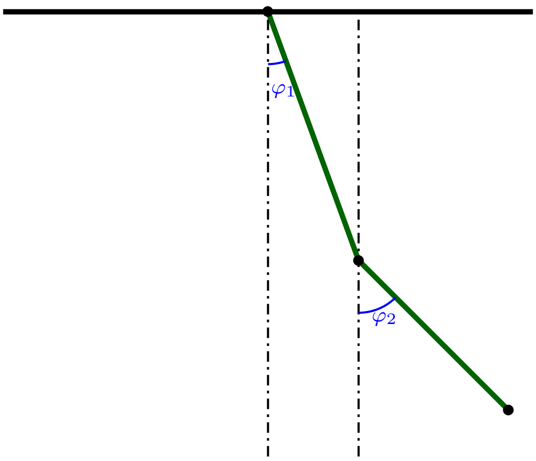
1 Differentialgleichungen des Doppelpendels

In GeoGebra ist ein numerisches Verfahren zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung eingebaut. Um technische Fragen wie Euler-Verfahren versus Runge-Kutte-Verfahren n-ter Ordnung beziehungsweise geeignete Wahl der Schrittweite muss man sich nicht kümmern.

2 Herleitung der Bewegungsgleichungen



Position der Massen zur Zeit t:

$$\begin{aligned} \vec{x}_1(t) &= \begin{pmatrix} l_1 \sin(\varphi_1(t)) \\ -l_1 \cos(\varphi_1(t)) \end{pmatrix} \\ \vec{x}_2(t) &= \begin{pmatrix} l_1 \sin(\varphi_1(t)) \\ -l_1 \cos(\varphi_1(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_2 \sin(\varphi_2(t)) \\ -l_2 \cos(\varphi_2(t)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Geschwindigkeit der Massen zur Zeit t:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1(t) &= l_1 \dot{\varphi}_1(t) \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1(t)) \\ \sin(\varphi_1(t)) \end{pmatrix} \\ \vec{v}_2(t) &= l_1 \dot{\varphi}_1(t) \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1(t)) \\ \sin(\varphi_1(t)) \end{pmatrix} + l_2 \dot{\varphi}_2(t) \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2(t)) \\ \sin(\varphi_2(t)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{m_1}{2} \left(l_1 \dot{\varphi}_1(t)\right)^2 + \frac{m_2}{2} \Big(\left(l_1 \dot{\varphi}_1(t)\right)^2 + \left(l_2 \dot{\varphi}_2(t)\right)^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1(t) \dot{\varphi}_2(t) \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \Big)$$

Potentielle Energie:

$$U = -g \left(m_1 l_1 \cos(\varphi_1(t)) + m_2 (l_1 \cos(\varphi_1(t)) + l_2 \cos(\varphi_2(t))) \right)$$

Euler-Lagrange-Gleichungen $L = T - U$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0$$

Nach ein paar Umformungen erhält man:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{l_2}{l_1} \left(\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right) - \frac{g}{l_1} \sin(\varphi_1) \\ \ddot{\varphi}_2 &= -\frac{l_1}{l_2} \left(\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right) - \frac{g}{l_2} \sin(\varphi_2) \end{aligned}$$

Wir formen die Gleichung so um, damit wir ein Differentialgleichungssystem der 1. Ordnung erhalten. Zuerst führen wir eine Matrix A ein:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{l_2}{l_1}\cos(\varphi_1-\varphi_2) \\ \frac{l_1}{l_2}\cos(\varphi_1-\varphi_2) & 1 \end{pmatrix}$$

Damit lautet das System:

$$A \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{l_2}{l_1}\sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 - \frac{g}{l_1}\sin(\varphi_1) \\ \frac{l_1}{l_2}\sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1^2 - \frac{g}{l_2}\sin(\varphi_2) \end{pmatrix}$$

also ist

$$\begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{l_2}{l_1}\sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 - \frac{g}{l_1}\sin(\varphi_1) \\ \frac{l_1}{l_2}\sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1^2 - \frac{g}{l_2}\sin(\varphi_2) \end{pmatrix}$$

mit

$$A^{-1} = \frac{m_1+m_2}{m_1+m_2\sin^2(\varphi_1-\varphi_2)} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{l_2}{l_1}\cos(\varphi_1-\varphi_2) \\ -\frac{l_1}{l_2}\cos(\varphi_1-\varphi_2) & 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also:

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi}_1 &= \frac{m_2}{(m_1+m_2\sin^2(\varphi_1-\varphi_2))l_1} \cdot \Bigg(g\cos(\varphi_1-\varphi_2)\sin\varphi_2 - g\frac{m_1+m_2}{m_2}\sin\varphi_1 \\
&\quad -l_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\left(\dot{\varphi}_2{}^2 + \frac{l_1}{l_2}\cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1{}^2\right)\Bigg) \\
\ddot{\varphi}_2 &= \frac{m_2}{(m_1+m_2\sin^2(\varphi_1-\varphi_2))l_2} \cdot \Bigg(\frac{m_1+m_2}{m_2} g\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2\right) \\
&\quad +\sin(\varphi_1-\varphi_2)\left(l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_2{}^2 + l_1\frac{m_1+m_2}{m_2}\dot{\varphi}_1{}^2\right)\Bigg)
\end{aligned}$$

GeoGebra hat einen numerischen Lösungsalgorithmus für ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung implementiert. Unser System schreiben wir als vier Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_1 &= \psi_1 \\
\dot{\psi}_1 &= \frac{m_2}{(m_1+m_2\sin^2(\varphi_1-\varphi_2))l_1} \cdot \Bigg(g\cos(\varphi_1-\varphi_2)\sin\varphi_2 - g\frac{m_1+m_2}{m_2}\sin\varphi_1 \\
&\quad -l_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\left(\psi_2^2 + \frac{l_1}{l_2}\cos(\varphi_1-\varphi_2)\psi_1^2\right)\Bigg) \\
\dot{\varphi}_2 &= \psi_2 \\
\dot{\psi}_2 &= \frac{m_2}{(m_1+m_2\sin^2(\varphi_1-\varphi_2))l_2} \cdot \Bigg(\frac{m_1+m_2}{m_2} g\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2\right) \\
&\quad +\sin(\varphi_1-\varphi_2)\left(l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\psi_2^2 + l_1\frac{m_1+m_2}{m_2}\psi_1^2\right)\Bigg)
\end{aligned}$$

mit Anfangsbedingungen:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$$

und $\varphi_1(0)$, bzw. $\varphi_2(0)$ gemäss obiger Abbildung (kann in der GeoGebra-App eingestellt werden).