A 243. probléma matematikai bizonyítása

Keressük azokat a p_1, p_2, p_3 prímszámokat, amelyekre teljesül az alábbi egyenlet:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 2027$$

1. Paritásvizsgálat (Modulo 2)

A 2027 páratlan szám. Három négyzetszám összege csak úgy lehet páratlan, ha mindhárom tag páratlan, vagy ha pontosan két tag páros.

- Az egyetlen páros prím a 2. Ha két tag páros lenne ($2^2 + 2^2 + p_3^2 = 2027$), akkor $p_3^2 = 2019$ adódna, de a 2019 nem négyzetszám.
- **Következtetés:** Mindhárom keresett prímszámnak **páratlannak** kell lennie.

2. Oszthatósági vizsgálat (Modulo 3)

Bármely 3-mal nem osztható egész szám négyzete 3-mal osztva mindig 1 maradékot ad ($n^2 \equiv 1 \pmod 3$).

- Tegyük fel, hogy egyik keresett prím sem a 3. Ekkor a négyzetösszegük maradéka $1 + 1 + 1 = 3 \equiv 0 \pmod 3$ lenne (azaz osztható lenne 3-mal).
- Ezzel szemben a 2027 számjegyeinek összege 11, ami 3-mal osztva 2 maradékot ad ($2027 \equiv 2 \pmod 3$).
- **Következtetés:** Ellentmondásra jutottunk, így az egyik prímszámnak kötelezően a **3-asnak** kell lennie. Legyen $p_1 = 3$.

3. A probléma redukálása és korlátozása

Behelyettesítve $p_1 = 3$-at, az egyenlet leegyszerűsödik két páratlan prím négyzetösszegére:

$$3^2 + p_2^2 + p_3^2 = 2027 \implies p_2^2 + p_3^2 = 2018$$

Mivel p_2 és p_3 is páratlan prímek (és egyik sem a 3), a legkisebb lehetséges értékük az 5.

- Ha $p_2 = 5$, akkor $2018 - 25 = 1993$, ami nem négyzetszám. Így mindkét prím nagyobb 5-nél.
- A két szám átlagos négyzetes értéke $\frac{2018}{2} = 1009$. Mivel $\sqrt{1009} \approx 31,7$, a szimmetria miatt az egyik prímnek kisebbnek, a másiknak nagyobbnak kell lennie 31-nél.
- A felső határ $\sqrt{2018} \approx 44,9$.

A 31 és 45 közötti szóba jöhető prímszámok listája rendkívül rövid: $\mathbf{37, 41, 43}$.

4. Végső ellenőrzés

Próbáljuk meg a legnagyobb prímértéket ($p_3 = 43$):

$$43^2 = 1849$$

$$p_2^2 = 2018 - 1849 = 169$$

$$\sqrt{169} = 13$$

Mivel a 13 prímszám, megkaptuk az egyenlet egyetlen, egyértelmű megoldását.

Eredmény

Az egyetlen prímhármas, amely kielégíti a feltételt:

$$\mathbf{3^2 + 13^2 + 43^2 = 2027}$$