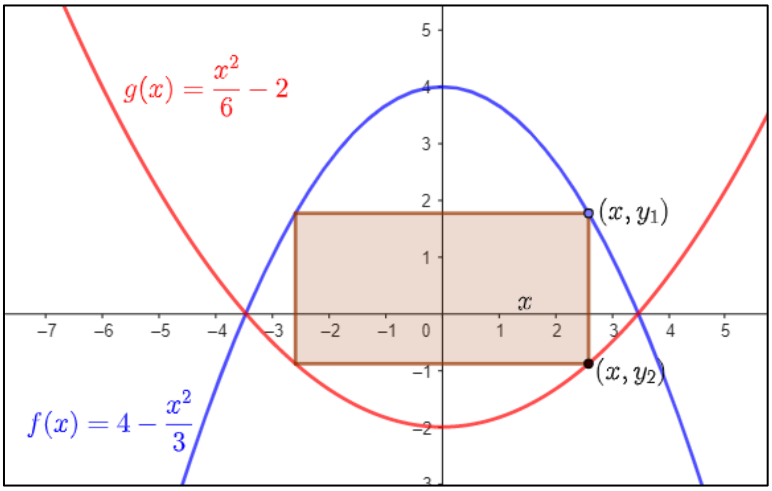
De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de las funciones $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=4-\dfrac{x^2}{3}$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{6}-2$.

Selectividad Andalucía Junio 2022

Solución:



La función a maximizar es el área del rectángulo construido según las condiciones del problema y que según el dibujo

la base es: $b=2x$, y

la altura es: $h=y_1-y_2=\left(4-\dfrac{x^2}{3}\right)-\left(\dfrac{x^2}{6}-2\right)=\dfrac{24-2x^2-x^2+12}{6}=\dfrac{36-3x^2}{6}=\underline{6-\dfrac{x^2}{2}}$

Entonces la función área es: $\underline{\underline{A(x)}}=b\cdot h=2x\cdot\left(6-\dfrac{x^2}{2}\right)=\underline{\underline{12x-x^3}}$

Los extremos relativos están entre los valores que anulan la primera derivada:

$A'(x)=12-3x^2$

$12-3x^2=0$, $x^2=4$, $x=\pm\sqrt{4}$ $\begin{cases} x=-2 \text{ no válido al ser } x \text{ una dimensión} \\ \underline{x=2} \end{cases}$

Para decidir el tipo de extremo aplicamos el criterio del signo del valor de la segunda derivada:

$A''(x)=-6x$, $A''(2)=-6\cdot 2=-12<0\Rightarrow$ Máximo en $x=2$

$Para\ \ x=2\begin{cases} b=2x=2\cdot 2=\underline{4} \\ h=6-\dfrac{x^2}{2}=6-\dfrac{2^2}{2}=6-2=\underline{4} \end{cases}$

Por tanto el rectángulo de área máxima es el cuadrado de dimensión: $\boxed{4\times 4\ u}$ y de área $\underline{\underline{16\ u^2}}$.