

Más problemas sobre cálculo de áreas

CURSO **TEMA**

2ºBach Integrales
CCSS

WWW.DANIPARTAL.NET

Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

PROBLEMA 1

Represente el recinto acotado, limitado por la recta $y = -x + 3$ y la parábola $y = -x^2 + 5$.

La recta se dibuja obteniendo dos puntos.

$$x = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow A(0,3)$$

$$x = 3 \rightarrow y = 0 \rightarrow B(3,0)$$

La parábola cóncava es un desplazamiento vertical de la gráfica de $y = -x^2$.

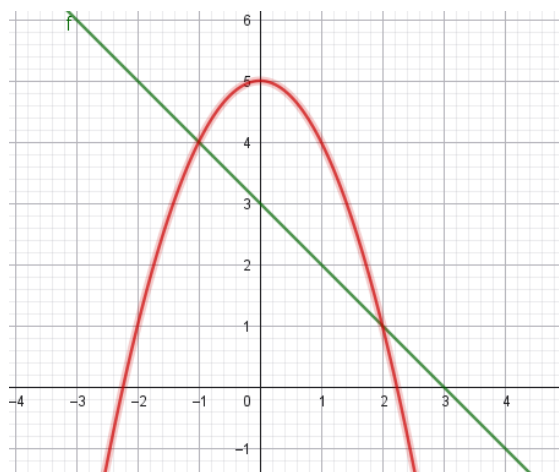
Los cortes entre las gráficas se obtienen igualando las fórmulas de las funciones:

$$-x + 3 = -x^2 + 5$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = -1, x = 2$$

La imagen de los puntos de corte se obtiene sustituyendo en cualquiera de las dos funciones:

$$C(-1, 4) \text{ y } D(2, 1)$$



En la gráfica observamos como en el recinto cerrado, en el intervalo $[-1, 2]$, la parábola queda por encima de la recta. Por lo que el área se obtiene mediante la integral definida:

$$\text{Área} = \int_{x=-1}^{x=2} [(-x^2 + 5) - (-x + 3)] dx$$

$$\text{Área} = \int_{x=-1}^{x=2} [-x^2 + x + 2] dx$$

Aplicamos regla de Barrow:

$$\text{Área} = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 = \left[\left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) \right] = \left[\frac{-16}{6} + \frac{12}{6} + \frac{24}{6} \right] - \left[\frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{12}{6} \right] = \frac{20}{6} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6} u^2$$

PROBLEMA 2

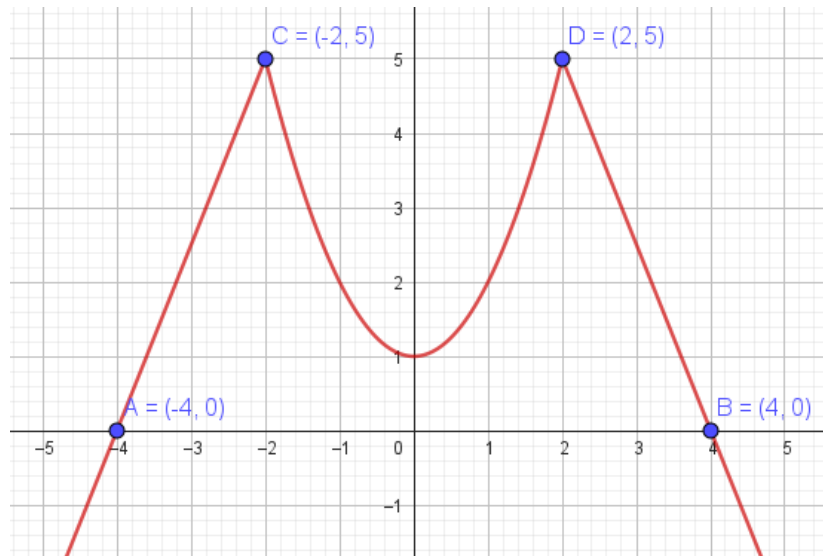
Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 10 + \frac{5x}{2} & x \leq -2 \\ x^2 + 1 & -2 < x < 2 \\ 10 - \frac{5x}{2} & x \geq 2 \end{cases}$$

y represente la región del plano acotada superiormente por la gráfica de f e inferiormente por el eje de abscisas. Calcular el área de esa región.

En el Tema 1 de Mates CCSS de 2ºBach, apartado 11, pdf de problemas 11b, ejercicio 2, aparece el estudio de esta función para conocer su continuidad, su derivabilidad y para representar su gráfica.

Por lo tanto, remito a ese ejercicio para comprender cómo trazar la gráfica siguiente.



El área encerrada por la gráfica de la función con el eje horizontal en el intervalo $[-4, 4]$ es simétrica respecto al eje vertical. Por lo que podemos calcularla como el doble del área encerrada en el intervalo $[0, 4]$.

Como la gráfica está por encima del eje horizontal, podemos afirmar:

$$\text{Área} = 2 \cdot \int_0^4 f(x) dx$$

Nuestra función a trozos tiene una fórmula en el tramo $[0, 2]$ y otra fórmula en el intervalo $[2, 4]$.

$$\text{Área} = 2 \cdot \left[\int_0^2 (x^2 + 1) dx + \int_2^4 \left(10 - \frac{5x}{2}\right) dx \right]$$

Aplicamos la regla de Barrow.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^2 + 2 \cdot \left[10x - \frac{5x^2}{4} \right]_2^4 \\ \text{Área} &= 2 \cdot \left[\left(\frac{8}{3} + 2 \right) - \left(\frac{0}{3} + 0 \right) \right] + 2 \cdot \left[\left(10 \cdot 4 - \frac{5 \cdot 16}{4} \right) - \left(10 \cdot 2 - \frac{5 \cdot 4}{4} \right) \right] \\ \text{Área} &= \frac{28}{3} + 10 = \frac{58}{3} u^2 \end{aligned}$$

PROBLEMA 3

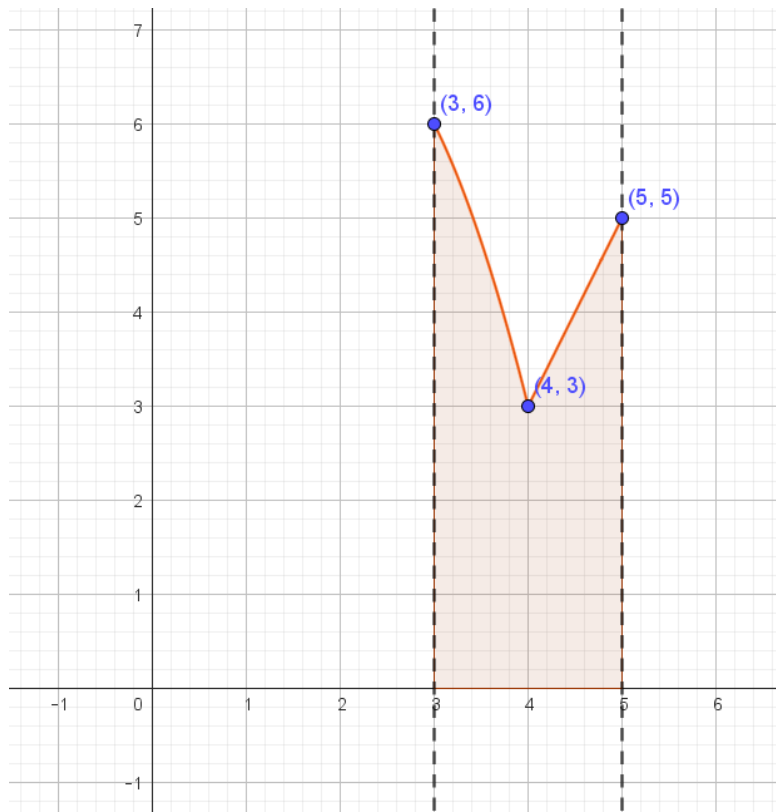
Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x + 3 & \text{si } x < 4 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

y represente la región del plano limitada por la gráfica de la función, las rectas $x = 3$, $x = 5$ y el eje de abscisas. Calcule el área de esa región.

En el Tema 1 de Mates CCSS de 2º Bach, apartado 13, pdf de problemas, ejercicio 1, aparece el estudio de esta función para conocer su continuidad, su derivabilidad y para representar su gráfica.

Por lo tanto, remito a ese ejercicio para comprender cómo trazar la gráfica siguiente.



Como la gráfica está por encima del eje horizontal, podemos afirmar:

$$\text{Área} = \int_3^5 f(x) dx$$

Nuestra función a trozos tiene una fórmula en el tramo $[3,4]$ y otra fórmula en el intervalo $[4,5]$.

$$\text{Área} = \int_3^4 (-x^2 + 4x + 3) dx + \int_4^5 (2x - 5) dx$$

Aplicamos la regla de Barrow.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left[-\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 3x \right]_3^4 + [x^2 - 5x]_4^5 \\ \text{Área} &= \left[\left(-\frac{64}{3} + 4 \cdot \frac{16}{2} + 3 \cdot 4 \right) - \left(-\frac{27}{3} + 4 \cdot \frac{9}{2} + 3 \cdot 3 \right) \right] + [(25 - 25) - (16 - 20)] \\ \text{Área} &= \frac{14}{3} + 4 = \frac{26}{3} \end{aligned}$$

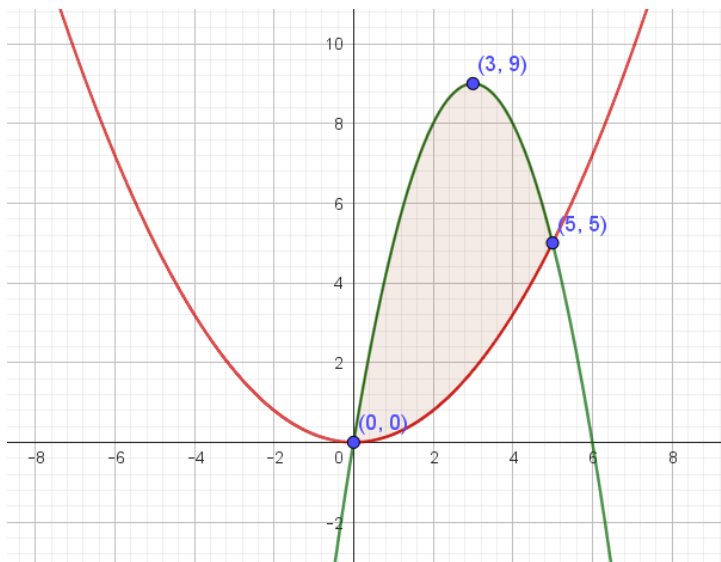
PROBLEMA 4

La superficie de ampliación de un parque de atracciones, en decímetros cuadrados, coincide con el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 6x$ y $g(x) = \frac{x^2}{5}$.

Represente gráficamente la superficie de ampliación del parque de atracciones y calcule su área.

En el Tema 1 de Mates CCSS de 2ºBach, apartado 13, pdf de problemas, ejercicio 2, aparece el estudio de esta función para conocer su continuidad, su derivabilidad y para representar su gráfica.

Por lo tanto, remito a ese ejercicio para comprender cómo trazar la gráfica siguiente.



En el área encerrada por dos curvas, podemos aplicar la regla de Barrow entre la gráfica de la curva superior menos la gráfica de la curva inferior. Es decir:

$$\text{Área} = \int_0^5 \left[(-x^2 + 6x) - \frac{x^2}{5} \right] dx = \int_0^5 \left(-\frac{6}{5}x^2 + 6x \right) dx$$

$$\text{Área} = \left[-\frac{6}{5} \cdot \frac{x^3}{3} + 6 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \left[-\frac{2x^3}{5} + 3x^2 \right]_0^5$$

$$\text{Área} = \left(-\frac{250}{5} + 3 \cdot 25 \right) - (-0 + 0) = 25 \text{ u}^2$$

PROBLEMA 5

Sean las funciones:

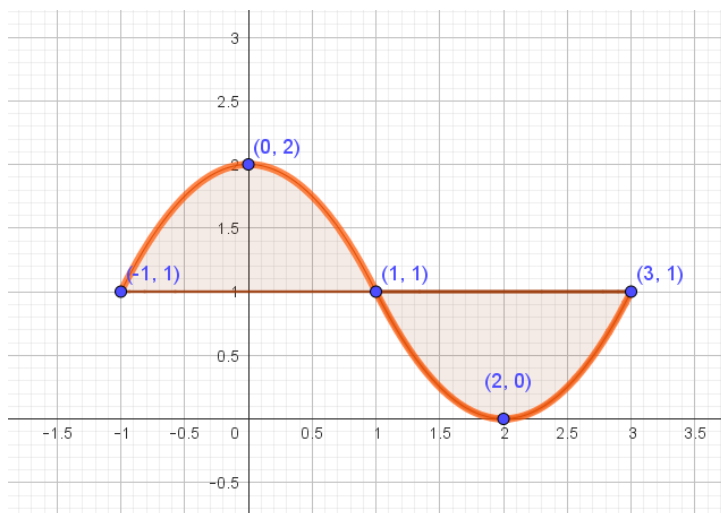
$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$g(x) = 1 \text{ si } -1 \leq x \leq 3$$

Represente el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones. Calcule el área de esa región.

En el Tema 1 de Mates CCSS de 2ºBach, apartado 13, pdf de problemas, ejercicio 3, aparece el estudio de esta función para conocer su continuidad, su derivabilidad y para representar su gráfica.

Por lo tanto, remito a ese ejercicio para comprender cómo trazar la gráfica siguiente.



El área encerrada entre ambas gráficas es simétrica respecto al valor de abscisa $x = 1$. Por lo tanto, podemos calcularla como dos veces el área encerrada en el intervalo $[1, 3]$.

$$\text{Área} = 2 \cdot \int_1^3 [1 - (x-2)^2] dx$$

Donde hemos tenido en cuenta que en el intervalo $[1, 3]$ la gráfica de la recta está por encima de la gráfica de la parábola.

Aplicamos la regla de Barrow:

$$\text{Área} = \left[x - \frac{(x-2)^3}{3} \right]_1^3 = \left(3 - \frac{1}{3} \right) - \left(1 - \frac{-1}{3} \right) = 3 - \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

PROBLEMA 6

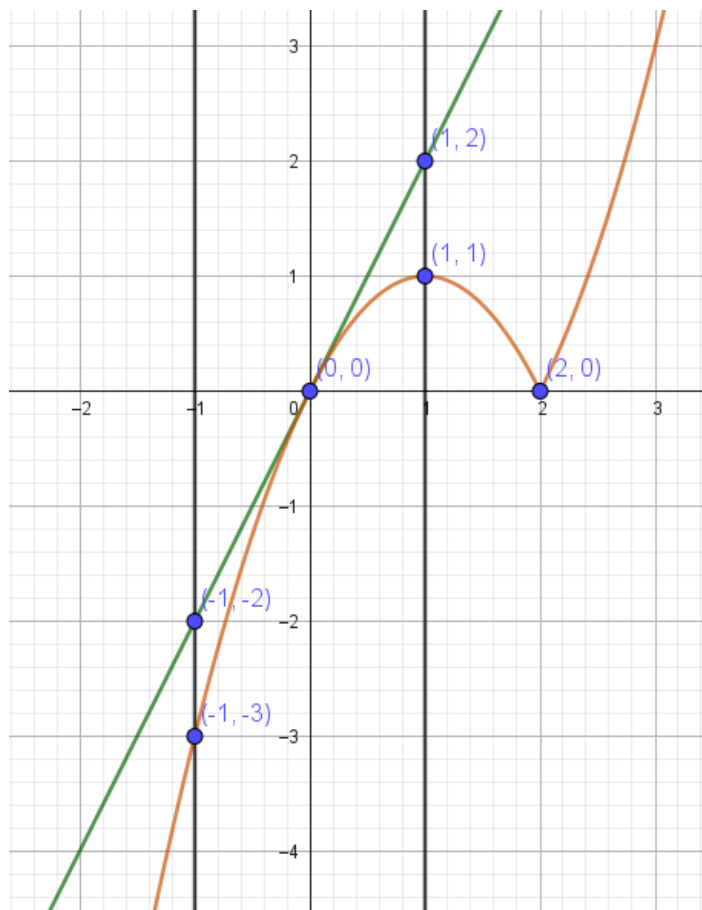
Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Represente el recinto limitado por las rectas $y = 2x$, $x = -1$, $x = 1$ y la gráfica de la función. Calcule el área del recinto.

En el Tema 1 de Mates CCSS de 2ºBach, apartado 13, pdf de problemas, ejercicio 5, aparece el estudio de esta función para conocer su continuidad, su derivabilidad y para representar su gráfica.

Por lo tanto, remito a ese ejercicio para comprender cómo trazar la gráfica siguiente.



En el intervalo $[-1, 1]$ la gráfica de la recta $y = 2x$ permanece por encima de la parábola, salvo en el punto $x = 0$ donde ambas gráficas se cortan. Por lo tanto:

$$\text{Área} = \int_{-1}^1 [2x - (-x^2 + 2x)] dx = \int_{-1}^1 x^2 dx$$

Aplicamos la regla de Barrow:

$$\text{Área} = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{2}{3} u^2$$

PROBLEMA 7

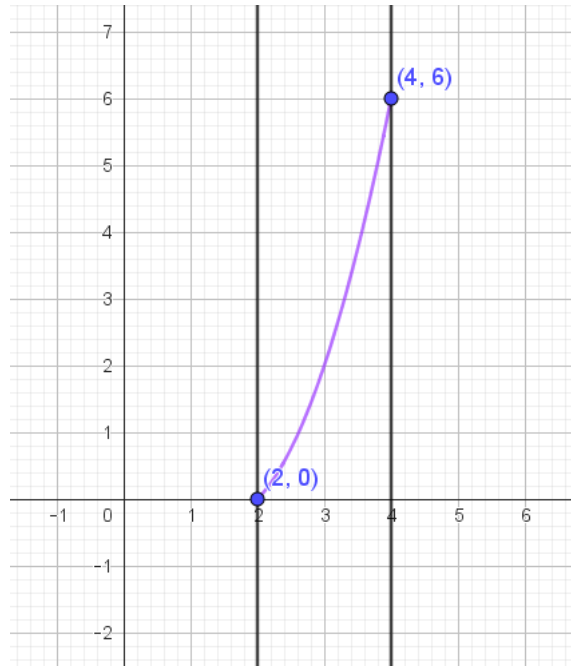
Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3 + e^x & \text{si } x < 1 \\ x^2 + ax + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Para $a = -3$, represente la región limitada por la gráfica de la función, las rectas $x = 2$, $x = 4$ y el eje de abscisas. Calcule el área de la región.

En el Tema 1 de Mates CCSS de 2ºBach, apartado 13, pdf de problemas, ejercicio 6, aparece el estudio de esta función para conocer su continuidad, su derivabilidad y para representar su gráfica.

Por lo tanto, remito a ese ejercicio para comprender cómo trazar la gráfica siguiente.



El área encerrada entre la parábola, las rectas verticales y el eje horizontal se obtiene con la regla de Barrow.

$$\text{Área} = \int_2^4 (x^2 - 3x + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_2^4 = \left(\frac{64}{3} - 24 + 8 \right) - \left(\frac{8}{3} - 6 + 4 \right) = \frac{14}{3} u^2$$

PROBLEMA 8

Sea la función

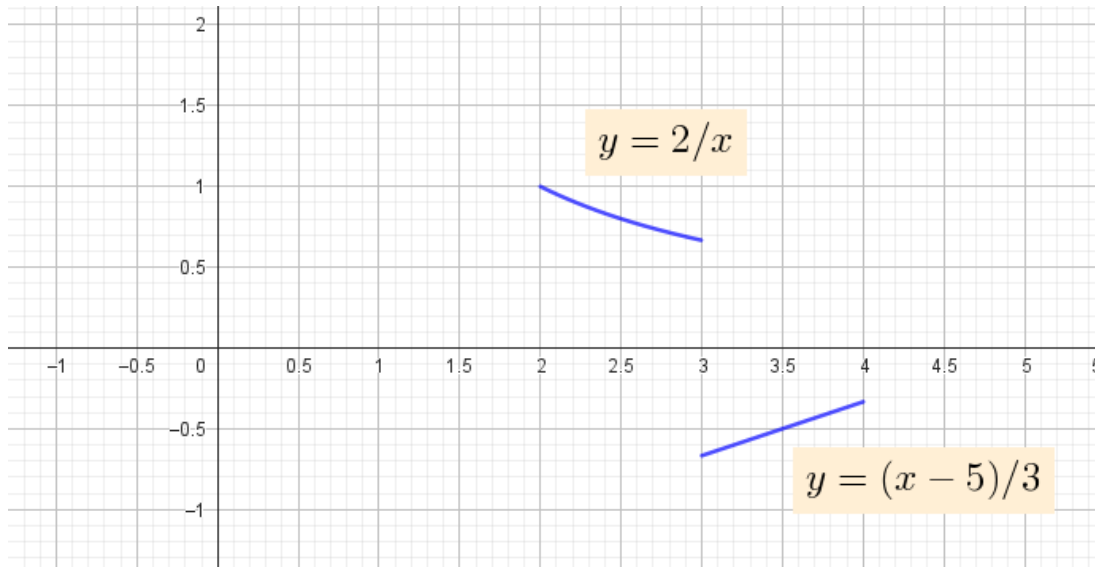
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{b}{x} & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ \frac{x-a}{3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Con a y b números reales.

Para $a = 5$ y $b = 2$, represente el recinto limitado por la gráfica de la función, las rectas $x = 2$, $x = 4$ y el eje OX. Calcule el área del recinto.

En el Tema 1 de Mates CCSS de 2ºBach, apartado 11, pdf de problemas 11b), ejercicio 5, aparece el estudio de esta función para conocer su continuidad, su derivabilidad y para representar su gráfica.

Por lo tanto, remito a ese ejercicio para comprender cómo trazar la gráfica siguiente.



En el intervalo $[2,3]$ la curva está por encima del eje horizontal.

En el intervalo $[3,4]$ la gráfica de la función queda por debajo del eje horizontal, por lo que aplicaremos valor absoluto a la integral definida en ese intervalo.

$$\text{Área} = \int_2^3 \frac{2}{x} dx + \left| \int_3^4 \frac{x-5}{3} dx \right|$$

$$\text{Área} = [2 \ln(x)]_2^3 + \left| \left[\frac{(x-5)^2}{6} \right]_3^4 \right| = (2 \ln(3) - 2 \ln(2)) + \left| \left[\frac{1}{6} - \frac{4}{6} \right] \right| = 0,81 - \frac{1}{2} = 1,31 \text{ u}^2$$

PROBLEMA 9

Se desea analizar el valor de las acciones de una empresa en un día. La función $v(t)$ nos indica, el valor, en euros, de cada acción de la empresa en función del tiempo t , medido en horas, a partir de la hora de apertura del mercado. De la función $v(t)$ se conoce que su variación instantánea es:

$$v'(t) = t^2 - 5t + 6, \quad t \in [0, 6]$$

- Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función v , y las abscisas de los extremos relativos.
- Si en el momento de apertura del mercado el valor de la acción es de 10 euros, calcula la función $v(t)$.
- Si un inversor compró 3.000 acciones en un instante $t=2$ y las vendió en un instante $t=4$, indica la ganancia o pérdida total del inversor.
- ¿En qué momentos se debe realizar la compra y la venta de acciones para obtener el beneficio máximo? Justifique su respuesta.

a) Igualamos la primera derivada a cero para obtener los puntos críticos.

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$t = 2, t = 3 \text{ puntos críticos}$$

$$[0, 2) \rightarrow v'(1) > 0 \rightarrow v(t) \text{ estrictamente creciente}$$

$$(2, 3) \rightarrow v'(2,5) < 0 \rightarrow v(t) \text{ estrictamente decreciente}$$

$$(3, 6] \rightarrow v'(5) > 0 \rightarrow v(t) \text{ estrictamente creciente}$$

$$t = 2 \text{ máximo relativo}$$

$$t = 3 \text{ mínimo relativo}$$

b) La función original se obtiene aplicando la integral indefinida a la derivada, y aplicando la condición de contorno $v(0) = 10$.

$$v(t) = \int v'(t) dt$$

$$v(t) = \int (t^2 - 5t + 6) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 6t + C \in \mathbb{R}$$

De las infinitas funciones que forman la integral definida, nos quedamos con la que cumple la condición de contorno marcada por el enunciado.

$$v(0) = 10 \rightarrow 0 - 0 + 0 + C = 10 \rightarrow C = 10$$

$$v(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 6t + 10$$

c) Calculamos la imagen de la función original para $t=2$ y para $t=4$.

$$v(2) = \frac{44}{3} \rightarrow 3000 \cdot \frac{44}{3} \rightarrow 44.000 \text{ euros al comprar}$$

$$v(4) = \frac{46}{3} \rightarrow 3000 \cdot \frac{46}{3} \rightarrow 46.000 \text{ euros al vender}$$

$$v(4) - v(2) = 2.000 \text{ euros de ganancia}$$

d) El beneficio máximo se obtiene comprando en el momento más barato y vendiendo en el momento más caro. Necesitamos determinar los máximos y mínimos absolutos de la función. Para ello, calculamos las imágenes de los extremos relativos y las imágenes de los puntos de inicio y final del intervalo de definición.

$$v(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 6t + 10$$

$$v(0) = 10 \text{ euros}$$

$$v(2) = \frac{44}{3} \approx 14,67 \text{ euros}$$

Más problemas sobre cálculo de áreas

$$v(3) = \frac{29}{2} \approx 14,50 \text{ euros}$$

$$v(6) = 28 \text{ euros}$$

El máximo absoluto se alcanza para $t=6$. Ese es el momento donde interesa vender.

El mínimo absoluto acontece en $t=0$. Ese es el instante en el que interesa comprar.