Het begrip afgeleide

www.karelappeltans.be

March 26, 2025

1 Herhaling rico van een rechte

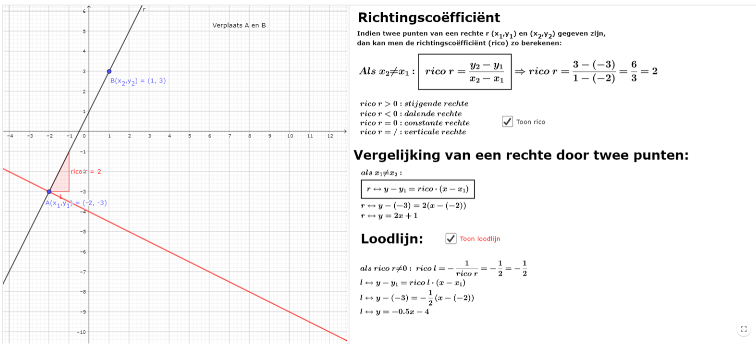


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/V6dh2XPP

2 Gemiddelde verandering over een interval

2.1 Begripsvorming

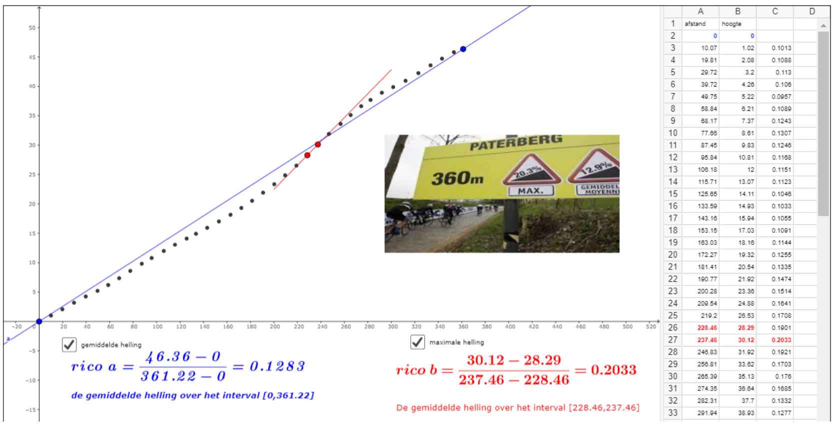


Figure 2: https://www.geogebra.org/m/Bt3aCMHz

2.2 Differentiequotiënt

De gemiddelde verandering of differentiequotiënt van een continue functie f over het interval [a,b]:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

M.a.w. dit is de rico van de rechte door de punten $P(a, f(a))$ en $Q(b, f(b))$

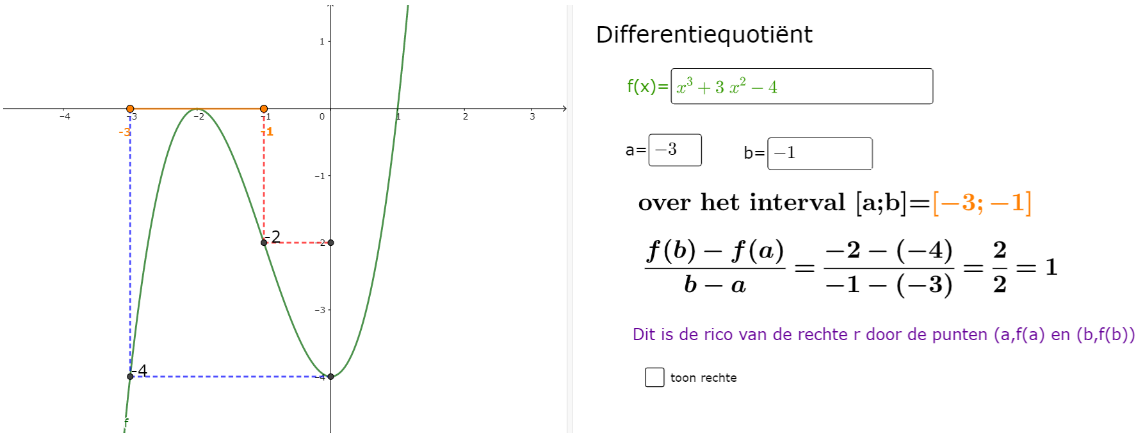


Figure 3: https://www.geogebra.org/m/Bt3aCMHz

3 Ogenblikkelijke verandering in een punt

3.1 Definitie afgeleide in een punt

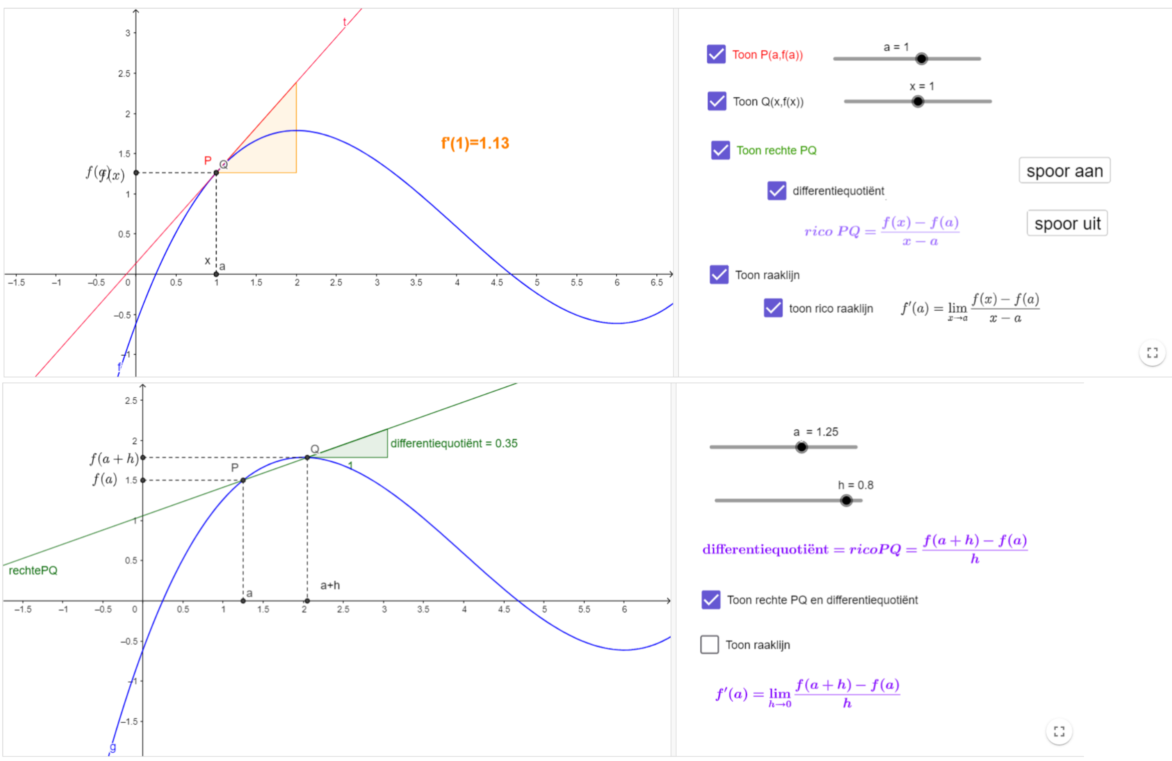


Figure 4: https://www.geogebra.org/m/NGkF3XS6

3.2 Berekening f'(a) met behulp van definitie

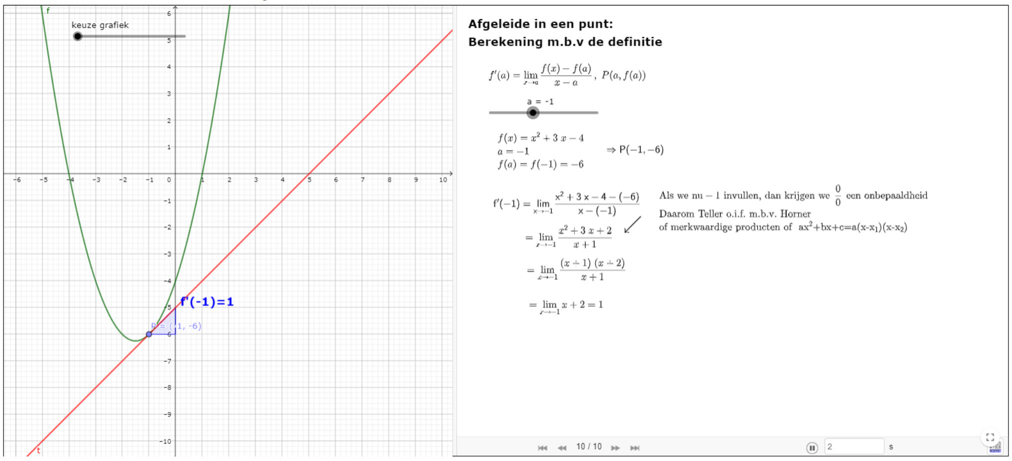


Figure 5: https://www.geogebra.org/m/NGkF3XS6

4 Rekenregel voor $x^n, n \in \mathbb{Q}$

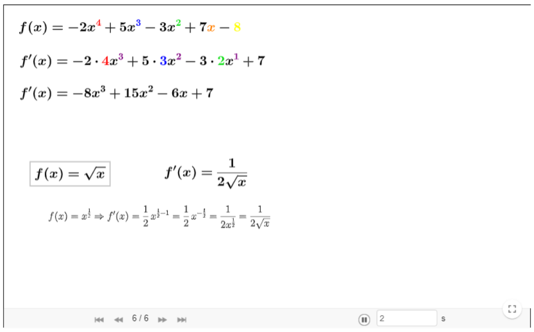


Figure 6: https://www.geogebra.org/m/zdynkwv5

5 Alternatieve notaties

Voorbeeld: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

Notatie 1: $f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 4)' = 3x^2 + 6x$
Notatie 2: $Df(x) = D(x^3 + 3x^2 - 4) = 3x^2 + 6x$
Notatie 3: $\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{d(x^3 + 3x^2 - 4)}{dx} = 3x^2 + 6x$
Notatie 4: $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x$

6 Vergelijking raaklijn

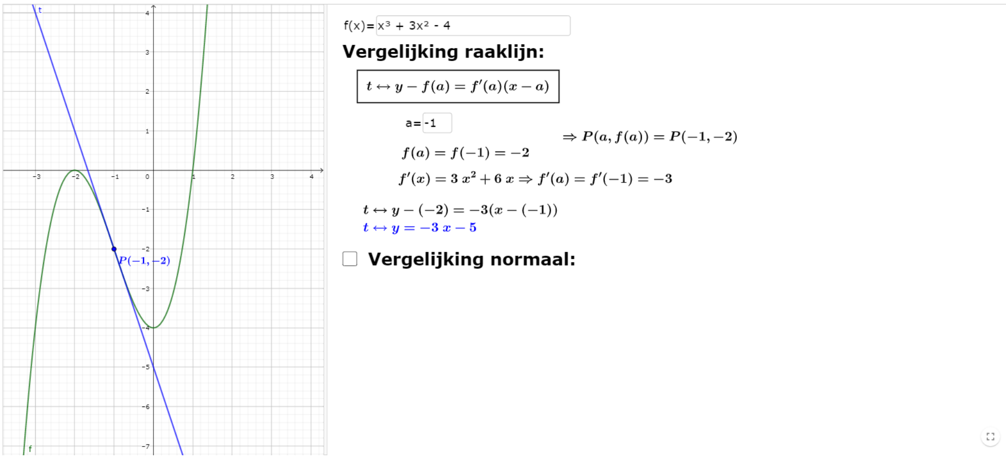


Figure 7: https://www.geogebra.org/m/EscjM2Rh

7 Toepassingen op raaklijn

7.1 Lineaire benadering

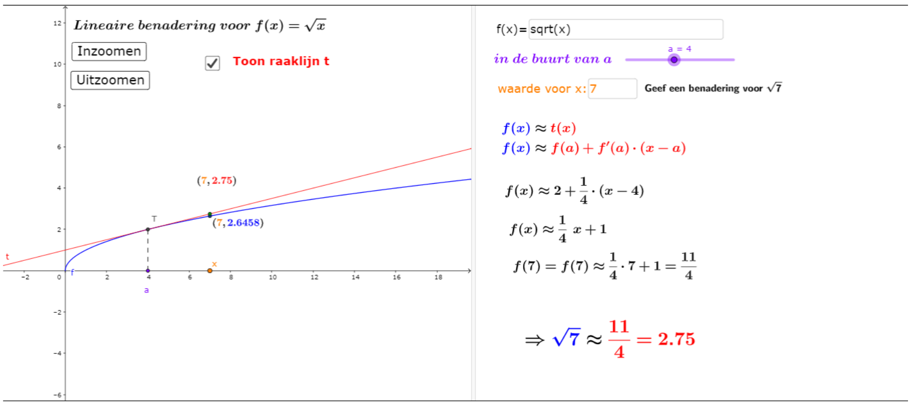


Figure 8: https://www.geogebra.org/m/NwZHM6eQ

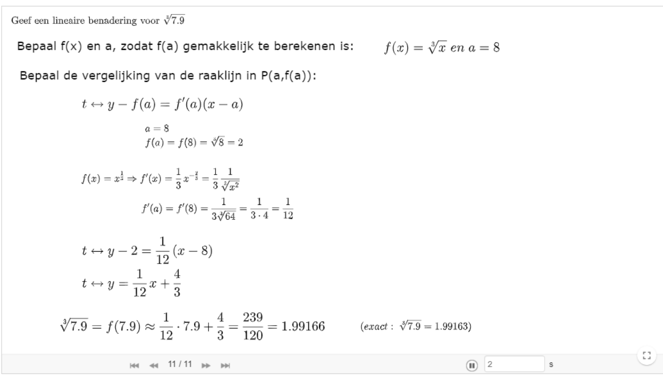


Figure 9: https://www.geogebra.org/m/NwZHM6eQ

7.2 Fouten propagatie

Er wordt een fout gemeten, in zeg bijvoorbeeld de zijde van een vierkant. Op welke manier zet deze fout zich door in de berekening van de oppervlakte en hoe kunnen we afschatting bekomen voor deze foutdoorzetting?

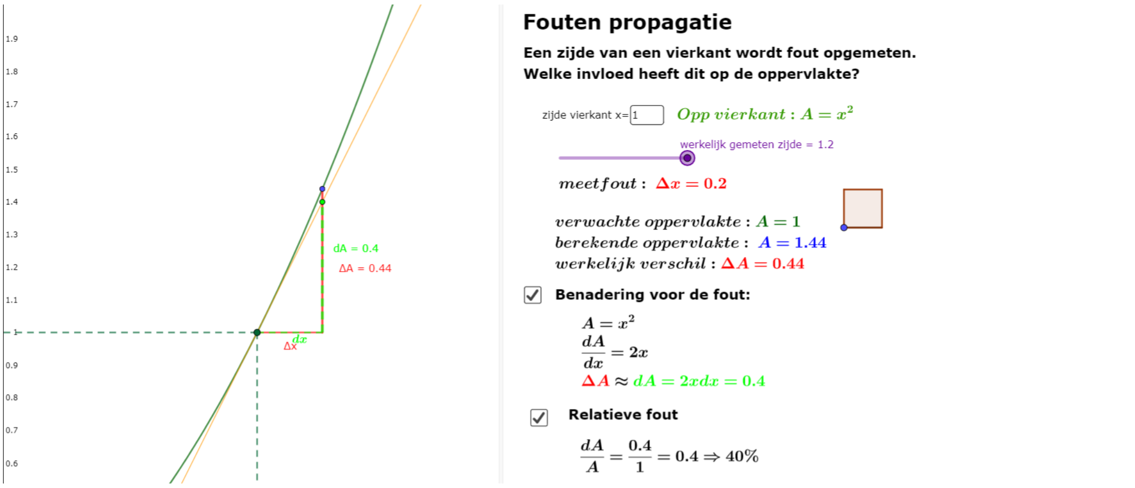


Figure 10: https://www.geogebra.org/m/NwZHM6eQ

7.3 Methode van Newton Raphson

Deze methode kan gebruikt worden om nulpunten van een functie iteratief te bepalen.

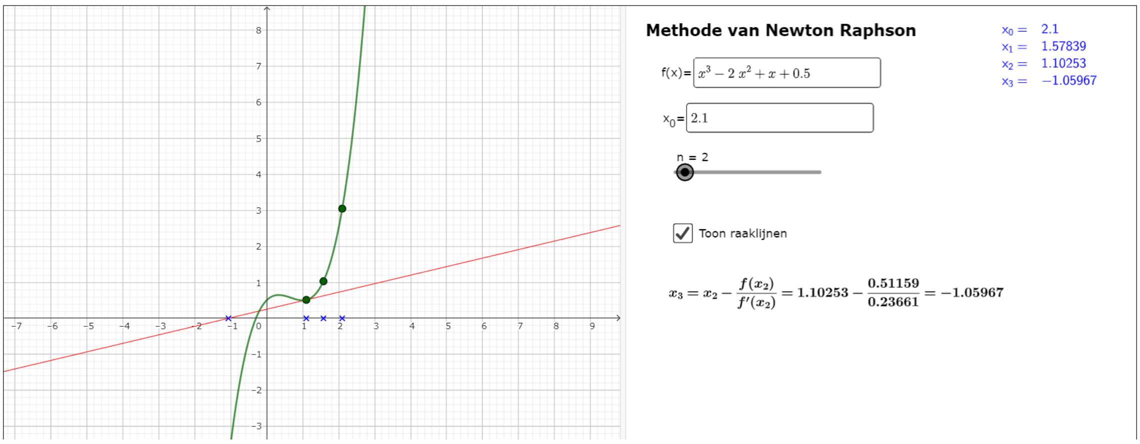


Figure 11: https://www.geogebra.org/m/TGBSbRyf

7.4 Economische toepassing: het begrip marginaliteit

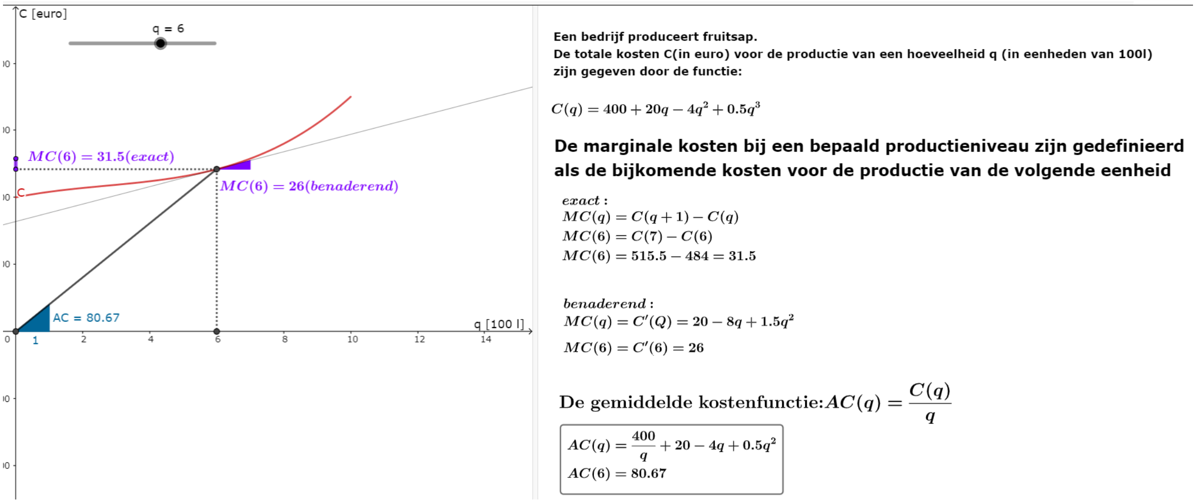


Figure 12: https://www.geogebra.org/m/qVhQfWrd

8 Afgeleide functie of hellingsfunctie

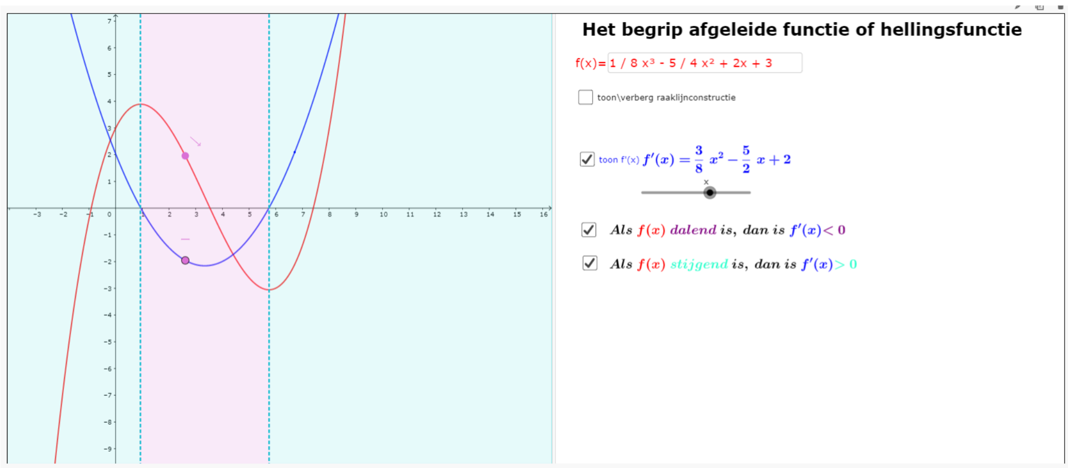


Figure 13: https://www.geogebra.org/m/dWqwC5qd

9 Tweede afgeleide

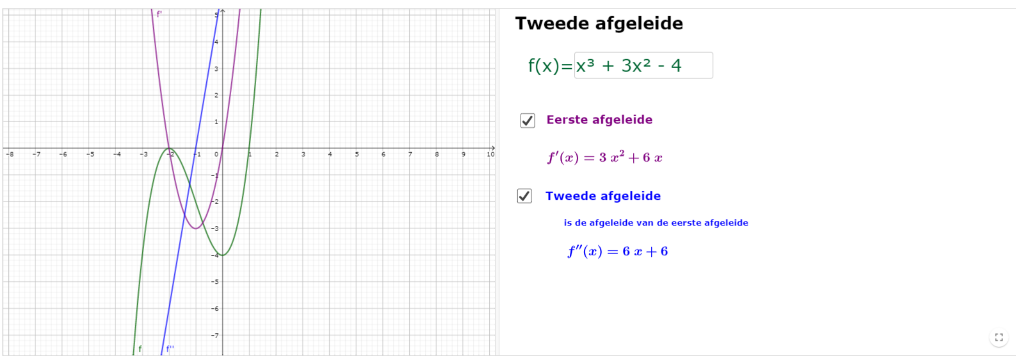


Figure 14: https://www.geogebra.org/m/qt9vwxqv

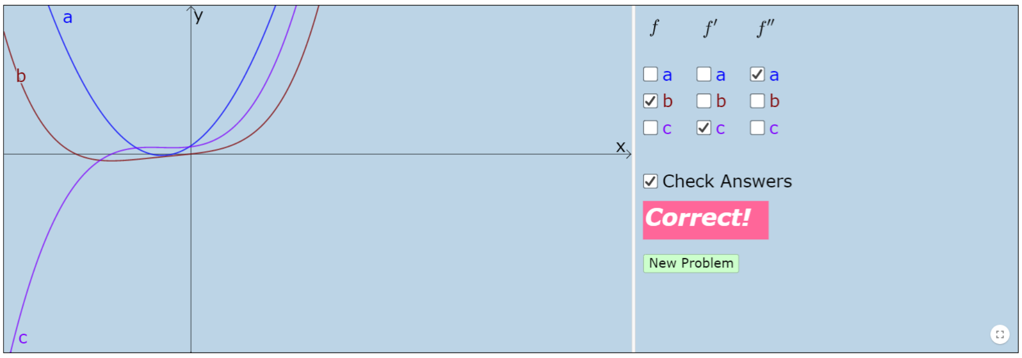


Figure 15: https://www.geogebra.org/m/qt9vwxqv

10 Toepassingen uit de fysica

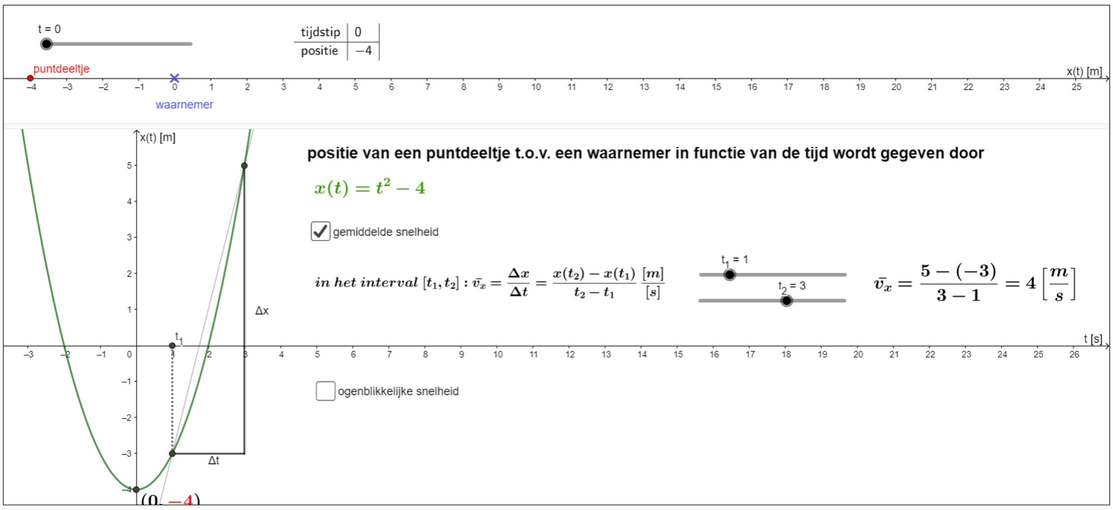


Figure 16: https://www.geogebra.org/m/nsGgY8T3

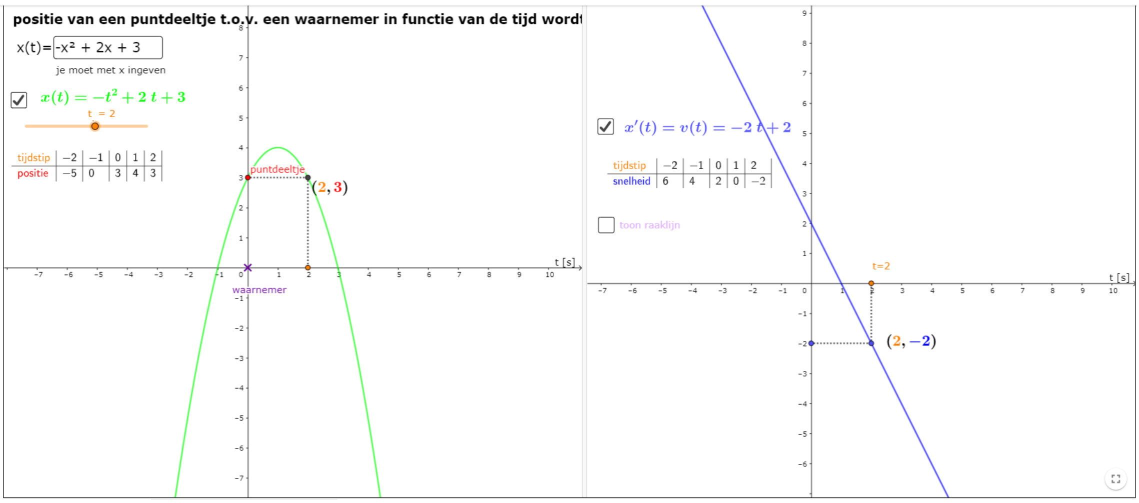


Figure 17: https://www.geogebra.org/m/nsGgY8T3

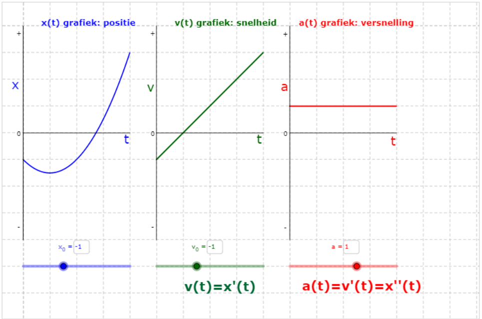


Figure 18: https://www.geogebra.org/m/nsGgY8T3

11 Niet alle functies zijn overal afleidbaar

11.1 Verticale raaklijn

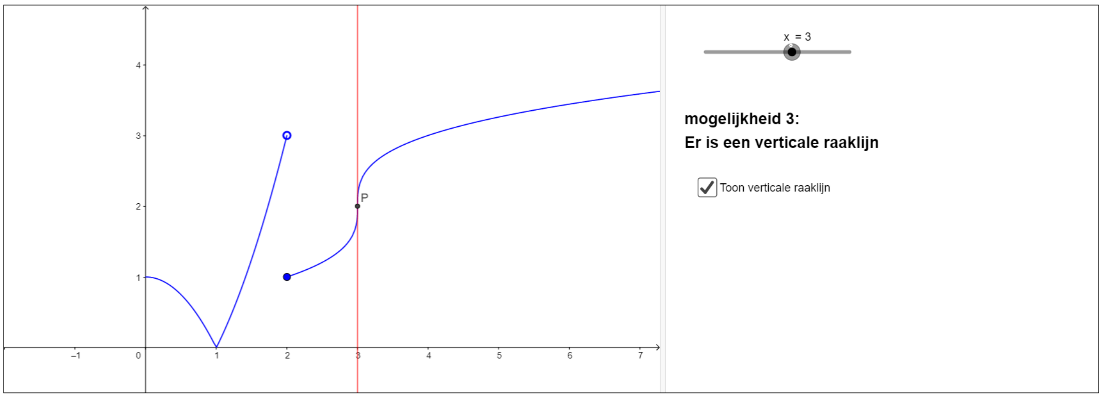


Figure 19: https://www.geogebra.org/m/qfSuH6rn

11.2 Linkerafgeleide is verschillend van rechterafgeleide

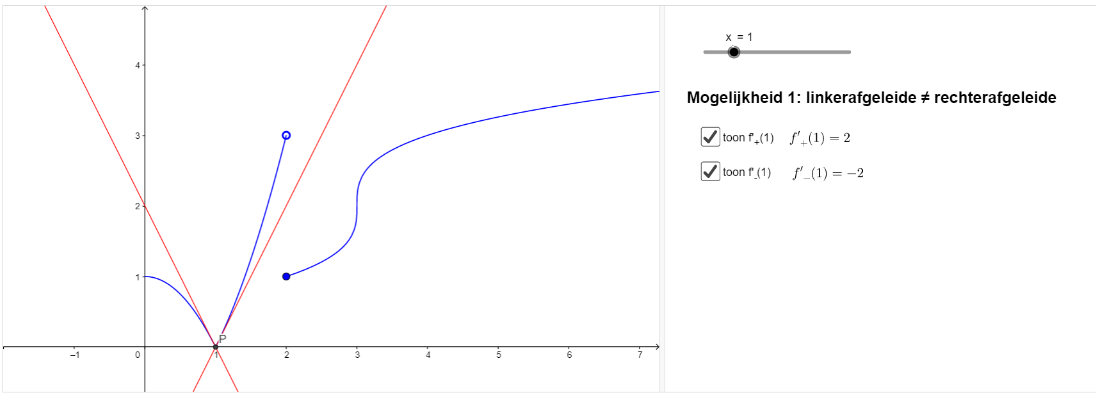


Figure 20: https://www.geogebra.org/m/qfSuH6rn

11.3 Niet continu

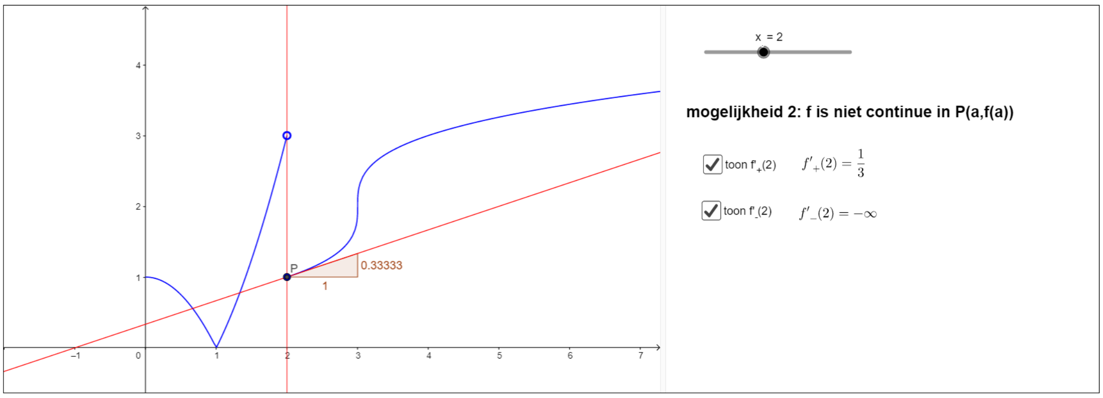


Figure 21: https://www.geogebra.org/m/qfSuH6rn

11.4 Voorbeelden

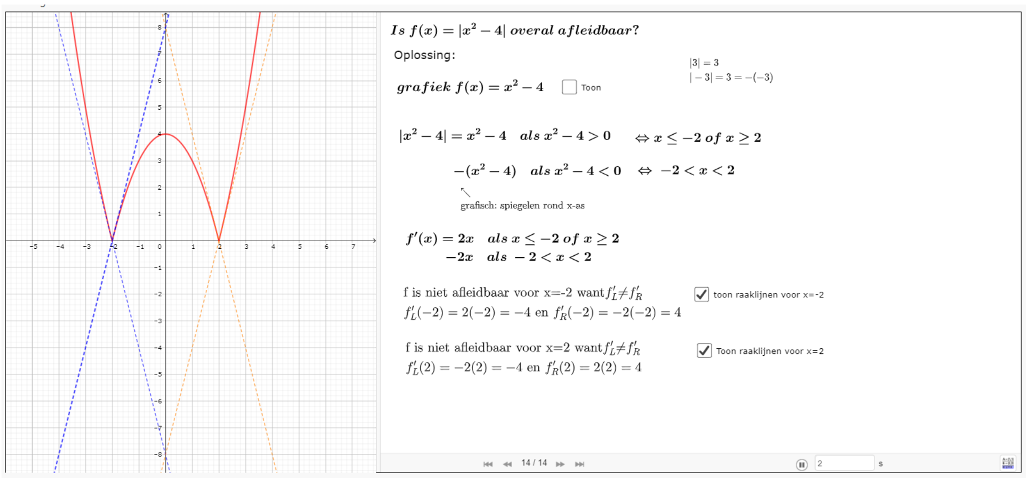


Figure 22: https://www.geogebra.org/m/qfSuH6rn

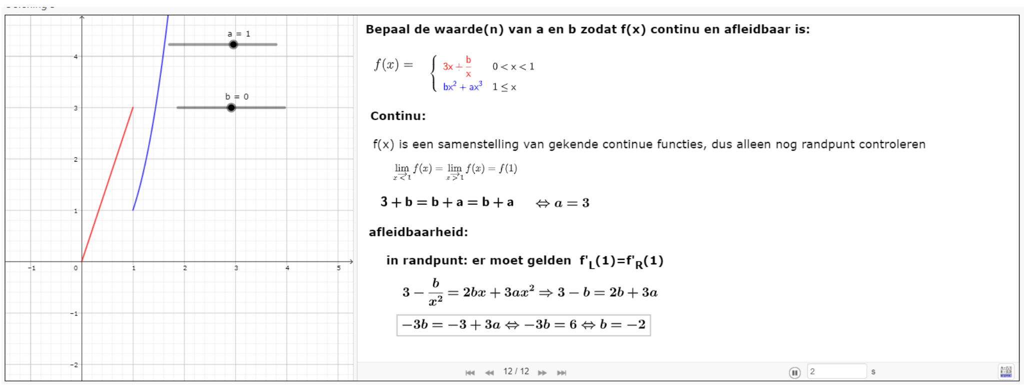


Figure 23: https://www.geogebra.org/m/qfSuH6rn

12 Continuïteit en afgeleide

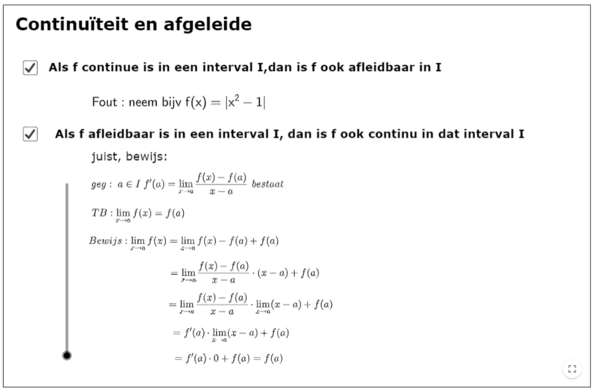
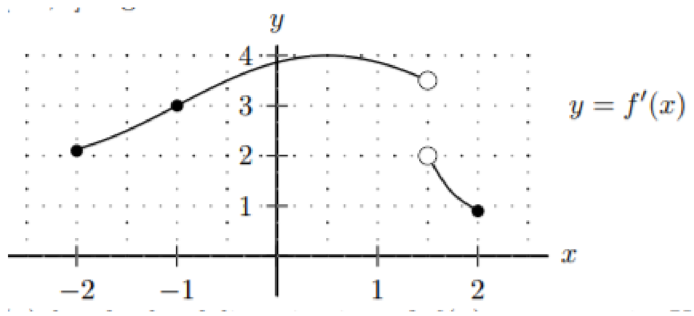


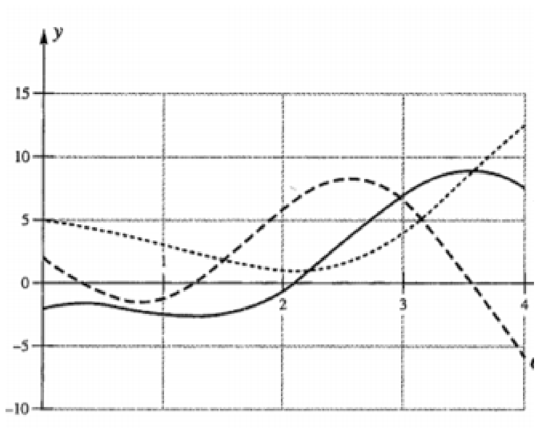
Figure 24: https://www.geogebra.org/m/xqp6dj2p

13 Oefeningen

1. Bereken m.b.v. de definitie de afgeleide in de aangegeven punten
   (a) $f(x) = -x^2 + 3x - 4,\ P(1, f(1))$
   (b) $f(x) = \sqrt{2x - 4},\ P(10, f(10))$
   (c) $f(x) = \frac{3}{x+1},\ P(-2, f(-2))$
2. Bereken de afgeleide van onderstaande functies m.b.v. de rekenregel
   (a) $g(x) = 10x^5 - 7x^3 + 4x^-6$
   (b) $x(t) = 4t^3 - 3t^2 + 5t - 7$
   (c) $f(x) = x \cdot \sqrt{x} + 4x^5 - 8x + 9$
3. Bereken de vergelijking van de raaklijn in het gegeven punt
   (a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 7,\ a = -2$
   (b) $f(x) = x^3 + 2\sqrt{x},\ a = 1$
   (c) $f(x) = \sqrt{x},\ a = 9$
   (d) $f(x) = \frac{1}{x},\ a = -1$
4. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan $f(x) = x^2$ die ook door het punt $Q(3, 8)$ gaat.
5. Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen aan $f(x) = 2x^2$ die door het punt $P(2, -10)$ gaan. (A. $y = -4x + 2, y = 20x - 50$)
6. Bepaal de rico van de raaklijn aan $y = \sqrt{x}$ die de x-as snijdt in $P(-1, 0)$
7. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan $y = x\sqrt{x}$ die evenwijdig is met de rechte $y = 3x + 1$
8. Geef een lineaire benadering voor:
   (a) $\sqrt{4.05}$
   (b) $\sqrt[3]{8.4}$
   (c) $\sqrt{16{,}03}$ met behulp van $f(x) = \sqrt{x + 9}$
9. Gegeven is de grafiek van f'(x). Gebruik deze samen met het feit dat $f(-1) = 4$ om een lineaire benadering te geven voor $f(-0.5)$

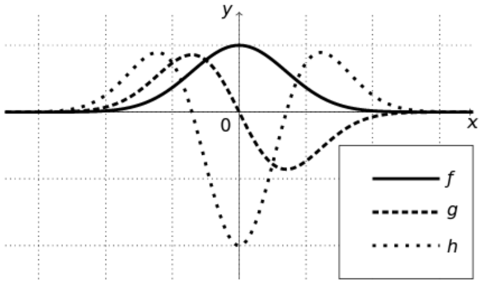


10. Geef een afschatting voor de absolute en relatieve fout
    (a) van de inhoud van een kubus als een zijde $30cm$ gemeten wordt, met een foutenmarge van 0.1 cm.
    (b) van de opp van een cirkel met een gemeten straal van 1 m, met een mogelijke foutmarge van $0.04m$. (A. absolute fout 0.08π)
11. Ga na voor welke x-waarden volgende functies niet afleidbaar zijn:
    (a) $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$
    (b) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$
    (c) $f(x) = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$
    (d) $f(x) = |x^2 - x|$
12. Voor hoeveel waarden van x, met $x \in [0,2]$ is $f(x) = |x - \frac{1}{2}| + |x-1| + \tan(x)$ niet afleidbaar?
13. Bepaal de waarde(n) van de parameters zodat volgende functies met meervoudig voorschrift in hun domein continu en afleidbaar zijn:
    (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - a & x < 1 \\ -x^2 + bx + 2 & x \geq 1 \end{cases}$
    (b) $f(x) = \begin{cases} 3x + \frac{B}{x} & 0 < x < 1 \\ Bx^2 + Ax^3 & 1 \geq x \end{cases}$
    (c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \leq k \\ x^2 - 2ax + a^2 + 2 & x > k \end{cases}$
    (d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - a & x < 1 \\ -x^2 + bx + 2 & x \geq 1 \end{cases}$
    (e) $f(x) = \begin{cases} 3x + \frac{B}{x} & 0 < x < 1 \\ Bx^2 + Ax^3 & 1 \geq x \end{cases}$
14. Bepaal in elke grafiek $f(x), f'(x)$ en $f"(x)$



(a)

De onderstaande figuur toont de grafiek van drie verschillende reële functies f, g en h. Eén van onderstaande verbanden is geldig, welk?



(A) $f = g' = h''$

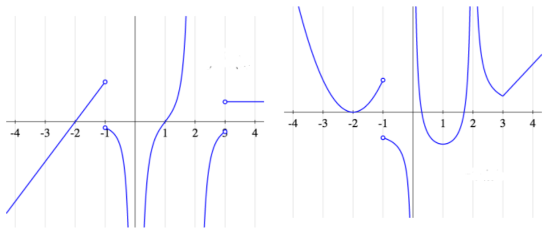
(B) $f = h' = g''$

(C) $h = f' = g''$

(D) $h = g' = f''$

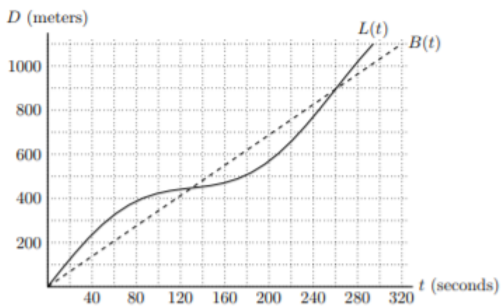
(b)

15. Gegeven zijn de grafieken van een functie en haar afgeleide functie. Wie is wie? Verklaar jullie antwoord.



16. Beantwoord onderstaande vragen

6. [11 points] Link and Boots decided to have a race down a straight portion of Pauline Boulevard that is 1.1 kilometers long. Let $L(t)$ and $B(t)$ be Link's and Boots's respective distances from their starting point t seconds after the race began. A graph of $L(t)$ and $B(t)$ is shown below.



a. [1 point] Who won the race? (Circle your answer.)

Link Boots

b. [2 points] Estimate the times at which Link and Boots were running at the same speed.

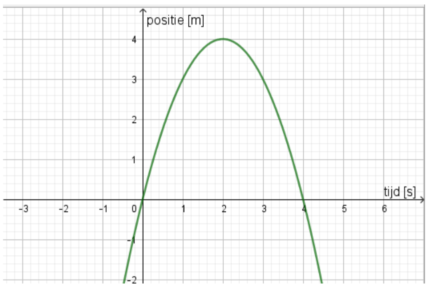
c. [3 points] Estimate Link's average velocity over the first 100 seconds of the race. Include units.

d. [3 points] Estimate Link's instantaneous velocity 40 seconds after the race began. Include units.

e. [2 points] 160 seconds after the race began, is Link's acceleration positive, negative, or equal to zero? (Circle your answer.)

positive negative zero

17. Gegeven is onderstaande $x(t) - grafiek$:



De versnelling is het grootst op

(a) $t = 2$ s

(b) $t = 0$ s

(c) $t = 0$ en $t = 4$ s

(d) overal even groot

18. Gegeven $x(t) = t^2 - 3t + 4$

(a) Bepaal de gemiddelde snelheid in het interval $[1, 3]$

(b) Bepaal de ogenblikkelijke snelheid voor $t = 2$

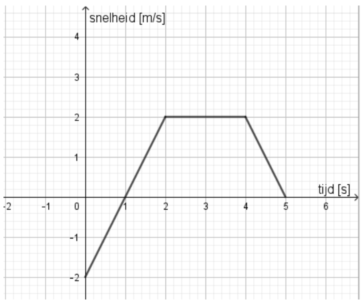
19. Gegeven $x(t) = t - t^2, 0 \leq t \leq 5$

(a) Waar bevindt zich dit puntdeeltje na 2 sec t.o.v. een waarnemer in de oorsprong?

(b) Bepaal de gemiddelde snelheid in het interval $[0, 5]$

(c) Bepaal a(3). Wat wordt hiermee bedoelt?

20. Gegeven is onderstaande $v(t) - grafiek$ over het interval $[0, 5]$ Bepaal de $a(t) - grafiek$ in hetzelfde interval.



14 taken

1. definitie afgeleide
2. toepassingen op definitie