1.6 函数极限的计算

1.6.1 两个重要的极限

【内容分析】

本节主要是两个重要极限的基本形式及其计算、变形及其计算、应用广泛，特别是第二个重要极限在经济中常用。

【教学内容】

两个重要的极限

【重难点】

重点是第二个重要极限基本形式的计算，常单独考察；

难点是第二个重要极限等价形式的计算；第一个重要极限基本形式及其等价形式常在综合题中考查。

【知识和能力目标】

1.熟练掌握两个极限的基本形式和等价形式

2.会应用两个重要的计算求函数的极限

3.能借助GGB图解分析，进行类比和对比其他趋向下的函数极限

【过程和方法目标】

在熟悉极限概念的基础上，尝试一题多解解决两个重要极限的问题，实验验证和计算推广，并会运用两个重要的极限计算函数的极限。

【情感态度和价值观目标】

1在数列极限的计算过程中,鼓励学生口答， 动手实践，反复练习，熟能生巧，培养劳动意识。

2. 进行 GGB 实验、演示分析，突破难点，培养数学建模和数学软件的应用能力。

3. 组织启发、 口答、 讨论、探究等课堂活动养成自主、探究、反思的学习习惯；培养学生交流沟通，团队合作、竞争自信的职业素质和诚实认真的道德品质。

一、第一个重要的极限

【思考】计算下列两组数列，指出各运用哪种方法？

1.第一个重要的极限

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=(\qquad)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=(\qquad)$

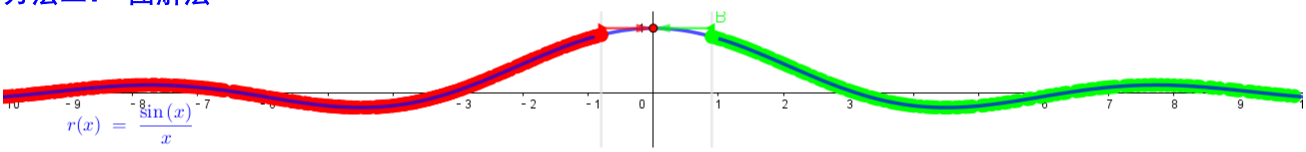
①基础形式 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

证明：

方法一：“数值逼近法”

x	± 1	± 0.01	± 0.001	± 0.0001	± 0.00001	⋯
$\frac{\sin x}{x}$	0.84147	0.95885	0.99833	0.99998	0.9999998	⋯

方法二：“图解法”



方法三：“两边夹定理”

设$0<x<\frac{\pi}{2}$，

$\frac{R^2}{2}\sin x < \frac{R^2}{2}x < \frac{R^2}{2}\tan x$,同除以正值$\frac{R^2}{2}\sin x$,

得$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$,即 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

$-\frac{\pi}{2} < x < 0$, 也有 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

$0 \le 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2} \le 2\cdot 1\cdot\frac{x}{2} = x$,

$\lim_{x\to 0} x = 0$, $\lim_{x\to 0}(1-\cos x) = 0$, 由两边夹定理可知$\lim_{x\to 0}\cos x = 1$,

又因为$\lim_{x\to 0} 1 = 1$,再次由两边夹定理可知$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

② 等价形式 $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=1$

证明:

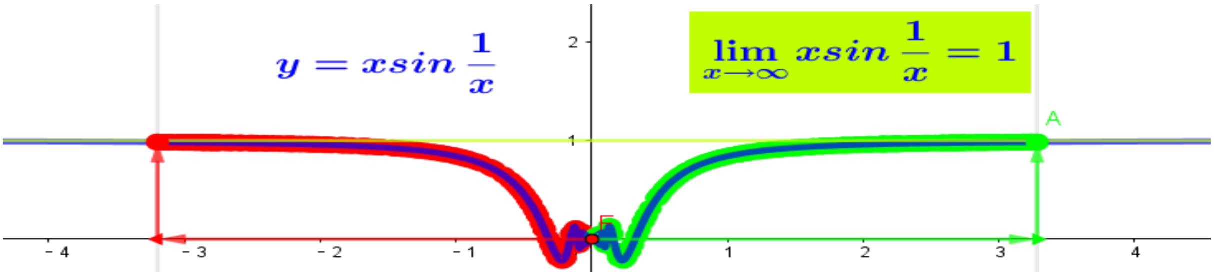
方法一:"等量代换"

$\lim_{x\to-\infty} x\sin\frac{1}{x} \xlongequal{令u=\frac{1}{x}} \lim_{u\to 0^-}\frac{1}{u}\sin u = 1$

$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} \xlongequal{令u=\frac{1}{x}} \lim_{u\to 0^+}\frac{1}{u}\sin u = 1$,

$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=1$

方法二:"图解法"



第一个重要的极限

$\lim_{[\square]\to 0}\frac{\sin[\square]}{[\square]} = 1$;

$\lim_{[\square]\to+\infty}[\square]\sin\frac{1}{[\square]} = 1$

说明:

①含三角函数,且为"$\frac{0}{0}$"型.

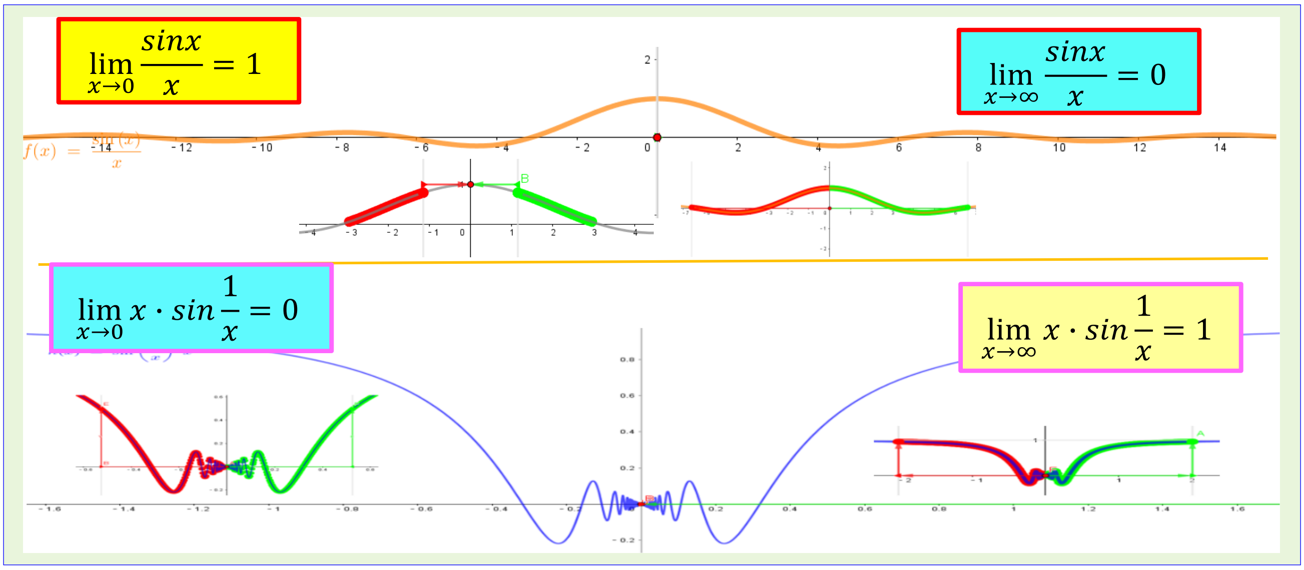
②注意自变量x的趋向

2. "有界变量× *无穷小量 = 无穷小量*"

③$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = (\quad\quad)$ **④$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x} = (\quad\quad)$**

证明: $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x = 0$

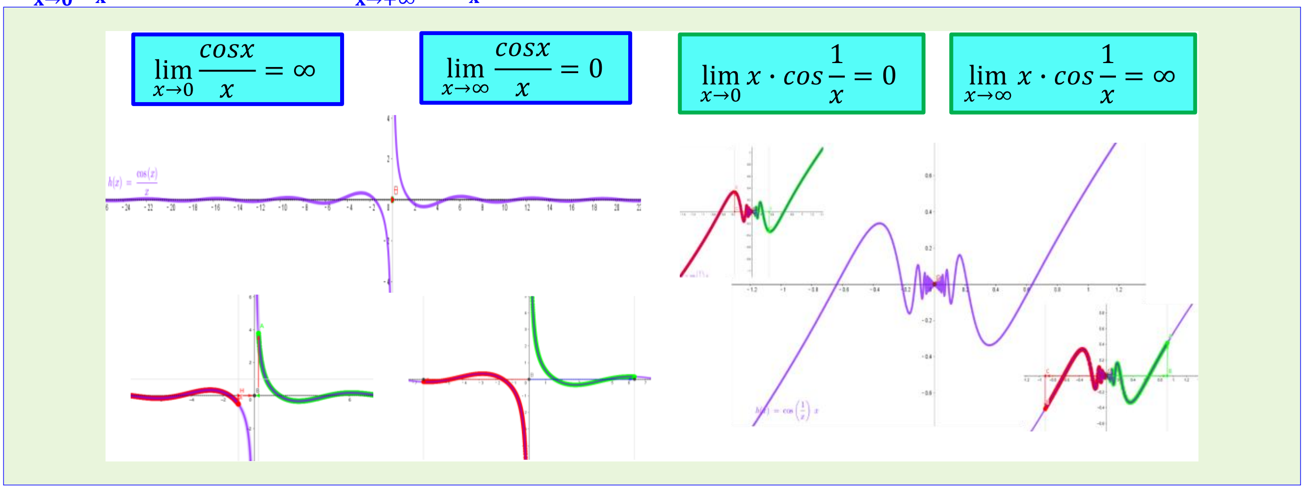
用"等量代换"的方法可以证明 $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x} = 0$, 试着写一下过程。



【举一反三】借助于图解法分析下列函数的极限

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=(\qquad)$ $\lim\limits_{x\to0}x\cos\frac{1}{x}=(\qquad)$

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{x}=(\qquad)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}x\cos\frac{1}{x}=(\qquad)$



【拓展与计算】

例1.注意积累每道题的化简技巧

$$1.\lim_{x\to0}\frac{tanx}{x}=\lim_{x\to0}\frac{sinx}{x}\cdot\frac{1}{cosx}=\lim_{x\to0}\frac{sinx}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{cosx}=1$$

$$2.\lim_{x\to0}\frac{sin3x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{sin3x}{3x}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\lim_{x\to0}\frac{sin3x}{3x}=\frac{3}{2}$$

$$3.\lim_{x\to0}\frac{1-cosx}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 4}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

$$4.\lim_{x\to0}\frac{tanx-sinx}{sin^3x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{sinx}{cosx}-sinx}{sin^3x}=\lim_{x\to0}\frac{1-cosx}{sin^2xcosx}=\lim_{x\to0}\frac{1-cosx}{x^2}\cdot\frac{x^2}{sin^2x}\cdot\frac{1}{cosx}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-cosx}{x^2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x^2}{sin^2x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{cosx}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}.$$

化简技巧
①切化弦
②"整体法"，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$
③"凑成法"，二倍角变换
④三角变换

【易错点】

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

解：

方法一、

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

方法二、

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x^3}-\frac{\sin x}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x^3}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x^2}$$

不存在？？

易错点归纳：____

【强化练习1】

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{7}{3}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{7}{3}=\frac{7}{3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{2x}\cdot 2\right)=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{2x}=2$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\sin\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=1$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{3}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{3}{x}}{\frac{3}{x}}\cdot 3\right)=3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{3}{x}}{\frac{3}{x}}=3$

6. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3-\frac{\sin x}{x}\right)=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2$

【课堂小练】

1.下列等式正确的是（　B ）

$A.\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1;$

$B.\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1;$

$C.\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=1;$

$D.\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}=1.$

解析：A. 0; B.1；C.0;D.0

2.下列等式不正确的是（ D　）.

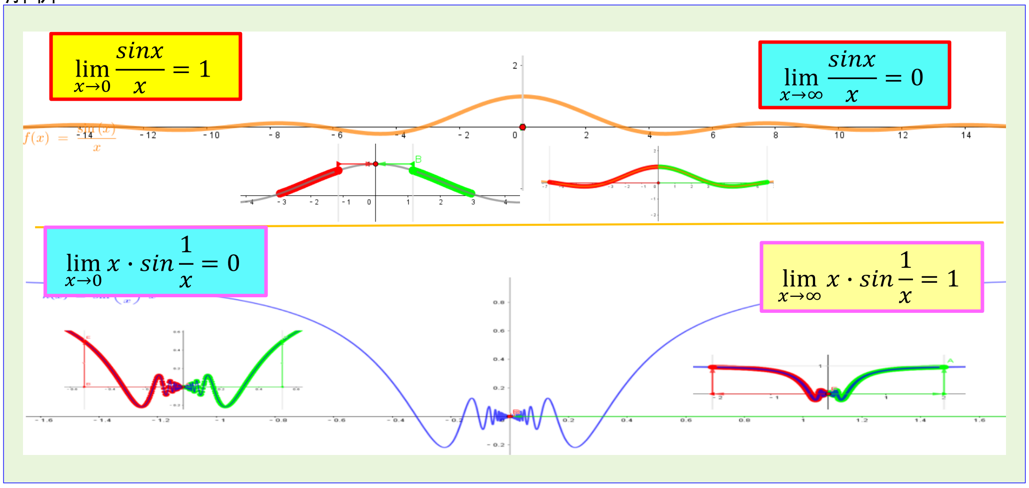
$A.\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$

$B.\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sin x}=1;$

$C.\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1;$

$D.\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=1.$

解析：D.



3. *下列极限计算正确的是（ C ）.*

$A.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}=1;$

$B.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}=-1;$

$C.\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1;$

$D.\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

解析： C. A.B.是0;D都是无穷小× 有界变量 = 无穷小0

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=$ ____.

解析： 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x})=1$.无穷小× 有界变量 = 无穷小

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x}=$ ______.

解析： 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(1-\dfrac{\sin x}{x})=0.$

二、第二个重要极限

【故事】e的由来——连续复利问题

自从人类有了贫富差距，借贷现象应运而生，在约公元前1700年古巴比伦时期的泥版上就有复利计算的问题的记载。

特殊的e，被认为是欧拉的数字，并被运用于欧拉公式，但实际上却不是欧拉自己发现的，而是由伯努利家族的另一个人雅各布.伯努利，在研究复利原则的时候，偶然发现的。17世纪，瑞士有个叫雅各布.伯努利（1654年-1705年）的数学家对复利产生了兴趣。

1683年，他在研究“连续复利问题”时发现了它：

伯努利的连续复利问题

假定银行活期存款年利率为 100%，

1.那么一元存到年底可得本息和为多少元?

2.半年时将存款取出，再存入银行，年底本息和就是多少元?

3. 按季度取出，再存入，年底本息和为多少元?

4.一年分期越多，年底得到的本息和也就越? A多;B少

要解决这个问题需要掌握单复利和极限的知识，首先了解单复利问题

设本金A_0，年利率R,1年计息次数n，利率r=年化利率$R \div n$，则有下列公式:

本息和: $A_t = A_0 + 利息$

单利本息和: $A_t = A_0(1 + rt)$

复利本息和: $A_t = A_0(1 + r)^t$

此问题A_0=1, 年化利率为R=1,

1年计息1次,r=1,本息和:

$1 \times (1 + 1)^1 = 2$ (元)

按半年计息（1年计息2次），r=50%,本息和:

$1 \times (1 + 0.5)^2 = 2.25$（元）

按季度计息（1年计息4次），r=0.25,本息和:

$1 \times (1 + 0.25)^4 \approx 2.44$（元）

……

按月计息（1年计息12次），$r = \frac{1}{12}$,本息和:

$1 \times \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2.61$

按日计息（1年计息365次），$r = \frac{1}{365}$,本息和:

$1 \times \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2.71$（元）

我们发现:一年分期越多，年底得到的本息和也就越多，

如果一年分为n期计息，则每期利率为$\frac{1}{n}$，存款1元，年底本息和为:

$A_t = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$（元）。

如果再细分下去，每秒、毫秒乃至更短地时间…，即n趋向于无穷大，意味着银行要连续不断地向顾客付利息，这种计息方式叫**“连续复利”**。

本息和是否越来越大？并且是无限制的增大呢？这时，雅各布·伯努利才意识到问题需以n当趋向于无穷大时的极限来解决。n趋向于无穷大时，$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$趋向于一个常数，则称$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$的极限为这个常数。他用这种“数值逼近”的方法计算出在年底得到的金额不会超过2.72美元。

但伯努利只估计出这个极限在2.71和2.72之间，并未给出精确值。

50年后，雅各布·伯努利的弟弟约翰·伯努利的学生欧拉，找到了这个数，并命名为e。精确值实际是2.71828…。恰好和Eulor欧拉首字母一样。另有说法e为指数的首字母，或因a,b,c,d,y有其他的经常用途，命名了这个数字e。

欧拉数列的极限

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e，e \approx 2.718281828459045\cdots$$

e的无穷级数表示

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

欧拉恒等式

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

证明： $e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots$$

$$\sin x+\cos x=1-\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots$$

$$e^{ix}=1+\frac{ix}{1!}+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\frac{(ix)^5}{5!}+\frac{(ix)^6}{6!}+\frac{(ix)^7}{7!}+\frac{(ix)^8}{8!}+\cdots$$

$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+i\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)$$

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

$$e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

证明： 数列 $\{u_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的极限存在．

方法一、单调有界数列必有极限

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

$$u_{n+1}=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

由此可知，u_{n+1}的前 n 项不小于u_n的相应项，而且u_{n+1}比u_n的展开式还多一个正项 $\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$,
$u_{n+1}>u_n$,所以$\{u_n\}$是单调递增数列.

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}\le 3$$

所以$\{u_n\}$是有界数列. $\{u_n\}$单调递增有上界，因此极限存在.

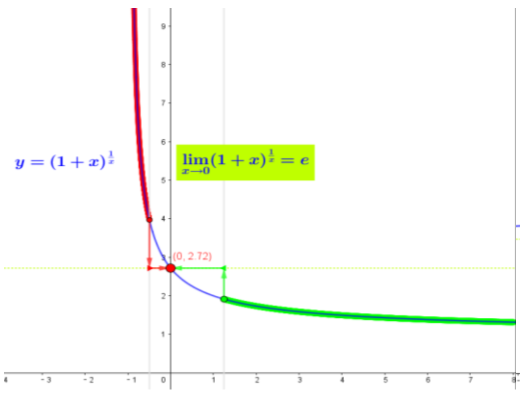
我们还可以证函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 当 $x\to\infty$ 时,或者 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$当 $x\to 0$ 时，都有极限，且

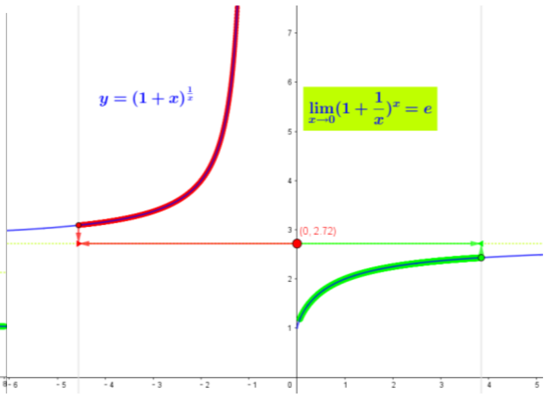
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，人们记这个极限为数 e，于是有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

用“等量代换”的方法可以证明$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，试着写一下过程。

方法二、“图解法”





【拓展与计算】前面进行过基础学习，下面推广一下，并进行进阶训练

第二个重要的极限

$$\lim_{[\ ]\to 0}(1+[\ ])^{\frac{1}{[\ ]}}=e$$

$$\lim_{[\ ]\to\infty}\left(1+\frac{1}{[\ ]}\right)^{[\ ]}=e$$

说明:

①含幂、指函数，且为"1^∞" 型.

②注意自变量x的趋向

③主要用到指数运算法则$(a^n)^m=a^{mn}$；$a^m\times a^n=a^{m+n}$

例2.（注意，做好方法的积累）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1-x)^{\frac{-1}{x}}]^{-1}=e^{-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+x)^{\frac{1}{3x}}]^3=e^3$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-x}{2-x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2-x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x-2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x-2}\right)^{x-2}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x-2}\right)^2$

$=\lim\limits_{x\to\infty}[\left(1+\frac{1}{2-x}\right)^{2-x}]^{-1}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x-2}\right)^2=e^{-1}$

【强化练习2】

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{1+x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+1-1}{1+x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{1+x})^x$

$=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{-1-x})^{-x-1}]^{-1}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-1-x}\right)^{-1}=e^{-1}\cdot 1=e^{-1}$

解析：添一项减一项、裂项、

5. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{2x})^{x+2}=[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{2x})^{2x}]^{\frac{1}{2}}.[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{2x})^2]=e^{\frac{1}{2}}$

【拓展】

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}[\ln(1+x)]^{\frac{1}{x}}=\ln[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\ln e=1$

解析：极限的复合运算法则

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

解：令$e^x-1=t$, 则$x=\ln(t+1)$

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(t+1)}{t}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t}}=\frac{1}{\ln[\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}]}=\frac{1}{\ln e}=1$

解析：换元法、极限的复合运算法则

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}=\lim\limits_{\cot x\to\infty}(1+\frac{1}{\cot x})^{\cot x}=e$

解析：变量代换法

9. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$

解：令$x-1=t$, 则$x=t+1, t\to 0$

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}}=e$

解析：换元法

上列两题各用的什么方法?

化简技巧积累: ____

____

____

____

【强化练习3】

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^3=e^3.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}\{[(1-\frac{2}{x})]^{\frac{-x}{2}}\}^{-2}=e^{-2}.$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}=e$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{3x})^{4x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{3x})^{3x}]^{\frac{4}{3}}(1+\frac{1}{3x})^1=e^{\frac{4}{3}}\cdot 1=e^{\frac{4}{3}}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+1}{2x})^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{2x})^{2x}]^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$

【课后小练】

1. *(2024数Ⅲ T12)极限* $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{a}{x}}=e$, 则实数$a=$ ________.

2. (2023数Ⅰ T4)极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{5}{x}}=$ ________.

3. (2023数Ⅲ T12)极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{3x}\right)^3=$ ________.

4. (2022数Ⅰ $T6$)极限 $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{kx}=e^2}$, 则$\boldsymbol{k=}$ ________.

答案: $\frac{1}{3}$; e^5; $e^{-\frac{4}{3}}$; 6