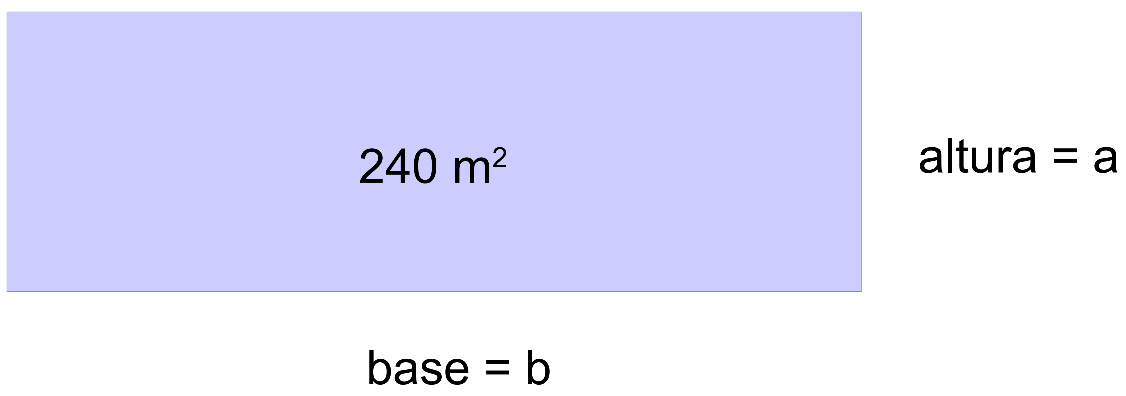
Problemas – Tema 1

Problemas resueltos - 14 - problemas de enunciados para resolver mediante ecuaciones

1. Calcula las medidas de un rectángulo cuya superficie es de 240 metros cuadrados, sabiendo que el largo es 6 metros mayor que el triple del ancho.

Incógnitas del problema: $base=b$, $altura=a$



Interpretamos a lenguaje matemático las condiciones del enunciado.

Superficie = base · altura → $240\ m^2=b\cdot a$

El largo (base) es 6 metros mayor que el triple del ancho (altura) → $b=6+3a$

Hemos planteado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{Bmatrix} 240=b\cdot a \\ b=6+3a \end{Bmatrix}$$

Sustituimos el valor de a de la segunda ecuación en la primera.

$$240=a(6+3a) \quad \rightarrow \quad 3a^2+6a-240=0$$

Simplificando.

$$a^2+2a-80=0$$

Obtenemos una ecuación de segundo grado, siendo a la incógnita, que podemos resolver con la expresión general.

$$a=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-80)}}{2\cdot1}$$
$$a_1=8$$
$$a_2=-10$$

Tanto 8 como -10 son soluciones de la parábola $a^2+2a-80=0$, pero físicamente solo contemplamos soluciones positivas (es decir, distancias positivas). Por lo tanto tomamos como solución válida para nuestro problema $a_1=8m$.

Sustituimos.

$$b=6+3a$$
$$b=30 \quad m$$

Siempre que resolvamos una ecuación o sistema debemos verificar que los resultados obtenidos satisfacen las ecuaciones de partida, e interpretar los resultados.

La pareja de valores base = 30 m y altura = 8 m satisfacen el sistema de ecuaciones de partida, por lo que son la solución a nuestro problema.

2. Dos caños que vierten agua juntos tardan dos horas en llenar un depósito. Manando separadamente, el primero emplea tres horas menos que el segundo. ¿Cuánto tiempo tarda cada uno solo?

Caudal grifo 1 (litros/hora) = x_1

Caudal grifo 2 (litros/hora) = x_2

Capacidad del depósito (litros totales) = d

Tiempo que tarda solo el grifo 1 en llenar el depósito (horas) = t_1

Tiempo que tarda solo el grifo 2 en llenar el depósito (horas) = t_2

Interpretamos a lenguaje matemático las frases del enunciado.

Juntos tardan dos horas en llenar el depósito → $2x_1+2x_2=d$

Solo el primer grifo → $t_1 x_1=d$

Solo el segundo grifo → $t_2 x_2=d$

El primer grifo tarda tres horas menos que el segundo → $t_1=t_2-3$

Tenemos un sistema de cuatro ecuaciones y cinco incógnitas.

$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2&=d \\ t_1 x_1&=d \\ t_2 x_2&=d \\ t_1&=t_2-3 \end{aligned}$$

Es decir, tenemos un grado de libertad que puede corresponder con el valor arbitrario del depósito d, al que podemos dar cualquier valor no nulo. Por ejemplo $d=1$ para simplificar operaciones.

$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2&=1 \\ t_1 x_1&=1 \\ t_2 x_2&=1 \\ t_1&=t_2-3 \end{aligned}$$

De la segunda y tercera ecuación obtenemos valores del caudal en función del tiempo, para cada grifo, y de la tercera sabemos el tiempo del segundo grifo en función del tiempo del primero.

$$x_1=\frac{1}{t_1}$$

$$x_2=\frac{1}{t_2}$$

$$t_2=t_1+3$$

Sustituyendo estos valores en la primera ecuación, nos queda una única igualdad que solo depende del tiempo t_1.

$$\frac{2}{t_1}+\frac{2}{t_1+3}=1$$

Obtenemos una ecuación racional, donde el m.c.m de los denominadores es $t_1(t_1 + 3)$.

$$\frac{2(t_1+3)+2t_1}{t_1(t_1+3)}=1$$

$$(t_1)^2-t_1-6=0$$

Cuyas dos raíces son: -2, 3. Físicamente solo consideramos tiempos positivos, por lo que $t_1 = 3$ horas.

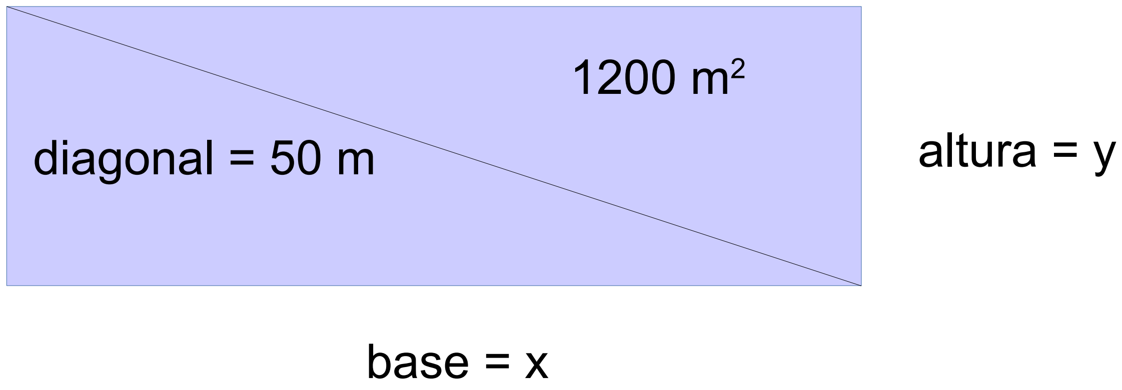
$$t_2=t_1+3$$

$$t_2=6 \quad horas$$

La pareja de valores $t_1 = 3$ horas y $t_2 = 6$ horas satisfacen el sistema de ecuaciones de partida, por lo que son la solución a nuestro problema.

3. Calcula las dimensiones de un solar rectangular de superficie 1.200 m² y de diagonal 50 m.

$$base=x$$
$$altura=y$$



$$Superficie=base\cdot altura \quad \rightarrow \quad 1200\,m^2=x\cdot y$$

Aplicando el teorema de Pitágoras en la diagonal → $x^2+y^2=50^2$ → Generándose un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1200}{y} \\ x^2+y^2=50^2 \end{array}\right\}$$

Sustituimos el valor de x de la primera ecuación en la segunda:

$$y^4-2500\,y^2+1440000=0$$

Tenemos una ecuación bicuadrática que resolvemos con el cambio de variable $t=y2$.

$$t^2-2500\,t+1440000=0$$
$$t_1=1600$$
$$t_2=900$$

No debemos olvidar invertir el cambio de variable realizado inicialmente, con objeto de obtener los valores de la incógnita y de partida.

$$y=\pm\sqrt{1600}\rightarrow y_1=40, \quad y_2=-40$$
$$y=\pm\sqrt{900}\rightarrow y_3=30, \quad y_4=-30$$

Nos quedamos con los valores positivos, ya que físicamente tienen sentido distancias positivas. Para cada valor de y debemos calcular el correspondiente valor de x que satisface el sistema.

$$Si \quad y=40 \ \ m \ \rightarrow x=30 \ \ m$$
$$Si \quad y=30 \ \ m \ \rightarrow x=40 \ \ m$$

4. Un ciclista recorrió 120 Km a la ida. A la vuelta, llevando una velocidad de 10 Km/h más, tardó dos horas menos. ¿Qué tiempo empleó en realizar el recorrido y cuál fue la velocidad de ida?

x = tiempo de ida (horas)

y = velocidad de ida (km/h)

$x-2$ = tiempo de vuelta (horas)

$y+10$ = velocidad de vuelta (km/h)

El tiempo de ida será igual a la distancia recorrida entre la velocidad a la que se va:

$$Tiempo\,de\,ida : \frac{120}{y}=x$$

$$Tiempo\,de\,vuelta : \frac{120}{y+10}=x-2$$

Así obtenemos un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{120}{y}=x \\ \dfrac{120}{y+10}=x-2 \end{cases}$$

Lo resolvemos sustituyendo el valor de x de la primera ecuación en la segunda:

$$\frac{120}{y+10}=\frac{120}{y}-2$$

$$\frac{120}{y+10}=\frac{120-2y}{y}$$

$$120y=120y-2y^2+1200-20y$$

$$y^2+10y-600=0$$

Resolvemos con la fórmula de la ecuación de segundo grado.

$$y=\frac{-10\pm\sqrt{100-4\cdot(-600)}}{2}$$

$$y=\frac{-10\pm 50}{2}$$

$$y_1=-30$$

$$y_2=20$$

La solución que escogemos es la positiva, ya que hablamos de velocidad → $y=20\ km/h$. Calculamos el tiempo de ida:

$$\frac{120}{20}=x$$

Solución final → tardó $x=6\ horas$ a la ida y viajó a $y=20\ km/h$

5. Obtener un número de tres cifras sabiendo que la suma de los cuadrados de sus cifras es de 126, que la cifra de las unidades es un tercio de la cifra de las centenas, y que el cuadrado de la cifra de las decenas es igual al producto de las cifras de centenas y unidades más nueve.

La suma de los cuadrados de las cifras del número es 126. Si x representa las centenas, y las decenas, z las unidades, tendremos → $x^2+y^2+z^2=126$

La cifra de las unidades es un tercio de la cifra de las centenas → $z=\frac{1}{3}x$

El cuadrado de la cifra de las decenas es igual al producto de las cifras de centenas y unidades más nueve. Por lo tanto la ecuación asociada a esta condición es → $y^2=(z\cdot x)+9$

Con los datos se hace un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\begin{pmatrix} z=\frac{1}{3}x \\ y^2=(z\cdot x)+9 \\ x^2+y^2+z^2=126 \end{pmatrix}$$

Usamos el método de sustitución, sustituyendo el valor de z de la primera ecuación en la segunda .

$$y^2=\left(\frac{1}{3}x\cdot x\right)+9$$

Estos valores de y, z los llevamos a la tercera ecuación:

$$x^2+\left(\frac{1}{3}x\cdot x\right)+9+\frac{1}{9}x^2=126$$

$$13x^2=1053$$

$$x=9$$

Para terminar sustituimos en la dos primeras ecuaciones para hallar las otras cifras.

$$z=\frac{1}{3}\cdot 9=3$$

$$y^2=(3\cdot 9)+9=6$$

El numero solución es 963 .

6. La edad de un niño será dentro de 3 años un cuadrado perfecto y hace tres años su edad era la raíz cuadrada de ese mismo número. Averigua los años que tiene.

Edad del niño: x

Dentro de tres años su edad será un cuadrado perfecto (es decir, la raíz de ese número será un entero).

$$x+3=y$$

Hace tres años su edad era la raíz cuadrada de ese mismo número:

$$x-3=\sqrt{y}$$

Hacemos un sistema de ecuaciones con los datos.

$$\begin{pmatrix} x+3=y \\ x-3=\sqrt{y} \end{pmatrix}$$

Despejamos y en la primera ecuación y sustituimos en la otra → $x-3=\sqrt{x+3}$

Elevamos los dos términos al cuadrado para eliminar la raíz → $(x-3)^2=x+3$

Resolvemos la ecuación cuadrática que obtenemos.

$$x^2-7x+6=0 \;\rightarrow\; x=\frac{7\pm 5}{2} \;\rightarrow\; x_1=6 \;,\; x_2=1$$

El valor 1 no puede ser solución porque, según las condiciones del enunciado, hace tres años daría lugar a una edad negativa. Lo cual no es posible.

Solución: El niño tiene 6 años.

7. La suma de los cuadrados de las cifras de un número de dos cifras es igual a 10 y si al número le quitamos 18 obtenemos un número escrito con las mismas cifras, pero en orden inverso. Halla el número.

Las incógnitas que me pide las representaré como x para la cifra de las decenas e y para la cifra de las unidades.

Primero, represento los datos que me dan obteniendo así un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ [(x\cdot 10)+y]-18=(y\cdot 10)+x \end{cases}$$

Luego, despejaré en una de las ecuaciones una de las incógnitas para que el resultado sea sustituido en la otra. Es decir, uso el método de sustitución:

$$[(x\cdot 10)+y]-18=(y\cdot 10)+x \quad\rightarrow\quad y-18-10y=x-10x \quad\rightarrow\quad -9y-18=-9x$$

$$\frac{9\cdot(y+2)}{9}=x \quad\rightarrow\quad x=(y+2)$$

Este valor de x lo llevo a la primera ecuación del sistema.

$$(y+2)^2+y^2=10 \quad\rightarrow\quad y^2+4y+4+y^2=10 \quad\rightarrow\quad 2y^2+4y-6=0$$

$$y=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times 2\times(-6)}}{2\times 2} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} y=1 \\ y=-3 \end{cases}$$

Me quedo con la solución positiva, ya que un número (sin considerar el signo) está formado por cifras positivas. A partir de este resultado, resuelvo la otra incógnita:

$$x^2+1^2=10 \quad\rightarrow\quad x^2=9 \quad\rightarrow\quad x=\pm 3$$

Por lo tanto $x=3, y=1$. Nuestro número solución es 31 .

8. Un campesino tiene bueyes que comen la misma cantidad de pienso todos los días. Si vendiese 15 el pienso duraría 3 días más y si comprase 25 el pienso duraría tres días menos. Halla el número de bueyes y el número de días que los puede alimentar.

x = número de bueyes

$k\cdot x$ = pienso total que comen los bueyes al día

d = número de días

$k\cdot x\cdot d$ = total de pienso que tiene el campesino

Primero, represento los datos que me dan obteniendo así un sistema de ecuaciones:

$$k\cdot x\cdot d=k(x-15)(d+3)$$
$$k\cdot x\cdot d=k(x+25)(d-3)$$

Operando y simplificando:

$$45=3x-15d$$
$$75=-3x+25d$$

De la primera ecuación:

$$3x=45+15d \;\rightarrow\; x=\frac{45}{3}+\frac{15d}{3} \;\rightarrow\; x=15+5d$$

Y sustituimos este valor en la segunda ecuación:

$$75=-3(15+5d)+25d \;\rightarrow\; 75=-45-15\text{d}+25d$$
$$75=-45+10d \;\rightarrow\; 120=10d$$
$$d=12\rightarrow x=75$$

Bueyes que tiene el campesino = 75

Días que durará el pienso = 12

9. Mensualmente los socios de una peña quinielística juegan 520 €. Si hubiera siete socios más, aportarían 14 € menos.¿Cuántos socios hay en la peña y cuál es la cuota mensual que paga cada socio?

La incógnita x es el número de socios e y es la cantidad de dinero que juega cada uno. Planteo un sistema:

$$\begin{cases} x\cdot y=520 \\ (x+7)\cdot(y-14)=520 \end{cases}$$

Para resolver este problema despejaré x en la ecuación segunda y luego sustituiré el resultado en la ecuación primera. Es decir, usaré el método de sustitución:

$$(x+7)\cdot(y-14)=520 \rightarrow xy+7y-14x-98=520 \rightarrow x(y-14)=618-7y$$

$$\frac{618-7y}{y-14}=x$$

Llevo este valor a la primera ecuación:

$$\frac{618-7y}{y-14}y=520 \rightarrow 618y-7y^2=520y-7280 \rightarrow -7y^2+98y+7280=0$$

$$y=\frac{-98\pm\sqrt{98^2-4\times(-7)\times7280}}{2\times(-7)} \rightarrow \begin{cases} y=40 \\ y=-26 \end{cases}$$

Escojo la solución positiva, ya que no pueden pagar una cuota negativa. Y despejo x en la primera ecuación de partida:

$$x=\frac{520}{40} \rightarrow x=13$$

Es decir: $x=13\,socios$, $y=40€$ de cuota por cada socio.

10. En una división el dividendo es 1275; el cociente y el resto son iguales, y el divisor es el doble del cociente, ¿Cuál es el divisor?

La x representa al resto, que es igual a cociente según el enunciado:

Resto = Cociente = x

Al ser el divisor el doble del cociente, tenemos → Divisor = $2x$

Aplicando la prueba de la división → cociente · divisor + resto = dividendo

$$x \cdot 2x + x = 1275$$

$$2x^2 + x - 1275 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1275)}}{4} = \frac{-1 \pm 101}{4}$$

$$x_1 = -25{,}25$$

$$x_2 = 25$$

La solución $-25{,}25$ se descarta porque no tiene sentidoun resto negativo. El resto es siempre lo que sobra al hacer una división. Y una división significa hacer grupos del mismo tamaño. Por lo que no podemos tener restos negativos.

Por lo tanto 25 es el valor correcto del cociente, que multiplicado por 2 da un valor de 50 para el divisor.

11. En una clase se ha repartido un precio de 300€ por su participación en la olimpiada matemática. Si hubieran sido 10 alumnos más, les tocarían 5€ menos por persona y si fueran cinco alumnos menos les tocarían 5€ más. Calcula el número de alumnos.

x → número de alumnos

y → dinero que corresponde a cada alumno

Como el total del premio son 300 euros, siempre se cumple la relación → $y=\frac{300}{x}$

Con los datos del enunciado, formamos el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{300}{x+10}=y-5 \\ \frac{300}{x-5}=y+5 \end{array}\right\}$$

Si, por ejemplo, en la primera ecuación del sistema sustituimos $y=\frac{300}{x}$, obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado.

$$5x^2+50x-3000=0 \quad \rightarrow \quad x^2+10x-600=0 \quad \rightarrow \quad x=-30 \quad , \quad x=20$$

La solución con sentido práctico es el valor positivo, ya que el número de miembros no puede ser negativo.
Si $x=20$ alumnos → $y=15$ euros por alumno como premio.

12. a) Si la inflación anual es del 3,2%, ¿cuánto habrá que pagar dentro de 4 años por una vivienda que cuesta actualmente 137.000€?

b) Calcula el precio que tenía una vivienda hace cuatro años, si actualmente cuesta 200.000€

a) Aplicamos la formula del interés compuesto:

$$Precio\ final = Precio\ inicial \cdot (1 + interés)^{n^o\ de\ años}$$

Donde el interés debemos expresarlo en tanto por uno.

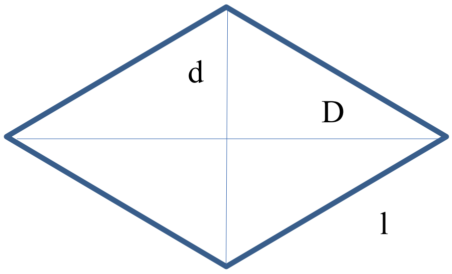
Si queremos averiguar el precio final.

$Precio\ final = 137000 \cdot (1 + 0.032)^4$ → Precio final = 155.395,58 €

b) $Precio\ final = Precio\ inicial \cdot (1 + interés)^{n^o\ de\ años}$

$200.000\ euros = Precio\ inicial \cdot (1 + 0{,}032)^4$ → Precio inicial = 176.323,31 €

13. Halla el área de un rombo de lado 7 dm, sabiendo que su diagonal mayor es el doble de la menor.



Área: A

Diagonal mayor: $D=2d$

Diagonal menor: d

Lado rombo: $l=7\,dm$

El área del rombo es → $A=\frac{D\cdot d}{2}=\frac{(2d)d}{2}=d^2$

Debemos relacionar $D\ y\ d$, usando Pitágoras en uno de los cuatro triángulos rectángulos del rombo, ya que conocemos el valor del lado $l(7\,dm)$ y que $D=2d$.

$$l^2=\left(\frac{D}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{4d^2}{4}+\frac{d^2}{4} \rightarrow 49=\frac{5\cdot d^2}{4} \rightarrow d^2=\frac{196}{5}$$

Por lo tanto → $A=\frac{196}{5}\ dm^2$

14. Halla un número de 3 cifras, sabiendo que sus cifras suman 9, que si al número buscado se le resta el que resulta de invertir sus cifras, la diferencia es 198; y además, la cifra de las decenas es media aritmética de las otras dos.

Las tres ecuaciones que podemos plantear son:

$$x+y+z=9$$
$$100x+10y+z-(100z+10y+x)=198$$
$$\frac{x+z}{2}=y \rightarrow x+z=2y$$

En la primera ecuación despejamos el valor de la incógnita x.

$$x+y+z=9;\ \ x=9-y-z$$

Y sustituimos este valor en la segunda y tercera ecuación del sistema. Resolviendo el nuevo sistema 2x2 obtenemos la terna de valores:

$$x=4$$
$$y=3$$
$$z=2$$

Es decir, nuestro número es 432.

15. Calcula el área determinada por el eje de abscisas, una recta paralela a la bisectriz del primer cuadrante que pasa por el punto (2, 0) y la recta que pasa por los puntos (-5, 3) y (-3, 0).

Las rectas que nos piden se representan de la siguiente forma en los ejes cartesianos.

La ecuación de la recta del eje de abscisas es:

$$y=0$$

La ecuación de la recta de la bisectriz del primer y tercer cuadrante es:

$$y=x$$

Su pendiente es $m=1$. La recta que pasa por el punto $(2,0)$ y es paralela a esta bisectriz, tendrá la forma:

$$y=x+n$$

Sustituyendo los valores del punto $(2,0)$:

$$0=1\cdot 2+n$$
$$n=-2$$

Por lo tanto la recta buscada es:

$$y=x-2$$

La otra recta del enunciado pasa por los puntos $(-5,3)$ y $(-3,0)$. Por lo que su ecuación viene dada por:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

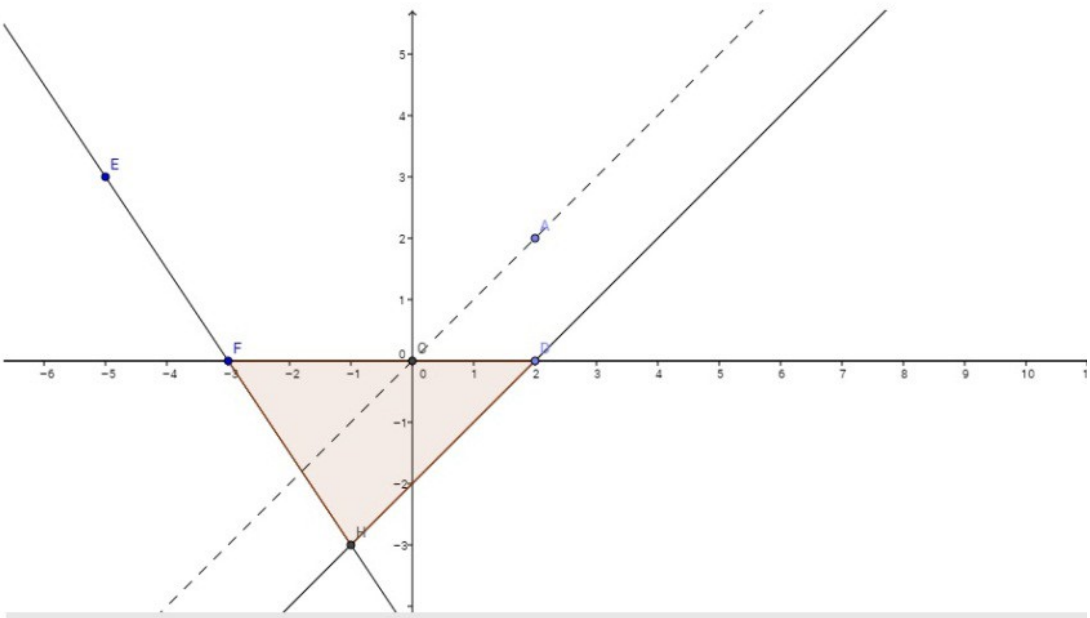
Sustituyendo:

$$\frac{x-(-5)}{-3-(-5)}=\frac{y-3}{0-3} \rightarrow -3x-15=2y-6 \rightarrow y=\frac{-3}{2}x-\frac{9}{2}$$

La intersección de esta recta con el eje $y=0$ nos da el punto $F(-3,0)$.
La intersección de la recta $y=x-2$ con el eje $y=0$ nos da el punto $D(2,0)$.

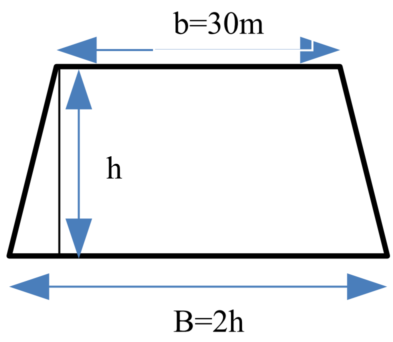
La intersección de la recta $y=x-2$ con la recta $y=\frac{-3}{2}x-\frac{9}{2}$ da como resultado el punto $H(-1,-3)$.

El triángulo de vértices FDH , como se aprecia en la gráfica inicial, posee base 5 y altura 3 , por lo que → $Área=\frac{5\times 3}{2}=\frac{15}{2}\ u^2$



16. Un jardín en forma de trapecio isósceles tiene una superficie de 1.000 metros cuadrados. Si la base menor mide 30m y la base mayor es el doble de la altura, ¿cuáles son las dimensiones?

El área del trapecio se calcula con la expresión:



$$A=\frac{(B+b)}{2}\cdot h$$

Siendo el área → $A=1000\ m^2$

Sustituimos en la fórmula del área del trapecio, las incógnitas de las que ya tenemos su valor:

$$1000=\frac{(2h+30)}{2}\cdot h$$

Resolvemos la ecuación para obtener el valor de la altura h .

$$1000=\frac{2h^2+30h}{2}\ \rightarrow\ 2000=2h^2+30h\ \rightarrow\ 2h^2+30h-2000=0$$

$$h=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-30\ \pm\sqrt{30^2-4\cdot 2\cdot(-2000)}}{2\cdot 2}=\frac{-30\pm 130}{4}$$

De las dos soluciones posible, tomamos la positiva (al estar trabajando con distancias).

$$h=25\,m$$
$$base\ menor=30\ m$$
$$base\ mayor=2\ h=50\ m$$

17. El número 365 es el número de días que tiene un año y es un número curioso: es suma de los cuadrados de 3 números naturales consecutivos. Calcúlalos.

La incógnita x es uno de esos tres números, en este caso el más pequeño. Al ser consecutivos, sumándole 1 y 2 se hayan los dos siguientes números naturales y así podemos plantear la ecuación, sabiendo que los tres números están elevados al cuadrado.

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=365 \rightarrow x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4=365 \rightarrow 3x^2+6x-360=0$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot 3\cdot(-360)}}{6}=\frac{-6\pm 66}{6}$$

$$x_1=-12$$

$$x_2=10$$

Al indicarse que los números son naturales la solución negativa no es posible, así que obtenemos:

$$x=10$$
$$x+1=11$$
$$x+2=12$$

18. Busca un número tal que su cubo menos 3 unidades multiplicado por su cubo más 3 unidades coincida con 7 veces su cubo menos 1.

Número que buscamos → x

El cubo (elevamos a tres) del número que buscamos menos tres unidades → x^3-3

El cubo (elevamos a tres) del número que buscamos más tres unidades → x^3+3

El producto de los dos anteriores tiene que ser igual al cubo del número, por siete y menos uno. Quedando la siguiente expresión → $(x^3-3)\cdot(x^3+3)=7x^3-1$

Resolvamos la ecuación.

$$(x^3-3)\cdot(x^3+3)=7x^3-1 \quad \rightarrow \quad x^6+3x^3-3x^3-9=7x^3-1 \quad \rightarrow \quad x^6-7x^3-8=0$$

Para resolverla sustituimos x^3 por t → $x^3=t$ → $x^6=t^2$

Sustituyendo nos queda una ecuación de segundo grado.

$$t^2-7t-8=0 \quad \rightarrow \quad t=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot(-8)}}{2} \quad \rightarrow \quad t=\frac{7\pm 9}{2} \quad \rightarrow \quad t=-1 \quad , \quad t=8$$

Deshacemos el cambio de variable.

$$x^3=t \quad \rightarrow \quad x=\sqrt[3]{t} \quad \rightarrow \quad x=-1 \quad , \quad x=2$$

19. Juan es seis años más joven que su primo Pablo. La suma de sus edades es menor que 40. ¿Cuál es la edad máxima de Pablo?

Las incógnitas del problema son las edades de los primos:

Pablo = x

Juan = $x-6$

Pablo, es decir x, es 6 años mayor que su primo Juan. Y la suma de sus edades es menor que 40.

$$x+(x-6)<40 \rightarrow 2x-6<40 \rightarrow 2x<40+6$$

$$x<\frac{46}{2} \rightarrow x<23$$

El valor máximo permitido es $x=22$, ya que debe ser inferior a 23.. Por lo tanto si Pablo tiene 22 años como máximo, Juan tendrá $22-6=16\,años$.

20. En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide 2 cm más que el otro y 2 cm menos que la hipotenusa. Calcula las longitudes de los lados.

El teorema de Pitágoras afirma que, en todo triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

hipotenusa = a

cateto mayor = $a-2$

cateto menor = $a-4$

$a^2=(a-4)^2+(a-2)^2$

Nos encontramos con un binomio de Newton de orden dos.

$$a^2=(a^2+16-2\cdot a\cdot 4)+(a^2+4-2\cdot a\cdot 2) \rightarrow a^2= a^2+16-8a+ a^2+4-4a$$

$$a^2-2a^2+12a-20=0 \rightarrow -a^2+12a-20=0$$

Usamos la fórmula de las ecuaciones de segundo grado.

$$a=\frac{-12\pm\sqrt{12^2+((-4)\cdot(-20)\cdot(-1))}}{2\cdot(-1)} \rightarrow a=\frac{-12\pm 8}{-2} \rightarrow a=2 \;,\; a=10$$

Por lo tanto la hipotenusa es $a=10\,cm$, porque si usáramos el valor 2 nos saldrían los catetos con valores negativos.

Si despejamos los catetos: 8 cm y 6 cm.

21. Encontrar un número que sumado con el doble de su raíz cuadrada dé 24.

Un número, x, que sumado con el doble de su raíz debe ser igual a 24, da lugar a la siguiente ecuación:

$$x+2\cdot\sqrt{x}=24$$

Operando:

$$(2\cdot\sqrt{x})^2=(24-x)^2$$
$$x^2-52x+576=0$$
$$x=\frac{52\pm\sqrt{52^2-4\cdot 576}}{2}$$
$$x=\frac{52\pm 20}{2}$$
$$x=16$$
$$x=36$$

Si sustituimos estos dos valores en la primera fórmula comprobamos que 36 no cumple la ecuación de partida mientras que 16 si la cumple. Por tanto podemos afirmar que 16 es la solución a nuestro problema.