x)^2+1}}{2(-x)+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{-2x+2}=\frac{\infty}{-\infty}$$ → dividimos por la máxima potencia

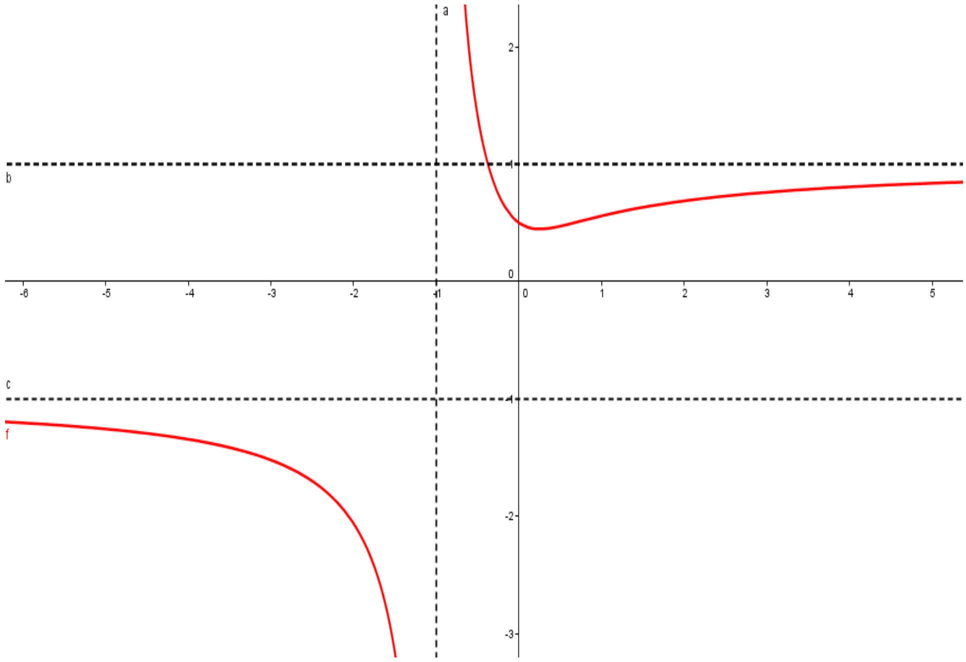
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{-2x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{\frac{-2x}{x}+\frac{2}{x}}=(simplificar)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{-2+\frac{2}{x}}=\frac{\sqrt{4+0}}{-2+0}=\frac{2}{-2}=-1$$

Existe AH $y=-1$ si x tiende a menos infinito.

Llegamos a la conclusión de que existen dos asíntotas horizontales: $y=\pm 1$.

Al existir asíntotas horizontales, no existen asíntotas oblicuas.

$$Gráfica\ \ de\ f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}\ y\ asíntotas$$



2. Sea la función $f(x)=2x+sen(2x)$. Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.

Asíntotas verticales no existen, al ser la función continua en $\mathbb{R}$. Para determinar las asíntotas horizontales calculamos el límite en el infinito de la función.

Importante: el seno en el infinito tomará un valor acotado al intervalo $[-1,1]$. No converge a ningún valor concreto, pero sí sabemos que la imagen es finita al pertenecer a dicho intervalo.

$\lim_{x\to\pm\infty}(2x+sen(2x))=\pm\infty+k=\pm\infty$ → Donde $k\in[-1,1]$ → No existen asíntotas horizontales

En el estudio de las asíntotas oblicuas $y=mx+n$ nos preguntamos por la convergencia del siguiente límite:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+sen(2x)}{x}\right)$$

Estudiemos el comportamiento en más infinito (el resultado en menos infinito será análogo, debido a la similitud de los límites).

$$m=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+sen(2x)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x}\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{sen(2x)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{1}\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{sen(2x)}{x}\right)$$

Evaluar → $m=\frac{2}{1}+\frac{k}{\infty}=2+0=2$ Donde $k\in[-1,1]$

El término independiente de la AO se define:

$$n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}(2x+sen(2x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}(sen(2x))=k\in[-1,1]$$

El término independiente no converge, al oscilar la imagen del seno en el intervalo $[-1,1]$. Por lo tanto, no existe asíntota oblicua.

3. Se considera la función $f(x)=\frac{1}{4-x^2}$. Indicar el dominio de definición de la función $f(x)$ y hallar sus asíntotas.

El dominio corresponderá con todos los valores reales salvo los que anulen el denominador. Por lo tanto:

$$D_f=\mathbb{R}-\{-2,2\}$$

En estos puntos donde no está definida la función encontraremos las asíntotas verticales, como podemos comprobar al calcular los límites laterales.

$$\lim_{x\to 2-}\left(\frac{1}{4-x^2}\right)=\frac{1}{0^+}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to 2+}\left(\frac{1}{4-x^2}\right)=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -2-}\left(\frac{1}{4-x^2}\right)=\frac{1}{0^-}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to -2+}\left(\frac{1}{4-x^2}\right)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Es decir, en $x=-2$ y $x=2$ tenemos dos asíntotas verticales.

El estudio de las asíntotas horizontales implica estudiar el comportamiento de la función cuando la variable x tiende a infinito. Al ser un cociente de polinomios coincidirá con el valor de la AH en menos infinito.

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{4-x^2}\right)=0 \quad , \quad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{4-x^2}\right)=0$$

Es decir, en $y=0$ tenemos una asíntota horizontal, que a su vez confirma la no existencia de asíntotas oblicuas.

4. Sea la función definida por $f(x)=\frac{x}{\ln x}$ **para** $x>0$ **,** $x\neq 1$ **. Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de** $f(x)$ **.**

El enunciado nos indica el dominio de definición de la función: $Dom(f)=(0,+\infty)-\{1\}$. Este dominio garantiza que el argumento del logaritmo siempre sea positivo y que el denominador no se anule.

En $x=1$ tenemos un primer candidato a AV.

Límites laterales → $\lim_{x\to 1-}\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)=-\infty$, $\lim_{x\to 1+}\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)=+\infty$ → AV en $x=1$

A la derecha de $x=0$ también puede aparecer una AV, ya que la función no está definida en $x=0$ (como no hay función a la izquierda de $x=0$ solo tiene sentido plantear el límite lateral derecho).

$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)=\frac{0}{\ln(0+)}=\frac{0}{-\infty}=0\cdot 0=0$ → No existe AV a la derecha de $x=0$

Asíntota Horizontal → $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → L'Hôpital

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1/x}\right)=\lim_{x\to\infty}(x)=\infty$ → No existe AH

Asíntota Oblicua $y=mx+n$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{\ln(x)}}{x}\right)=(simplificar)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{\ln(x)}}{1}\right)=\frac{1}{\ln}(\infty)=\frac{1}{\infty}=0$$

$m=0$ → no existe AO

5. Sea la función definida por $f(x)=\dfrac{k}{(x-a)(2x-1)}$ **para** $x\neq a$ **y** $x\neq 1/2$ **.**

a) Halla a **y** k **sabiendo que la gráfica de** $f(x)$ **pasa por el punto** $(0,2)$ **y que la recta** $x=2$ **es una asíntota de dicha gráfica.**

b) Para $k=4$ **y** $a=2$ **, halla los extremos relativos de** $f(x)$ **(abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.**

a) Como nos dicen que pasa por el punto $(0,2)$, sustituimos ese punto en la función que nos dan:

$$2=\frac{k}{(0-a)(2\cdot 0-1)}=\frac{k}{-a(-1)}=\frac{k}{a}\rightarrow k=2a$$

Como nos dicen que tiene de asíntota vertical la recta $x=2$, el límite cuando x tienda a 2 nos debe dar infinito para que exista dicha asíntota.

$$\lim_{x\to 2}\frac{k}{(x-a)(2x-1)}=\infty\rightarrow\lim_{x\to 2}\frac{k}{(2-a)(2\cdot 2-1)}=\infty\rightarrow\frac{k}{3(2-a)}=\infty$$

Si $k=2a$ → $\dfrac{2a}{3(2-a)}=\infty$ → El denominador debe anularse → $3(2-a)=0\rightarrow a=2$

En consecuencia → $k=4$

b) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de una función, hallamos la primera derivada (derivamos como una función inversa).

$$f(x)=\frac{4}{(x-2)(2x-1)} \quad , \quad Dom(f)=\mathbb{R}-\left\{2,\frac{1}{2}\right\}$$

$$f'(x)=\frac{-4[(2x-1)+2(x-2)]}{(x-2)^2(2x-1)^2}=\frac{-4(2x-1+2x-4)}{(x-2)^2(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-8x+4-8x+16}{(x-2)^2(2x-1)^2}=\frac{20-16x}{(x-2)^2(2x-1)^2}$$

Hallamos los valores críticos que anulan la primera derivada:

$$20-16x=0\rightarrow x=\frac{5}{4}$$

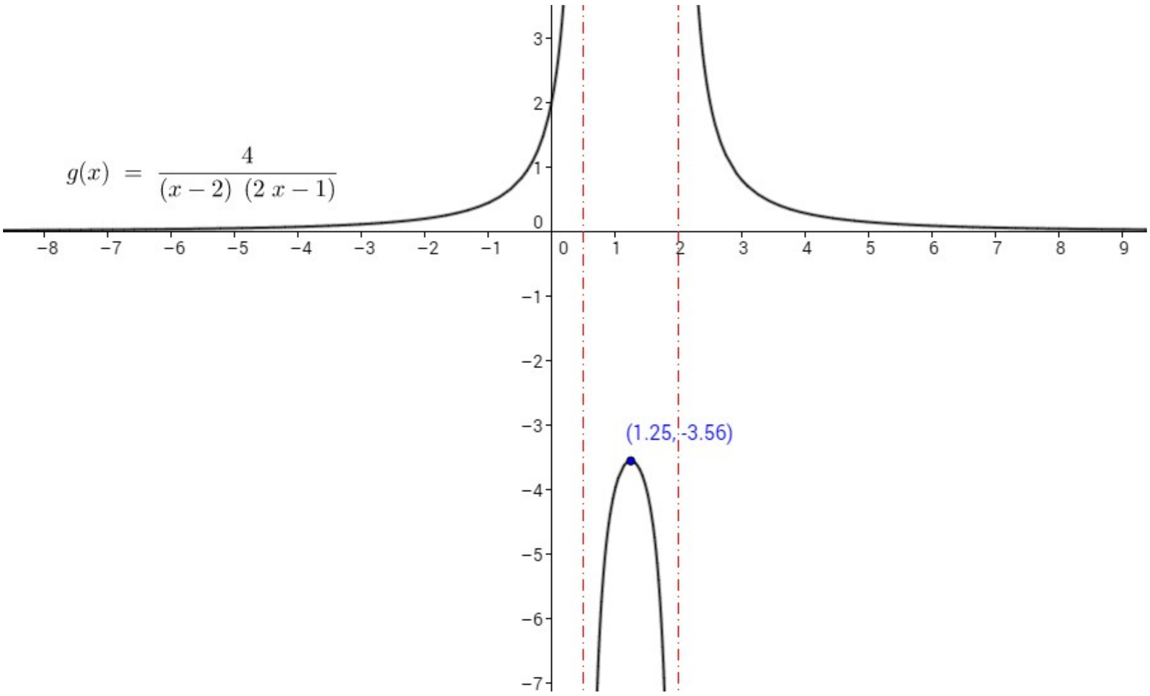
Función $f(x)$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\downarrow$
Intervalos	$(-\infty,\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},\frac{5}{4})$	$(\frac{5}{4},2)$	$(2,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(0)>0$	$f'(1)>0$	$f'(\frac{7}{4})<0$	$f'(10)<0$

Hallamos el valor de la ordenada en el único extremo relativo que tiene la gráfica: un máximo para $x=\frac{5}{4}$.

$$f(x)=\frac{4}{(x-2)(2x-1)}$$

$$f(\frac{5}{4})=\frac{4}{\left(\frac{5}{4}-2\right)\left(2\cdot\frac{5}{4}-1\right)}=\frac{4}{\left(\frac{5-8}{4}\right)\left(\frac{10-4}{4}\right)}=\frac{4}{\left(\frac{-3}{4}\right)\left(\frac{6}{4}\right)} \rightarrow f(\frac{5}{4})=\frac{-32}{9}$$

El punto $(\frac{5}{4},\frac{-32}{9})$ es un máximo relativo de la función. Dibujamos con Geogebra su gráfica.



6. Sea $g(x)=\frac{m x^3}{(x-n)^2}$ **, con** $x\neq n$ **.**

a) Halla m **y** n **sabiendo que la recta** $y=2x-4$ **es una asíntota de la gráfica de** $g(x)$ **.**

b) Para $m=2$ **y** $n=-1$ **determina si la gráfica de** $g(x)$ **es simétrica respecto al origen.**

a) Si la recta $y=2x-4$ es una asíntota oblicua, la convergencia de los dos siguientes límites debe ser:

$$pendiente=2 \;\rightarrow\; \lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=m \;\rightarrow\; \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{m x^3}{(x-n)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{m x^3}{x(x-n)^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{m x^3}{x(x^2+n^2-2nx)}=\lim_{x\to\infty}\frac{m x^3}{x^3-2nx^2+n^2x}=\frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación

Al ser un cociente de polinomios del mismo grado, el límite en el infinito tiende al cociente de los coeficientes que acompañan a la máxima potencia. Es decir:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{m x^3}{x^3-2nx^2+n^2x}=\frac{m}{1}=m \;\rightarrow\; m=2$$

$$ordenada\;\; en\;\; el\;\; origen=-4 \;\rightarrow\; \lim_{x\to\infty}(g(x)-2x)=n$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2+n^2-2nx}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3-2x^3+4nx^2-2n^2x}{x^2+n^2-2nx}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4nx^2-2n^2x}{x^2+n^2-2nx}\right)=\frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación

Nuevamente resolvemos dividiendo los cocientes de los coeficientes que acompañan a las máximas potencias.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4nx^2-2n^2x}{x^2+n^2-2nx}\right)=\frac{4n}{1}=4n \;\rightarrow\; 4n=-4 \;\rightarrow\; n=-1$$

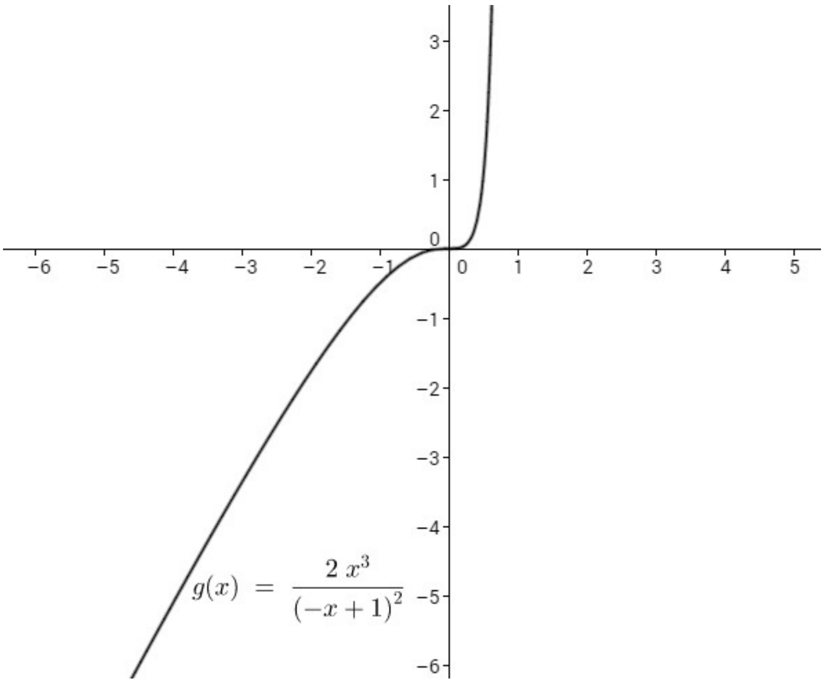
La función solución resulta:

$$g(x)=\frac{2x^3}{(x+1)^2}$$

b) Una función $g(x)$ es impar, es decir, simétrica respecto al origen si $g(x)=-g(-x)$.

$$g(x)=\frac{2x^3}{(x+1)^2} \;\;,\;\; g(-x)=\frac{-2x^3}{(-x+1)^2} \;\rightarrow\; g(x)\neq -g(-x)$$ → No es impar

Si dibujamos la gráfica de la función con Geogebra vemos que, efectivamente, la función no es impar.



7. Sea la función $f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}, \quad x\neq 1$ **. Estudia las asíntotas de la gráfica de la función.**

Asíntota vertical en $x=1$.

$$\lim_{x\to 1-}\left(\frac{e^{-x}}{1-x}\right)=\frac{1}{0^{+}}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1+}\left(\frac{e^{-x}}{1-x}\right)=\frac{1}{0^{-}}=+\infty$$

Asíntotas horizontales: recuerda que $e^{\infty}=\infty$ y que $e^{-\infty}=0$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{-x}}{1-x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^{x}(1-x)}\right)=\frac{1}{\infty\cdot(-\infty)}=0 \rightarrow y=0$$ cuando la variable tiende a más infinito

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{-x}}{1-x}\right)$$ → Cambiamos "x" por "-x" y menos infinito por más infinito.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{x}}{1+x}\right)=\frac{+\infty}{+\infty}$$ → indeterminación → L'Hôpital → $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{x}}{1}\right)=+\infty$

En más infinito no tendremos asíntota oblicua porque hay horizontal. Pero sí debemos estudiar una posible AO cuando la variable tiende a menos infinito.

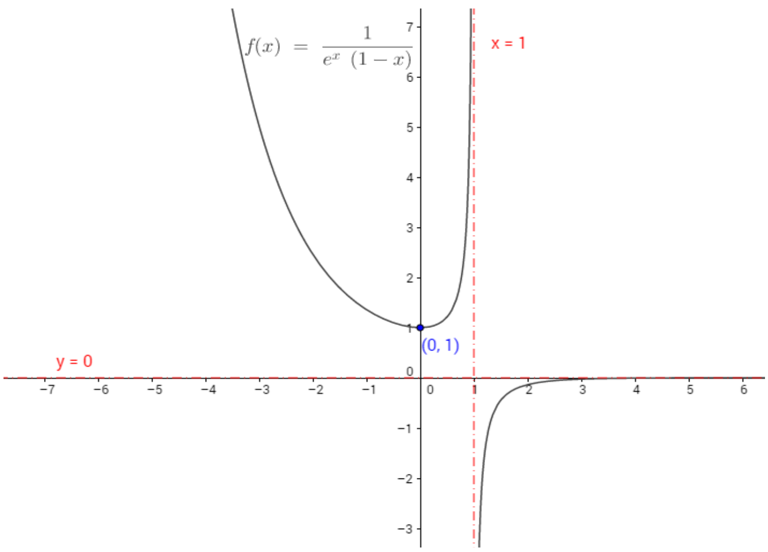
$$m=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{e^{-x}}{1-x}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x(1-x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x-x^{2}}$$

Cambiamos "x" por "-x" y menos infinito por más infinito.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{-x-x^{2}}=\frac{\infty}{-\infty}$$ → indeterminación → L'Hôpital → $m=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{x}}{-1-2x}\right)=\frac{+\infty}{-\infty}$

Aplicamos nuevamente L'Hôpital.

$$m=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{x}}{-2}\right)=+\infty \rightarrow$$ no existe AO cuando x tiende a menos infinito.



8. Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^x(x^2-x+1)$. Calcula $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Recuerda que la exponencial tiende a infinito cuando el exponete tiende a más infinito, mientras que la exponencial tiende a 0 cuando el exponente tiende a menos infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} e^x(x^2-x+1)=+\infty\cdot(+\infty)=+\infty$$

$\lim_{x\to-\infty} e^x(x^2-x+1)$ → Cambiar "x" por "-x" y cambiar menos infinito por más infinito.

$\lim_{x\to\infty} e^{-x}(x^2+x+1)=0\cdot(+\infty)$ → indeterminación

Reordenamos términos y pasamos la exponencial al denominador pero con exponente positivo.

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}$ → L'Hôpital → $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}$ → L'Hôpital → $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=0$

9. Estudia las asíntotas de $g(x)=e^x-x$ **.**

El dominio de la función es $Dom(g(x))=\mathbb{R}$, por ser diferencia de funciones continuas en toda la recta real. Por lo tanto no tendremos asíntotas verticales.

Las asíntotas horizontales deben estudiarse en más y en menos infinito.

$\lim_{x\to\infty}(e^x-x)=\infty-\infty$ → Indeterminación

Multiplicamos y dividimos por conjugado

$\lim_{x\to\infty}(e^x-x)\cdot\frac{(e^x+x)}{e^x+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}+x^2}{e^x+x}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → L'Hôpital

$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}\cdot 2+2x}{e^x+1}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → L'Hôpital

$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}\cdot 4+2}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → L'Hôpital

$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}\cdot 8}{e^x}=(simplificar)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x\cdot 8}{1}=\infty$

No existe AH en más infinito.

$\lim_{x\to-\infty}(e^x-x)=0+\infty=+\infty$

No existe AH en menos infinito.

Planteamos la posibilidad de que aparezcan asíntotas oblicuas.

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-x}{x}=\frac{+\infty}{\infty}$ → Indeterminación (en el numerado hemos usado el resultado demostrado anteriormente para el límite de $\lim_{x\to\infty}(e^x-x)=\infty-\infty$.

Aplicamos L'Hôpital.

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{1}=+\infty$ → No existe AO en más infinito.

Estudiamos la AO en menos infinito.

$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-x}{x}$ → Cambiamos "x" por "-x" y menos infinito por más infinito.

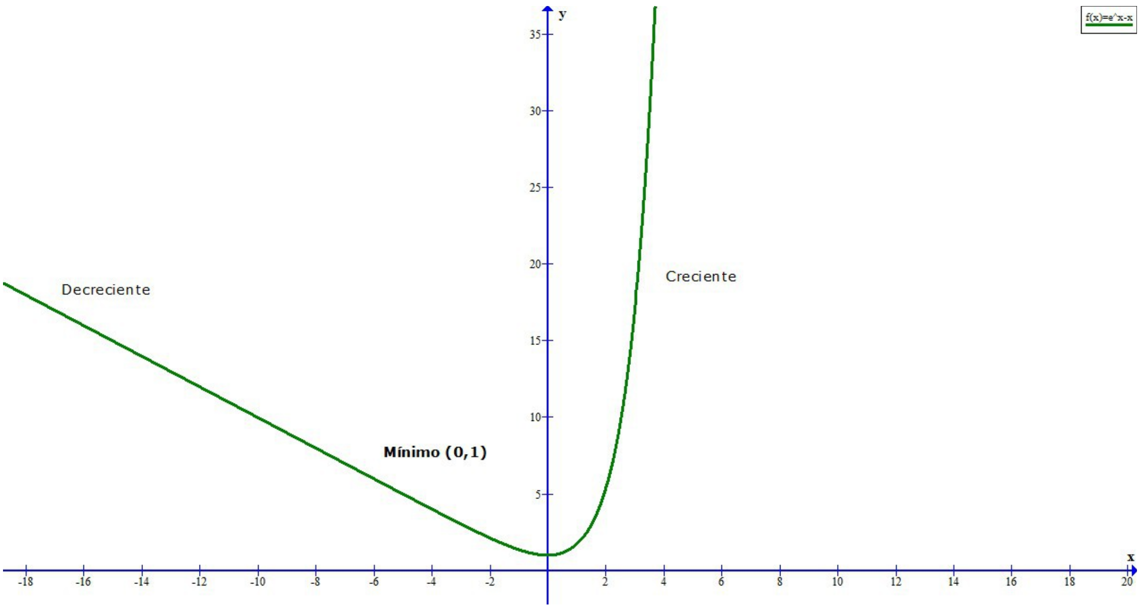
$m=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}+x}{-x}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → L'Hôpital

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}(-1)+1}{-1}=\frac{0+1}{-1}=-1$

Calculamos el término independiente de la recta de la AO cuando la variable tiende a menos infinito.

$$n=\lim_{x\rightarrow-\infty}\left(e^{x}-x+x\right)=\lim_{x\rightarrow-\infty}\left(e^{x}\right)=e^{-\infty}=0$$

Conclusión: tenemos AO $y=-x$ cuando x tiende a menos infinito.



10. Sea $f(x)=\begin{cases} \frac{sen(x)}{x}+2 & si \quad x\neq 0 \\ 3 & si \quad x=0 \end{cases}$ **. Sabemos que es continua en todo su dominio. Determinar sus asíntotas verticales y horizontales.**

Como indica el enunciado, la función es continua en los intervalos abiertos y en el punto frontera $x=0$.

El dominio de toda la función sería toda la recta real, por lo que no habría candidatos a asíntotas verticales.

Para las asíntotas horizontales evaluamos el límite de la función cuando x tiende a infinito.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{sen(x)}{x}+2\right)=(evaluar)=\left(\frac{sen(\infty)}{\infty}+2\right)$$

Pregunta del millón: ¿CUÁNTO VALE EL SENO EN EL INFINITO?

No lo sabemos. Pero sí sabemos que será un valor real que oscilará entre -1 y 1 (al estar la imagen del seno acotada a ese intervalo). Y un número finito dividido por infinito da lugar a 0. Por lo tanto:

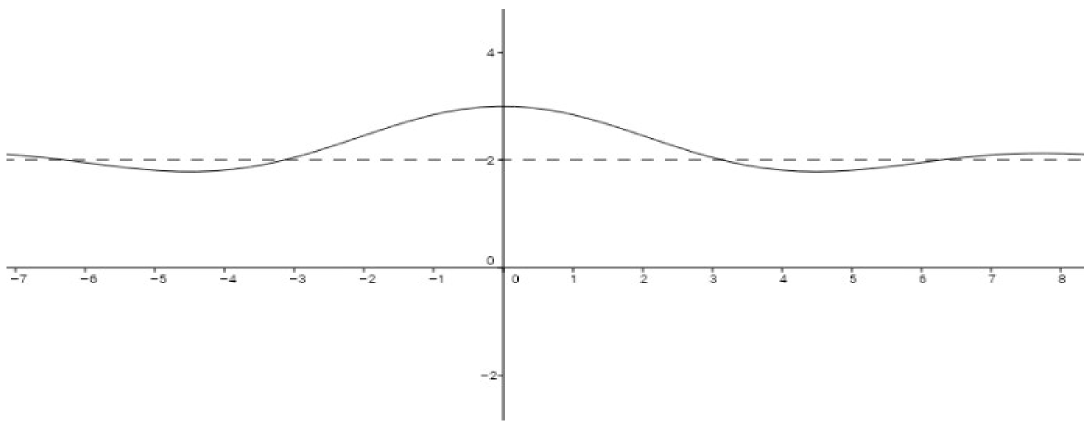
$$\left(\frac{sen(\infty)}{\infty}+2\right)=0+2=2$$

Idéntico valor resulta de hacer el límite cuando la variable tiende a menos infinito.

Conclusión: $y=2$ es una asíntota horizontal.

Al existir una asíntota horizontal, no existe asíntota oblicua.

Representamos la función $f(x)=\frac{sen(x)}{x}+2$ y la asíntota $y=2$ con Geogebra.



11. Sea la función $f(x)=\frac{x^2-16}{x^2-4}$ **. Calcular sus asíntotas.**

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-2,2\}$

Asíntota vertical → $\lim_{x\to\pm2} \frac{x^2-16}{x^2-4}=\infty$ → Debemos estudiar los límites laterales

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{x^2-16}{x^2-4}=\frac{-12}{0^+}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to-2^+} \frac{x^2-16}{x^2-4}=\frac{-12}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} \frac{x^2-16}{x^2-4}=\frac{-12}{0^-}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to2^+} \frac{x^2-16}{x^2-4}=\frac{-12}{0^+}=-\infty$$

Existen asíntotas verticales en $x=-2$ y $x=2$.

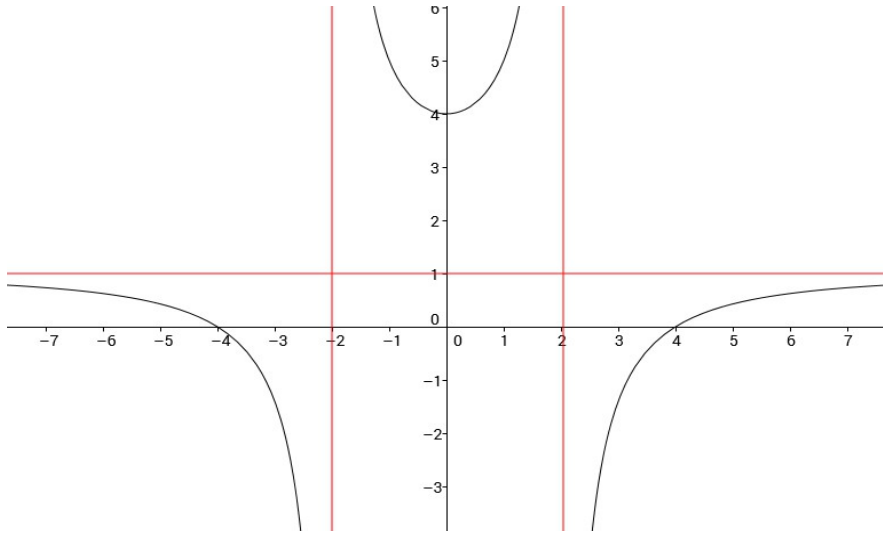
Asíntota Horizontal → $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-16}{x^2-4}=\frac{\infty}{\infty}=1$

Obtenemos $y=1$ como asíntota horizontal. El límite lo resuelvo aplicando L'Hôpital (derivando numerado y denominador por separado) o bien dividiendo los coeficientes que acompañan a la máxima potencia de x (en nuestro caso x^2).

Por ser cociente de polinomios, la AH en más infinito coincide con la AH en menos infinito.

Al haber existir asíntota horizontal no habrá asíntota oblicua.

En la representación gráfica podemos apreciar la curva y sus asíntotas.



12. Estudia la continuidad y las asíntotas de $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

La función es continua en todo $\mathbb{R}$ excepto en $x=-1$, valor que anula al denominador, por ser un cociente de polinomios.

$$\lim_{x\to(-1)}\frac{x^3}{(x+1)^2}=\frac{-1}{0}=-\infty$$

Al darnos el limite infinito quiere decir que estamos ante una discontinuidad no evitable en $x=-1$. Es decir, $x=-1$ es candidato a asíntota vertical. Calculamos los límites laterales.

$$\lim_{x\to(-1)-}\frac{x^3}{(x+1)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to(-1)+}\frac{x^3}{(x+1)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

Por lo que tenemos una asíntota vertical en $x=-1$.

Al ser el grado del numerador superior en una unidad al grado del denominador, no tendremos asíntotas horizontales pero sí oblicuas (tanto en más como en menos infinito).

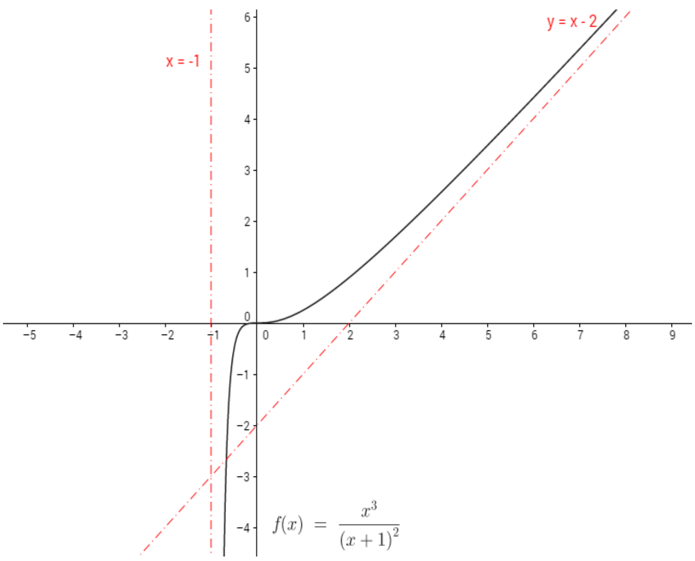
$$m=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x+1)^2}\right)\div x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x\cdot(x^2+2x+1)}\right)=\lim_{\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^3+2x^2+x}\right)=\frac{1}{1}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x+1)^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x\cdot(x^2+2x+1)}{(x^2+2x+1)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x^3-2x^2-x}{(x^2+2x+1)}\right)$$

$$n=\lim_{\to-\infty}\left(\frac{-2x^2-x}{(x^2+2x+1)}\right)=-2$$

Donde hemos aplicado que, al ser cociente del mismo grado cuando la variable tiende a infinito, el límite tiende al cociente de los coeficientes que acompañan a la máxima potencia.

Por lo que tenemos una asíntota oblicua en $y=x-2$.



13. Calcula a y b para que función $f(x)=\frac{a\,x^2+x+b}{x^2-4}$ tenga una asíntota horizontal en $y=-1$ y pase por el punto $(0,1)$.

$\lim_{x\to\infty}\frac{a\,x^2+x+b}{x^2-4}=-1$ → cociente de coeficientes que acompañan a la máxima potencia de los polinomios → $\frac{a}{1}=-1$ → $a=-1$

$f(0)=1$ → $f(0)=\frac{0+0+b}{0-4}=\frac{-b}{4}$ → $\frac{-b}{4}=1$ → $b=-4$

14. Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$

Primero rompemos el valor absoluto → $f(x)=\begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}} \ si \ x<0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \ si \ x\geq 0 \end{cases}$

Por lo tanto, tendremos que estudiar una función en $+\infty$ y otra función en $-\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{\infty}{\infty}$$

Recuerda que en fracciones de polinomio de grado uno con raíz de un polinomio de grado dos, al aplicar L'Hôpital de manera consecutiva dos veces, regresamos al límite de partida. Por lo que debemos buscar otra alternativa para resolver la indeterminación: dividir por la máxima potencia.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{9}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1$$ → A.H. $y=1$ si $x\to+\infty$ (recuerda que la A.H. es una recta horizontal)

Estudiamos ahora en el otro tramo de la función.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{\infty}{\infty} \to \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{9}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1$$ → A.H. $y=1$ si $x\to-\infty$

15. Estudiar las asíntotas de $f(x)=\frac{|x|}{x+1}$

Rompemos el valor absoluto → $f(x)=\begin{Bmatrix} \frac{-x}{x+1} & si\ x<0 \\ \frac{x}{x+1} & si\ x\geq 0 \end{Bmatrix}$

Las dos funciones que aparecen, anulan su denominador para $x=-1$. Este es nuestro candidato a A.V.

$\lim_{x\to -1^-} \frac{-x}{x+1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\lim_{x\to -1^+} \frac{-x}{x+1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ → A.V. en $x=-1$

Para las A.H. tendremos que estudiar dos límites, en + y en – infinito.

$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → L'Hôpital → $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1}=1$ → A.H. $y=1$ si $x\to +\infty$

$\lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{x+1}=\frac{\infty}{-\infty}$ → Indeterminación → cambiamos x por $-x$ y hacemos límite en $x\to +\infty$ →

$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{-x+1}=\frac{\infty}{-\infty}$ → Indeterminación → L'Hôpital → $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{-1}=-1$ → A.H. $y=-1$ si $x\to -\infty$

Si hay A.H. no hay A.O.

16. Estudiar asíntotas de $f(x)=\sqrt{x^2-x}+x$

Los candidatos A.V. son los puntos que no pertenecen al dominio o los puntos frontera de los intervalos que no pertenecen al dominio.

En nuestra función, para obtener el dominio debemos imponer la condición de discriminante no nulo:

$x^2-x\geq 0 \quad \rightarrow \quad x(x-1)\geq 0$ → Raíces $x=0$, $x=1$

Obtenemos el signo de $x(x-1)$ en los intervalos formados por las raíces:

$(-\infty,0)$ → por ejemplo $x=-5 \rightarrow -5(-5-1)>0$ → pertenece al dominio

$(0,1)$ → por ejemplo $x=\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)<0$ → no pertenece al dominio

$(1,+\infty)$ → por ejemplo $x=10 \rightarrow 10(10-1)>0$ → pertenece al dominio.

El dominio de la función es $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$.

$\lim_{x\to 0}(\sqrt{x^2-x}+x)=0$, $\lim_{x\to 1}(\sqrt{x^2-x}+x)=1$ → Los límites son finitos, por lo tanto no hay A.V.

Estudiamos A.H. tanto en + infinito como en – infinito.

$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}+x)=\infty+\infty=\infty$ → No hay A.H. si $x\rightarrow+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x}+x)=\infty-\infty$ → Indeterminación → cambiamos x por $-x$ y hacemos límite en $x\rightarrow+\infty \rightarrow \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\infty-\infty$ → multiplicamos y dividimos por conjugado →

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)\cdot\frac{(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)} \rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{(\sqrt{x^2+x}+x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(\sqrt{x^2+x}+x)}=\frac{\infty}{\infty}$ → Dividimos todo por $x \rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{(\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}+\frac{x}{x})}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$ → Hay A.H. en $y=\frac{1}{2}$ si $x\rightarrow-\infty$

¿Cómo estudiar las A.O.?

En $x\rightarrow-\infty$ hay A.H., por lo tanto seguro que no habrá A.O.

Pero en $x\rightarrow+\infty$ no hay A.H., por lo que sí puede haber A.O.

$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-x}+x)}{x}=\frac{\infty}{\infty}$ → El mayor grado del numerador es 1, igual que el mayor grado del denominador, por lo que $m=\frac{1+1}{1}=2$ → Donde recordamos que un polinomio de grado dos dentro de una raíz, se comporta como un polinomio de grado uno en el infinito.

$n=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}+x-2x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)=\infty-\infty$ → Multiplicar y dividir por conjugado →

$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2-x}-x) \cdot \frac{(\sqrt{x^2-x}+x)}{(\sqrt{x^2-x}+x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2-x-x^2)}{(\sqrt{x^2-x}+x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(-x)}{(\sqrt{x^2-x}+x)} = \frac{-1}{2}$ → Donde nuevamente hemos aplicado que el grado del numerador y el grado del denominador coinciden, por lo que hacemos el cociente de coeficientes que acompañan a la máxima potencia → $y=2x-\frac{1}{2}$ es A.O. si $x \to +\infty$.

17. Sea $f(x)=\dfrac{1}{x^2-k}$, con $k\neq 0$. Calcula el dominio y las asíntotas según el valor del parámetro k .

Si $k<0 \rightarrow x^2-k=0 \rightarrow x^2=k<0$ → El denominador no se anula nunca, por lo que no habrá A.V.

Al estudiar la A.H. podemos hacerlo en $x\rightarrow+\infty$, ya que al ser un cociente de polinomios el resultado será igual que para $x\rightarrow-\infty \rightarrow \lim_{x\rightarrow+\infty}\dfrac{1}{x^2-k}=0 \rightarrow y=0$ es A.H. en $x\rightarrow\pm\infty$

Si hay A.H. no habrá A.O.

Si $k>0 \rightarrow x^2-k=0 \rightarrow x^2=k>0 \rightarrow x=\pm\sqrt{k}$ → Tendremos dos candidatos a A.V., al anularse el denominador. Estudiamos sus límites laterales.

$$\lim_{x\rightarrow(-\sqrt{k})^-}\frac{1}{x^2-k}=\frac{1}{0^+}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\rightarrow(-\sqrt{k})^+}\frac{1}{x^2-k}=\frac{1}{0^-}=-\infty \rightarrow x=-\sqrt{k} \text{ es A.V.}$$

$$\lim_{x\rightarrow(\sqrt{k})^-}\frac{1}{x^2-k}=\frac{1}{0^-}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\rightarrow(\sqrt{k})^+}\frac{1}{x^2-k}=\frac{1}{0^+}=+\infty \rightarrow x=\sqrt{k} \text{ es A.V.}$$

Nuevamente, al estudiar la A.H. podemos hacerlo en $x\rightarrow+\infty$, ya que al ser un cociente de polinomios el resultado será igual que para $x\rightarrow-\infty \rightarrow \lim_{x\rightarrow+\infty}\dfrac{1}{x^2-k}=0 \rightarrow y=0$ es A.H. en $x\rightarrow\pm\infty$

Si hay A.H. no habrá A.O.

18. Sea la función $f(x)=(8-x^2)^{\frac{1}{3}}$ **. Determinar el dominio, la continuidad y las asíntotas.**

Tenemos una raíz cúbica de un polinomio, por lo que no existen restricciones para su dominio. Su dominio es toda la recta real, y la función es continua en su dominio.

Al ser continua en toda la recta real, no aparecen A.V.

Para la A.H. → $\lim_{x\to+\infty}(8-x^2)^{\frac{1}{3}}=-\infty$, e igualmente $\lim_{x\to-\infty}(8-x^2)^{\frac{1}{3}}=-\infty$ → No hay A.H.

Para la A.O. → $\lim_{x\to+\infty}\frac{(8-x^2)^{\frac{1}{3}}}{x}=\frac{-\infty}{\infty}$ → Dividimos por la máxima potencia → $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{8}{x^3}-\frac{x^2}{x^3})^{\frac{1}{3}}}{\frac{x}{x}}=\frac{0}{1}=0$ → No hay A.O. si $x\to\infty$ al resultar la pendiente nula.

Igualmente → $\lim_{x\to-\infty}\frac{(8-x^2)^{\frac{1}{3}}}{x}=\frac{-\infty}{-\infty}$ → Estudiamos en $x\to\infty$ e intercambiamos el signo de la variable x dentro de la función → $\lim_{x\to-\infty}\frac{(8-x^2)^{\frac{1}{3}}}{x}=\frac{-\infty}{-\infty}$ → Dividimos por la máxima potencia → $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{8}{x^3}-\frac{x^2}{x^3})^{\frac{1}{3}}}{\frac{-x}{x}}=\frac{0}{-1}=0$ → No hay A.O. si $x\to-\infty$

19. Se sabe que la gráfica de la función definida por $f(x)=\frac{ax^2+bx+2}{x-1}$ **para** $(x\neq 1)$ **tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto (1,1) y tiene pendiente 2. Calcula** a **y** b **.**

La A.O. tendrá por ecuación $y=mx+n$ tanto en más como en menos infinito. La pendiente de la A.O. Se calcula con el límite.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{ax^2+bx+2}{x-1}}{x} \quad\to\quad m=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2+bx+2}{x^2-x}=\frac{\infty}{\infty}$$

Dividiendo por la máxima potencia, simplificando y evaluando, llegamos al valor: $m=a$

Como la pendiente de la recta A.O. vale 2, según el enunciado, concluimos: $m=a=2$

El término independiente de la recta se calcula con el límite:

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+bx+2}{x-1}-2x\right)=\frac{\infty}{\infty} \quad\to\quad n=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+bx+2}{x-1}-\frac{2x(x-1)}{x-1}\right)$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+bx+2}{x-1}-\frac{2x^2-2x}{x-1}\right) \quad\to\quad n=\lim_{x\to+\infty}\frac{bx+2x+2}{x-1}=\frac{\infty}{\infty}$$

Dividimos nuevamente por la máxima potencia, simplificamos, evaluamos y obtenemos: $n=b+2$

La ecuación de la A.O. resulta: $y=2x+b+2$

El enunciado afirma que la AO pasa por el punto (1,1). **¡Ojo!** Es la recta quien pasa por (1,1) no la función. De hecho la función no está definida para el valor $x=1$.

Sustituimos las coordenadas del punto (1,1) en la ecuación de la recta.

$$1=2\cdot 1+b+2 \quad\to\quad b=-3$$

20. Estudia las asíntotas de la gráfica $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} \ si \ x<-1 \\ a x+b \ si \ -1\leq x<1 \\ \frac{x^2}{x+1} \ si \ x\geq 1 \end{cases}$ **, siendo** $a, b\in\mathbb{R}$ **.**

¡Ojo! Cada tramo tiene un dominio de definición. Por lo tanto, debemos atenernos a esos dominios.

Por ejemplo. La función $f(x)=\frac{1}{x}$ solo está definida a la izquierda de -1. Por lo tanto, no tiene sentido que estudiemos la A.V. En los alrededores de $x=0$ porque ahí no está definida la función.

Para $f(x)=\frac{1}{x}$ solo tendremos que estudiar la A.H. cuando $x\rightarrow-\infty$. No tiene sentido preguntarse por la A.H. en más infinito, porque el tramo de definición es a la izquierda de -1.

$\lim_{x\rightarrow-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0$ → existe A.H. $y=0$ si $x\rightarrow-\infty$ → si existe A.H. no existe A.O.

La función $f(x)=a x+b$ es un polinomio. Los polinomios no poseen asíntotas de ningún tipo.

La función $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ está definida desde 1 en adelante. Por lo tanto, no tiene sentido estudiar la A.V. en $x=-1$ porque ahí no está definida la función. Solo estudiaremos la A.O. cuando la variable tiende a más infinito.

$m=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{\frac{x^2}{x+1}}{x}=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{x^2}{x^2+x}=\frac{\infty}{\infty}$ → dividir por la máxima potencia, simplificar y evaluar → $m=1$

$n=\lim_{x\rightarrow\infty}(\frac{x^2}{x+1}-x)=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{x^2-x^2-x}{x+1}=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{-x}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}$ → aplicar L'Hôpital

$n=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{-1}{1}=-1$ → existe A.O. $y=x-1$ si $x\rightarrow\infty$ → Si hay A.O. no hay A.H.

21. Sea $f(x)=\frac{1}{e^x+e^{-x}}$ **. Calcula la A.H. cuando** x **tiende a** $+\infty$ **de** $x^2 \cdot f(x)$ **.**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x+e^{-x}}=evaluar=\frac{\infty}{\infty+0}=\frac{\infty}{\infty}$$

Donde, recordamos, la exponencial elevada a menos infinito tiende al valor 0.

Aplicamos la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x-e^{-x}}=evaluar=\frac{\infty}{\infty-0}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x+e^{-x}}=evaluar=\frac{2}{\infty-0}=\frac{2}{\infty}=0$$

22. Calcula a **sabiendo que la función** $f(x)=\frac{a\cdot x}{[\ln(x)]^3+2x}$ **tiene una A.H. en** $y=1$ **.**

Por definición de A.H.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a\cdot x}{[\ln(x)]^3+2x}=1$$

Resolvamos el límite e igualemos a 1 el resultado que obtengamos.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a\cdot x}{[\ln(x)]^3+2x}=evaluar=\frac{\infty}{\infty+\infty}=\frac{\infty}{\infty}$$ → indeterminación → L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a}{3\cdot[\ln(x)]^2\cdot\frac{1}{x}+2}$$ → mcm → $$\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\frac{3\cdot[\ln(x)]^2+2\cdot x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a\cdot x}{3\cdot[\ln(x)]^2+2\cdot x}=\frac{\infty}{\infty}$$

Volvemos a aplicar L'Hôpital.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a\cdot x}{3\cdot[\ln(x)]^2+2\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{6\cdot[\ln(x)]\cdot\frac{1}{x}+2\cdot}$$ → mcm → $$\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\frac{6\cdot\ln(x)+2\cdot x}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a\cdot x}{6\cdot\ln(x)+2\cdot x}=evaluar=\frac{\infty}{\infty}$$ → indeterminación → L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a}{6\cdot\frac{1}{x}+2\cdot}=evaluar=\frac{a}{0+2}=\frac{a}{2}$$ → igualamos el resultado a 1 → $\frac{a}{2}=1$ → $a=2$