Club GeoGebra Iberoamericano

2

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

INTRODUCCIÓN

Comenzamos la publicación de un nuevo tema, dedicado en esta ocasión al trabajo con ángulos en la circunferencia.

La estructura es similar al tema anterior con una propuesta de actividades que esperamos os ayuden para utilizar GeoGebra como recurso para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

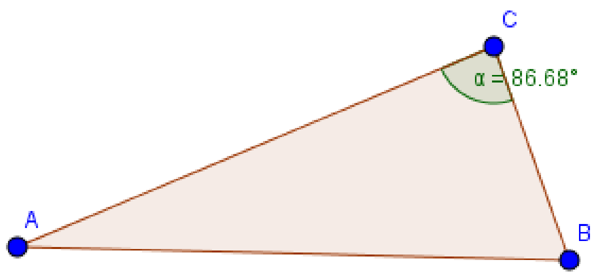
Recordemos que los Club de GeoGebra se realizan gracias a la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) a través de sus Instituto Iberoamericano de TIC y Educación (IBERTIC) e Instituto Iberoamericano de Enseñanza de la Ciencia y la Matemática (IBERCIENCIA).

ÁNGULOS

Comenzaremos indicando cómo crear o medir un ángulo utilizando GeoGebra.

Supongamos que tenemos dibujado un triángulo cualquiera del que queremos medir sus ángulos.

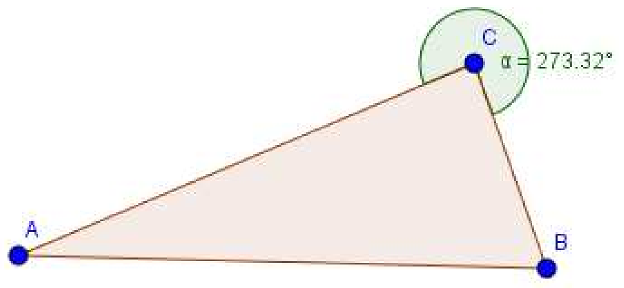
Seleccionamos la herramienta **Ángulo**  y pulsamos sobre los tres vértices para obtener la medida del ángulo cuyo vértice se haya marcado en segundo lugar. Por ejemplo, si pulsamos A, B y C, en este orden obtendremos la medida del ángulo B tal y como aparece en la imagen.



De manera análoga obtendremos la medida de los ángulos A y C.

Hay que tener en cuenta que si los vértices se marcan en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, obtendremos la medida del ángulo exterior.

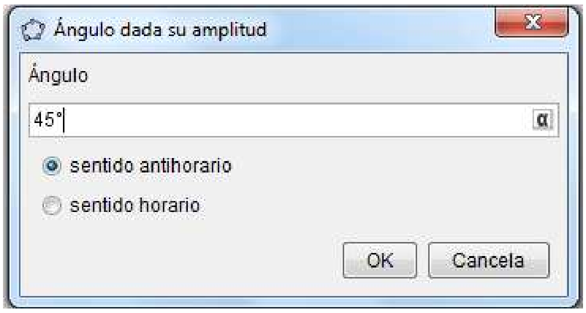
Así, al pulsar B, C y A, en este orden aparecerá el ángulo exterior en el vértice B, tal y como aparece en la imagen siguiente:



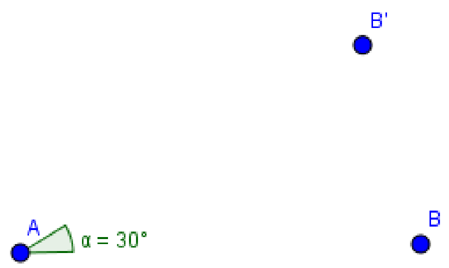
Los mismos resultados se obtendrán al pulsar sobre los lados del triángulo, dependiendo del orden en el que se marquen, se obtendrá el ángulo interior o el exterior.

GeoGebra ofrece una herramienta que nos permite crear un ángulo de una medida exacta. Para ello, disponemos de la herramienta **Ángulo dada su amplitud** para la que necesitamos marcar dos puntos, de los que el segundo corresponderá al vértice del ángulo que se desea crear.

Por ejemplo, a partir de dos puntos A y B, una vez seleccionada la herramienta anterior pulsamos sobre A y B, en este orden. Aparecerá el cuadro de diálogo siguiente para introducir la medida del ángulo.



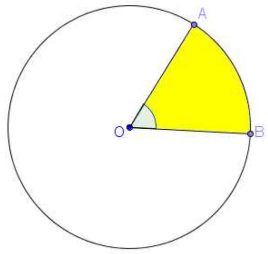
Una vez introducido el valor del ángulo, al pulsar el botón Ok, aparecerá construido, tal y como aparece en la imagen siguiente:



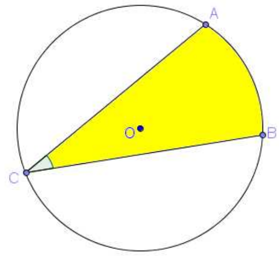
Observamos que además del ángulo aparece un punto B´ que corresponde a la rotación del punto B alrededor del punto A según el ángulo indicado.

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

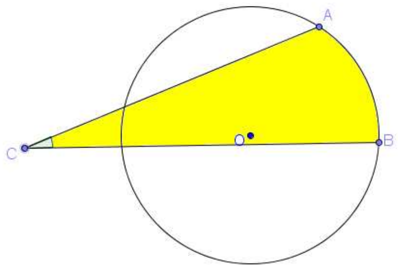
Antes de proponer las primeras actividades, dibujaremos y mediremos los distintos ángulos que se pueden trazar en la circunferencia.



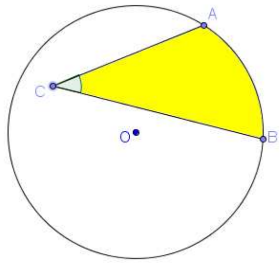
Ángulo central



Ángulo inscrito



Ángulo exterior



Ángulo interior

Como siempre, el objetivo no es facilitar un material para seguirlo al pie de la letra, ya que se trata de ofrecer un conjunto de actividades que puedan servir de referencia, de manera que cada docente seleccione las que considere oportunas y por supuesto, las complete con otras actividades y tareas, creando materiales propios para posteriormente compartirlos con el resto de participantes.

Para comenzar con este bloque de actividades proponemos unas investigaciones sencillas encaminadas a descubrir la relación entre distintos ángulos.

Relación entre ángulos inscritos que abarcan el mismo arco

Realiza la siguiente construcción:

- Dibuja una circunferencia, marca tres puntos A, B y P sobre la circunferencia.
- Construye el ángulo inscrito APB.
- Mide el ángulo APB.
- Mueve el punto P.

¿Qué observas en la medida del ángulo cuando P recorre la circunferencia?

Construye un nuevo ángulo inscrito AQB y mueve cualquiera de los elementos que intervienen en la construcción anterior para estudiar la relación entre los dos ángulos anteriores.

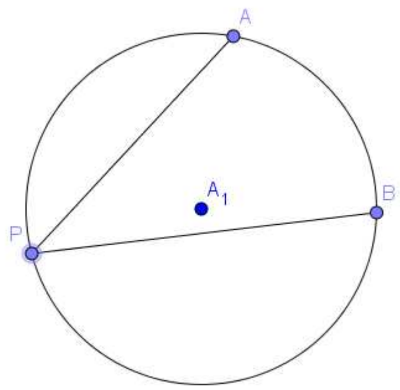
Deduce qué relación hay entre dos ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco.

Vamos a resolver esta primera propuesta paso a paso.

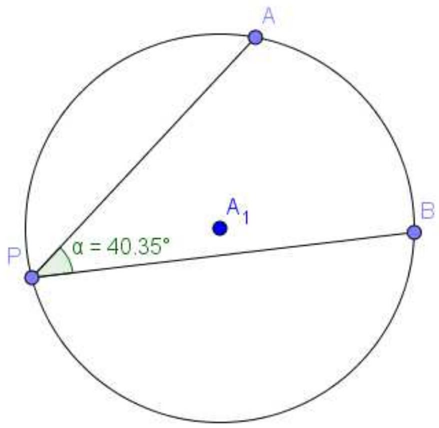
Comenzamos dibujando la circunferencia utilizando para ello la herramienta **Circunferencia (centro, punto)** en la que podemos ocultar el punto utilizado para crearla.

A continuación, utilizando la herramienta **Punto** creamos tres puntos en la circunferencia, a los que cambiamos el nombre para que sean A, B y P.

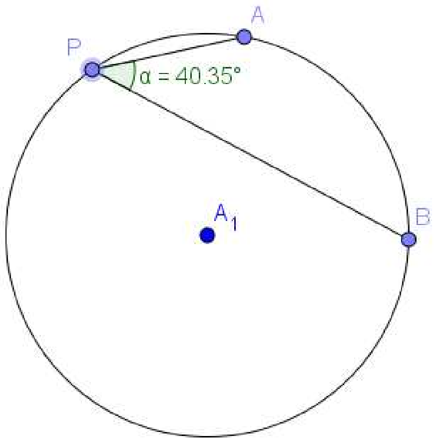
Para dibujar el ángulo podemos trazar los segmentos AP y BP utilizando la herramienta **Segmento** para obtener la imagen similar a la siguiente:

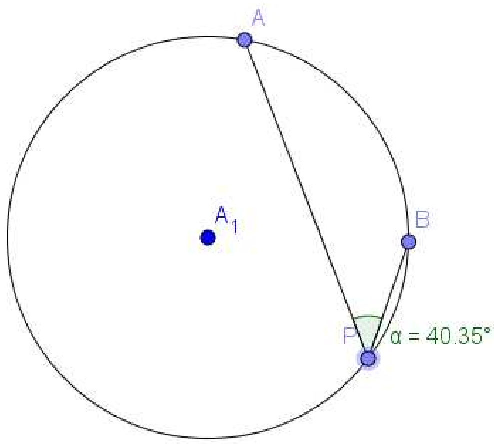


Utilizando la herramienta Ángulo medimos el ángulo APB pulsando los vértices en el orden B, P y A para obtener el ángulo interno y no el exterior.



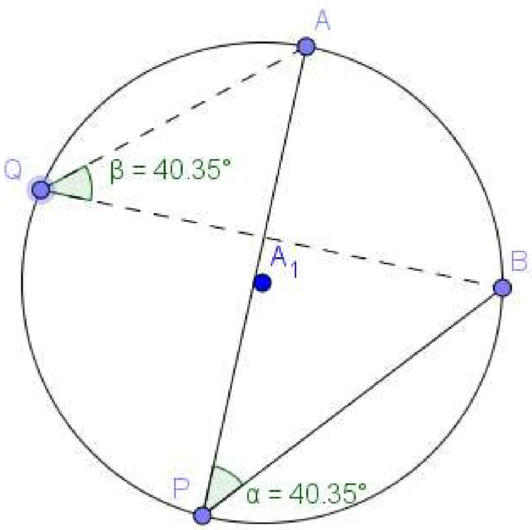
Al mover el punto P por la circunferencia observaremos que la medida del ángulo no cambia.





Al mover el punto P por la circunferencia observaremos que la medida del ángulo no cambia.

Repetimos el proceso para crear un nuevo ángulo AQB.



Observamos que los dos ángulos son iguales, lo cual ya estaba claro después de mover el punto P por toda la circunferencia.

Por tanto todos los ángulos inscritos en una circunferencia que abarquen una misma cuerda son iguales.

Relación entre un ángulo inscrito y su correspondiente ángulo central

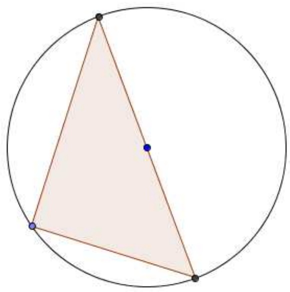
Realiza la siguiente construcción:

- Dibuja una circunferencia de centro O y dos puntos A y B sobre la circunferencia.
- Construye y mide el ángulo central AOB.
- Dibuja y mide un ángulo inscrito APB.

Mueve el punto P para estudiar la relación entre los dos ángulos anteriores y completa la siguiente propiedad: *"La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es _______________ del correspondiente ángulo central"*.

Ángulos inscritos en una semicircunferencia

Realiza la construcción que aparece en la figura para estudiar la medida de un ángulo inscrito que abarca un arco correspondiente a una semicircunferencia.



Relación entre un ángulo exterior y los arcos que abarca

Dibuja un ángulo exterior a una circunferencia e intenta relacionar su medida con la de los dos arcos que abarca.

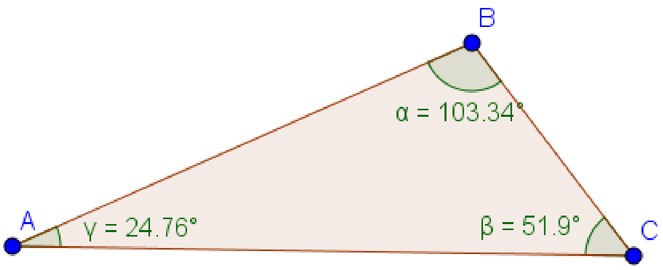
Relación entre un ángulo interior y el arco que abarca

Dibuja un ángulo interior a una circunferencia e intenta relacionar su medida con la del arco que abarca y la del arco opuesto.

TEXTOS DINÁMICOS

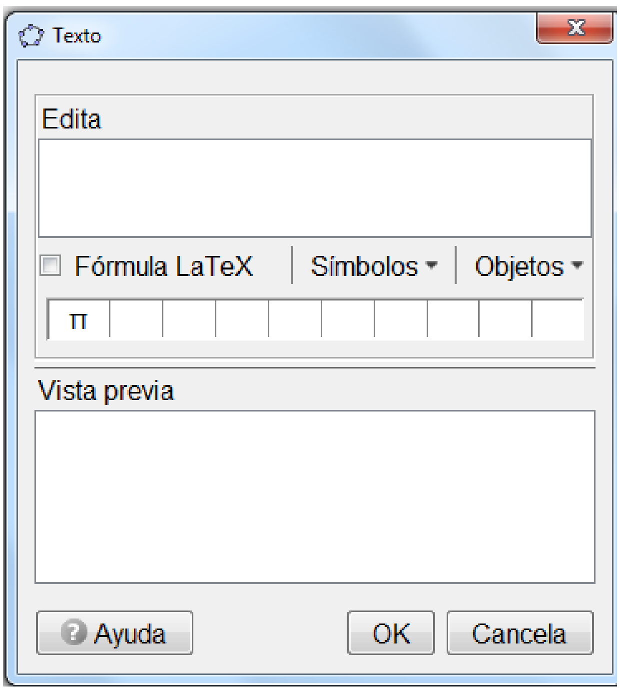
Los objetos y las relaciones establecidas en GeoGebra son dinámicas, lo que significa que se actualizan al cambiar las condiciones iniciales. Algo similar podemos conseguir con los textos que hacen referencia a medidas o a operaciones con las medidas.

Por ejemplo, si dibujamos un triángulo y medimos los ángulos, tendremos la imagen siguiente:

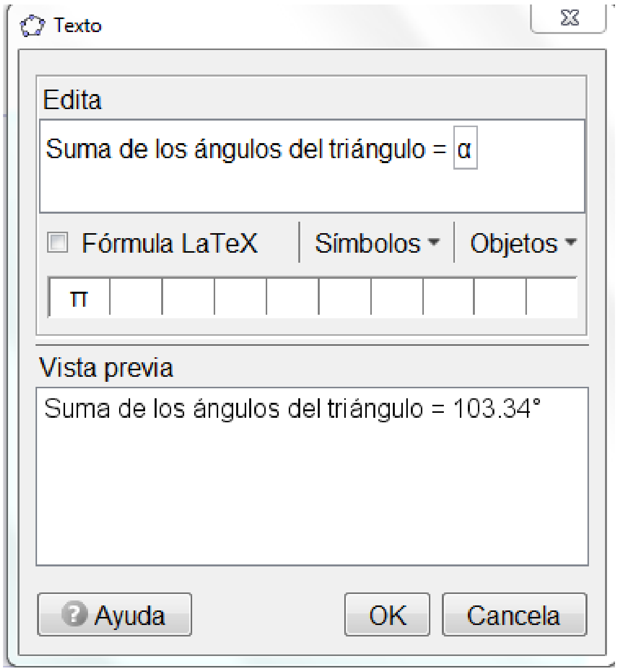


Si queremos calcular la suma de los tres ángulos, que evidentemente sabemos que será 180º, y deseamos que aparezca un texto que en cada momento muestre la medida de los ángulos que estamos sumando y su resultado procederemos en la forma siguiente:

Seleccionamos la herramienta **Texto** ABC, pulsando sobre el lugar en el que deseamos colocarlo en la vista gráfica. Aparecerá el cuadro de diálogo siguiente:

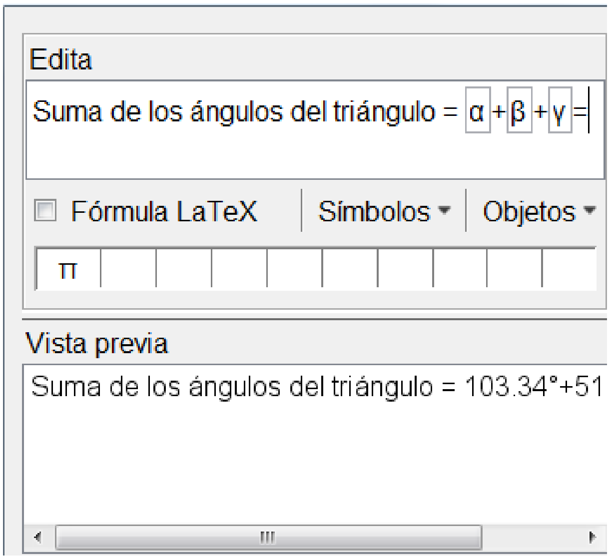


Comenzamos escribiendo *Suma de los ángulos de un triángulo =*, pulsando a continuación sobre objetos para seleccionar la medida del ángulo α. Observamos que aparecerá encerrado en un pequeño cuadro, lo que hará que sea un texto dinámico y se actualice al variar su medida.

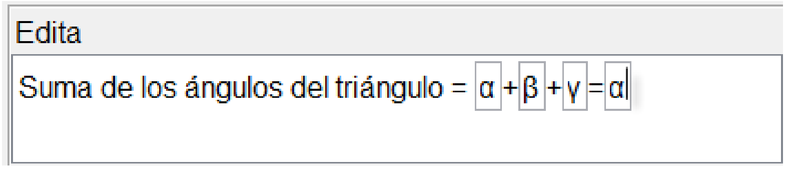


Podemos comprobar que en **Edita** aparece el nombre del ángulo y en **Vista previa** su medida.

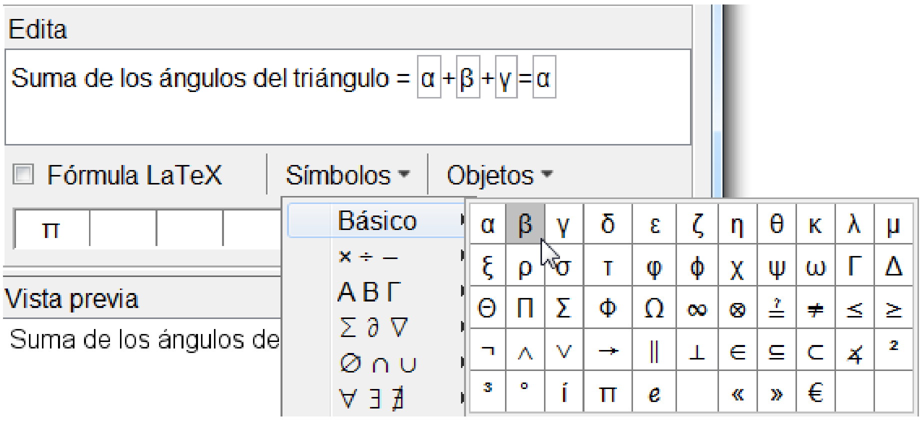
Continuamos escribiendo + β + ϒ =, seleccionado los ángulos β y ϒ en Objeto.



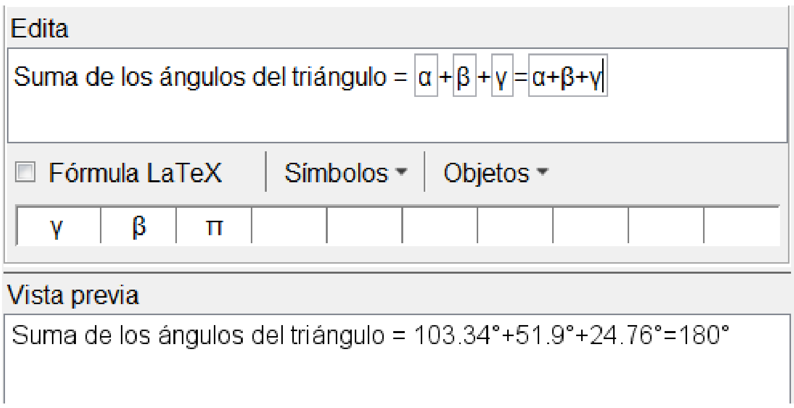
Para obtener el valor de la suma, volvemos a seleccionar α en objetos, pulsando sobre el interior de este nuevo rectángulo para que aparezca el curso a continuación del α, como aparece en la imagen siguiente:



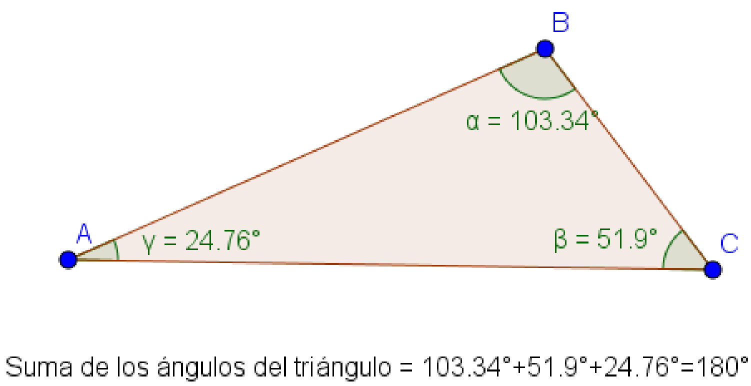
A continuación escribimos la operación que deseamos obtener que será +β+ϒ, todo dentro del último rectángulo. Para escribir β y ϒ abrimos el desplegable Símbolos.



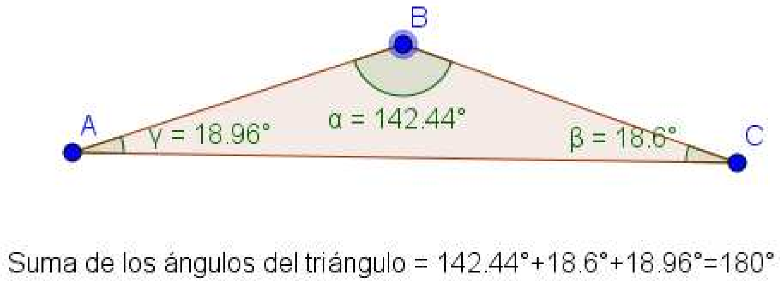
Tendremos algo parecido a la imagen siguiente en la que observamos que en la vista previa aparece la suma de los tres ángulos.



Ya sólo queda pulsar el botón **Ok** para que el texto aparezca en la vista gráfica.



Al mover los vértices del triángulo los ángulos cambian, por lo que también cambiará el texto, aunque en este caso no cambiará la suma de los tres ángulos.



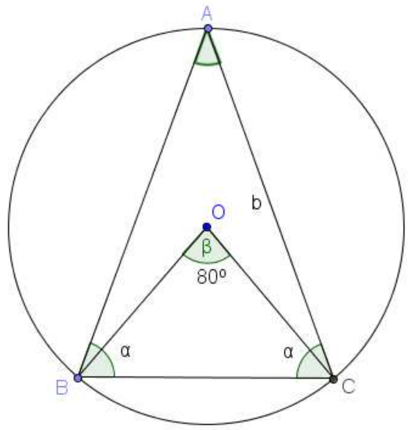
De esta forma podemos insertar un texto dinámico y operar con las medidas de los objetos creados en la construcción.

MEDIDAS DE ÁNGULOS

Actividad 1

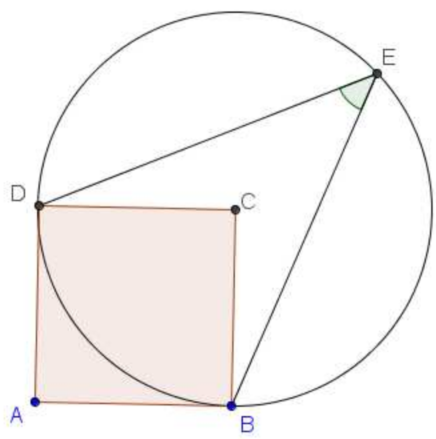
Averigua, con papel y lápiz, el valor del ángulo α sabiendo que el triángulo ABC es un triángulo isósceles.

Comprueba los resultados utilizando las correspondientes opciones para medir los ángulos.



Actividad 2

ABCD es un cuadrado y C es el centro de la circunferencia que aparece en la imagen siguiente:



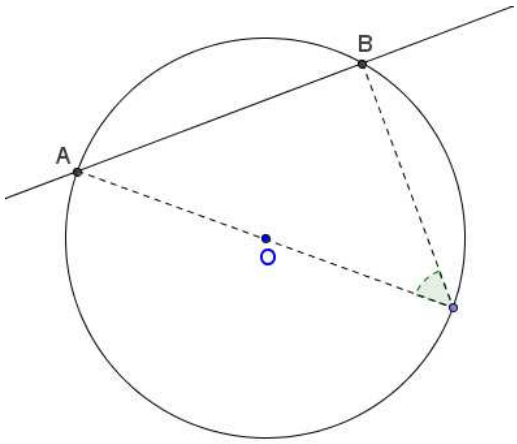
Halla la medida del ángulo inscrito representado en la imagen.

Actividad 3

Al trazar una secante cualquiera a una circunferencia, determina dos arcos.

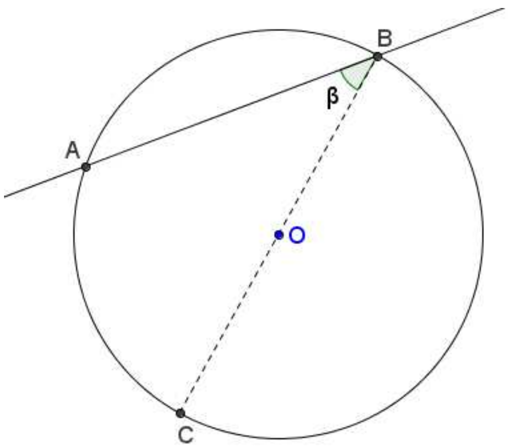
Sea AB uno de esos arcos.

Determina el valor de los ángulos inscritos cuyos lados pasan por los puntos de intersección de la secante con la circunferencia.



Actividad 4

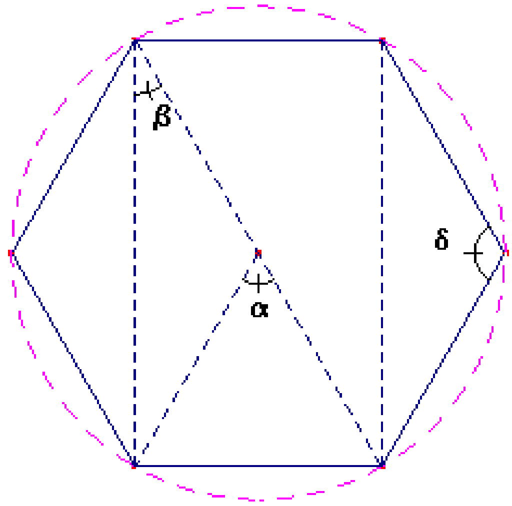
Sea AB uno de los arcos determinados por una secante sobre una circunferencia y β el ángulo determinado por la secante y el diámetro que aparece representado en la figura siguiente:



Intenta determinar en función del valor de AOB, la medida del ángulo β.

ÁNGULOS EN UN POLÍGONO REGULAR

Intenta averiguar cuál es el valor de los ángulos marcados en la figura.



Utiliza las opciones del programa para comprobar tus resultados.

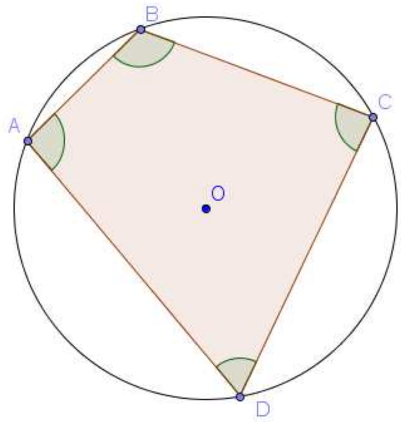
Completa la siguiente tabla:

POLÍGONO REGULAR	α	β	δ
Triángulo equilátero			
Cuadrado			
Pentágono			
Octógono			
Decágono			

Intenta generalizar las medidas de los ángulos anteriores para un polígono regular de n lados.

CUADRILÁTERO INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA

Inscribe un cuadrilátero en una circunferencia y mide cada uno de los ángulos e intenta deducir relaciones entre ellos.



Una vez deducidas las relaciones entre los ángulos, comprueba qué ocurre al mover los distintos vértices del cuadrilátero.

¿Qué pasa cuando la circunferencia cambia de tamaño?

Un cuadrilátero cuyos vértices están sobre una circunferencia se denomina *cuadrilátero cíclico*.

¿Puedes enunciar la propiedad que debe cumplir un cuadrilátero para ser cíclico?

¿De los siguientes cuadriláteros cuáles son cíclicos?

- Trapecio isósceles.
- Rombo.
- Rectángulo.
- Cuadrado.

Actividad 5

Dibuja una circunferencia de centro O y dos cuerdas AB y CD iguales.

A continuación, traza los radios OA, OB, OC, OD y mide los ángulos AOB y COD.

Deduce la relación existente entre los ángulos centrales que corresponden a dos cuerdas iguales.

Actividad 6

Ahora, dibuja en otra circunferencia de centro O, dos cuerdas AB y CD que no sean paralelas y de distinto tamaño.

Dibuja a continuación las rectas perpendiculares a cada una de las cuerdas por el centro de la circunferencia.

Contesta las cuestiones siguientes:

a. ¿Qué tipo de triángulos son AOB y COD?
b. ¿Qué representa la perpendicular anterior en cada uno de los triángulos?
c. ¿Por dónde pasa la perpendicular anterior con respecto a cada una de las bases?

Actividad 7

Sea ABC un triángulo inscrito en una circunferencia de centro O. La altura trazada por el punto A corta a la circunferencia en un punto H. Sea A’ el punto diametralmente opuesto al punto A.

Determina la relación entre los ángulos BAA’ y CAH.

¿Qué ocurre con las bisectrices de los ángulos BCA y AA´H?

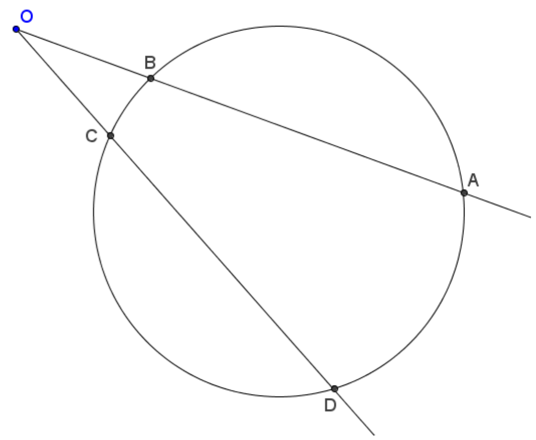
Actividad 8

En un cuadrilátero inscrito en una circunferencia ¿qué relación hay entre los ángulos opuestos?

¿Cuál es la relación entre estos ángulos cuando el cuadrilátero es circunscrito a una circunferencia?

Actividades de investigación

A. El ángulo formado por las tangentes a una circunferencia desde un punto exterior tiene como medida la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.
B. Si dos secantes a una circunferencia parten de un mismo punto exterior a la circunferencia, se cumple la siguiente relación: OA . OB = OC . OD.



Actividad 9

Dibuja un triángulo ABC inscrito en una circunferencia que sea rectángulo en A.

Traza la recta tangente a la circunferencia por el punto B. La bisectriz del ángulo en C corta a la recta AB en un punto P y a la recta tangente en un punto Q.

Comprueba que el triángulo PBQ es isósceles.

Intenta averiguar en qué condiciones será un triángulo equilátero.

Actividad 10

Un arco AB de una circunferencia se divide en dos partes iguales por el punto C.

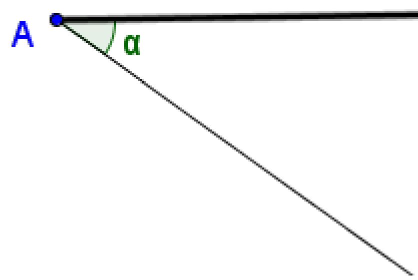
Desde el punto C se trazan las cuerdas CD y CE que cortan a AB en los puntos F y G, respectivamente.

Comprueba la relación existente entre los ángulos opuestos del cuadrilátero FGED.

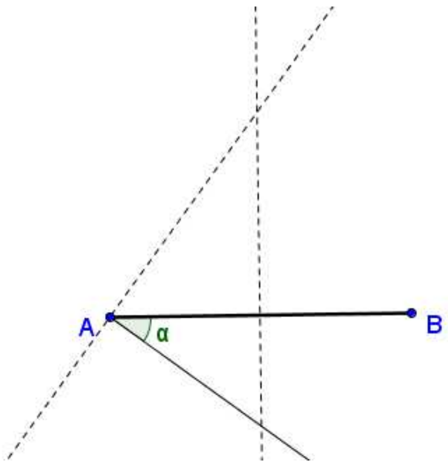
ARCO CAPAZ

El arco capaz de un segmento, para un ángulo dado, es el lugar geométrico de los puntos del plano desde los que el segmento se ve bajo el mismo ángulo.

A partir de un segmento AB y de un ángulo α vamos a obtener el arco capaz.

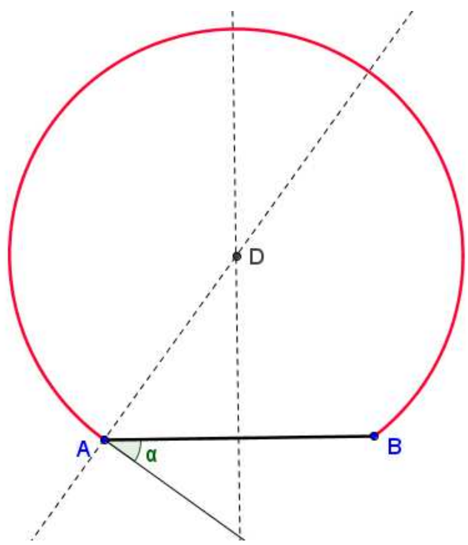


Trazamos la mediatriz del segmento AB y la recta perpendicular a la semirrecta que determina el ángulo α.

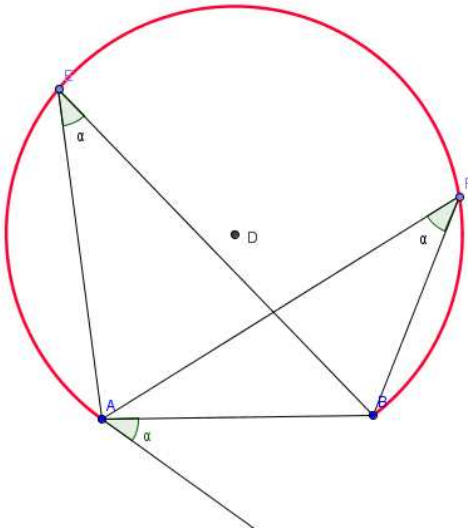


Sea D el punto de intersección de las dos rectas anteriores.

El arco capaz del segmento AB para el ángulo α es el arco trazado con centro en D que tiene por extremos los puntos A y B.



Podemos comprobar que todos los ángulos inscritos cuyo vértice esté sobre este arco, cuyos extremos sean A y B son de la misma medida e iguales a α.



Actividad 11

Intenta determinar cuál es el arco capaz para un segmento cualquiera y un ángulo recto.

La construcción del arco capaz se utiliza para resolver problemas como el enunciado a continuación.

Actividad 12

Desde un barco se divisan dos faros A y B formando un ángulo α y las posiciones del faro B y otro punto de la costa C se divisan con un ángulo β.

A partir de estos datos, con ayuda del arco capaz se puede determinar la posición del barco.

Resolver este problema cuando $\alpha=75^{o}$ y $\beta=45^{o}$.