



Club GeoGebra Iberoamericano

1

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

INTRODUCCIÓN

Con este tema comenzamos la publicación de los materiales que os proponemos para trabajar en los Clubes de GeoGebra.

Cada mes lo dedicaremos a unos contenidos concretos, ofreciendo una serie de actividades para su desarrollo en el aula, siempre con distintos niveles de dificultad para promover su uso en los diferentes niveles educativos.

Para completar las propuestas de cada mes, platearemos varios retos para su resolución con GeoGebra, de los que al menos uno se deberá enviar como tarea de evaluación.

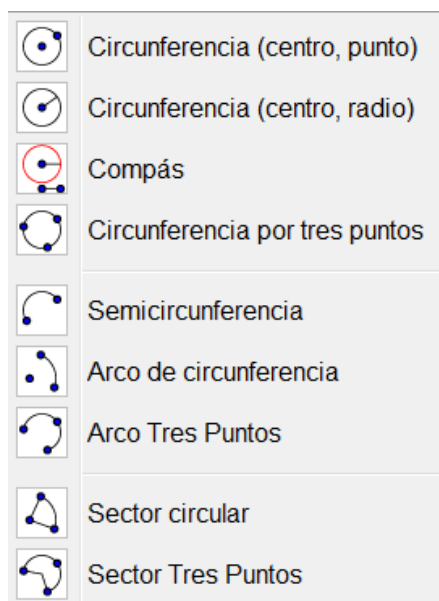
No queremos olvidar que esta actividad se realiza gracias a la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) a través de sus Instituto Iberoamericano de TIC y Educación (IBERTIC) e Instituto Iberoamericano de Enseñanza de la Ciencia y la Matemática (IBERCIENCIA).

CIRCUNFERENCIAS

En GeoGebra disponemos de varias opciones para trabajar con circunferencias que encontramos en el bloque de herramientas que podemos denominar curvas.




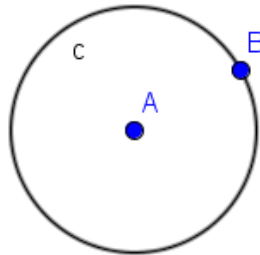
Al abrir este menú de herramientas aparecerán las siguientes opciones:




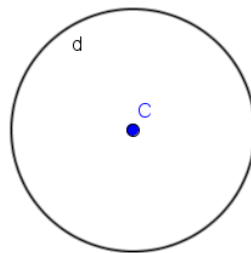
Observamos que disponemos de herramientas para dibujar circunferencias, semicircunferencias, arcos y sectores circulares.


Exponemos de forma breve cada una de las opciones anteriores.


 **Circunferencia (centro, punto):** dibuja una circunferencia a partir de dos puntos, el primero de ellos será el centro y el segundo determinará el radio.




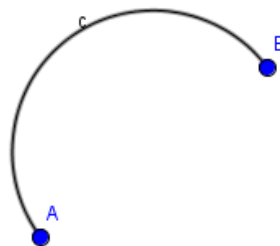
 **Circunferencia (centro, radio):** dibuja una circunferencia a partir de un punto que será el centro y un valor numérico que corresponderá a la medida del radio.





 **Compás:** a partir de un segmento o de dos puntos, aparecerá una circunferencia cuyo radio corresponde a la medida del segmento seleccionado o del segmento que une los dos puntos. Al hacer de nuevo clic en la vista gráfica queda fijado el centro de la circunferencia.


 **Circunferencia por tres puntos:** dibuja la circunferencia que pasa por tres puntos.


 **Semicircunferencia:** traza la semicircunferencia a partir de dos puntos que son considerados los extremos del diámetro.



 **Arco de circunferencia:** dibuja el arco de una circunferencia a partir de tres puntos, el primero es el centro de la circunferencia y los otros dos puntos corresponden a los extremos del arco.

 **Arco tres puntos:** dibuja un arco en la circunferencia que pasa por los tres puntos marcados, en los que el primer y el tercer puntos son los extremos del arco.

 **Sector circular:** dibuja un sector circular a partir de tres puntos; el primero es el centro de la circunferencia y los otros dos puntos corresponden a los extremos del arco del sector. Los extremos se deben marcar en sentido antihorario.

 **Sector tres puntos:** dibuja un sector utilizando tres puntos que corresponden a la circunferencia sobre la que se encuentra el sector. Los tres puntos son puntos del arco, el primero y el tercero determinan los extremos del arco del sector.

Para comenzar con este bloque de actividades proponemos una sencilla actividad de investigación que puede realizarse en distintos niveles educativos, una vez definido el concepto de circunferencia y los elementos necesarios para su construcción con y sin GeoGebra.

En los materiales que publicaremos no haremos referencia a la parte teórica necesaria para desarrollar los distintos contenidos propuestos. El objetivo no es facilitar un material para seguirlo al pie de la letra ya que se trata de ofrecer un conjunto de actividades que puedan servir de referencia, de manera que cada docente seleccione las que considere oportunas y por supuesto, este si es el objetivo de los clubes, las complete con otras actividades y tareas, creando materiales propios para posteriormente compartirlos con el resto de participantes.

Actividad de investigación

Dibuja un punto A y piensa cuántas circunferencias puedes dibujar que pasen por el punto A. Indica cómo has realizado la construcción.

Ahora vamos a dibujar además del punto A otro punto B para averiguar cuántas circunferencias pasan a la vez por A y por B. Al igual que antes, indica cómo realizas la construcción.


Lo complicamos algo más, ahora dibuja tres puntos no alineados A, B y C, para averiguar cuántas circunferencias pasan a la vez por estos tres puntos.

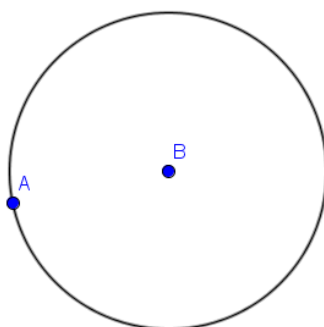
Si añadimos un punto más, ¿podríamos construir la circunferencia que pasa por todos los puntos?

Comencemos averiguando cuántas circunferencias pasan por un punto. Evidentemente son infinitas, pero esa es la respuesta que esperamos de nuestro alumnado que además deseamos que descubran con ayuda de GeoGebra.

Para ello, podrían dibujar un punto A que es el dato que nos ofrece el enunciado, construyendo a continuación una circunferencia cualquiera que pase por A.



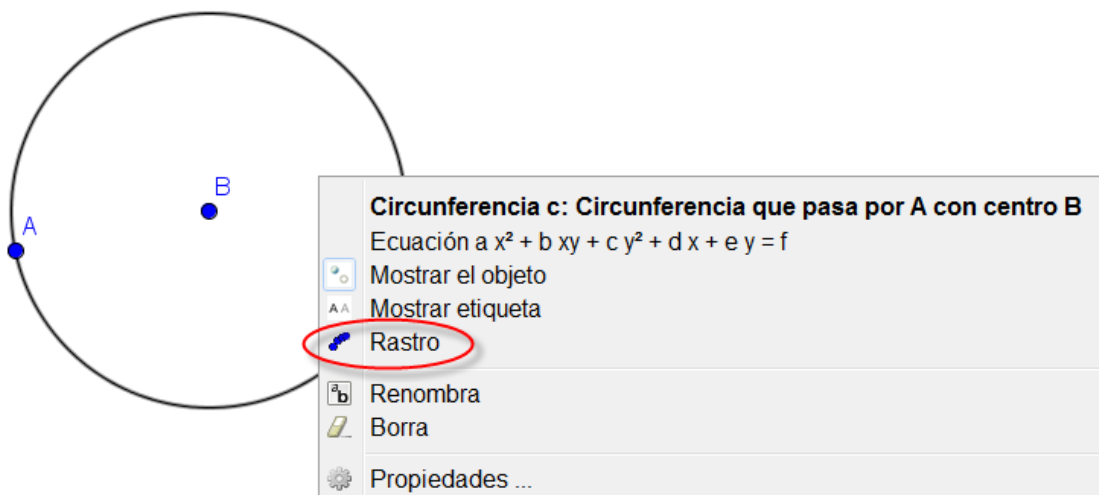
Seleccionamos la herramienta **Circunferencia (centro, punto)**  y pulsamos sobre la vista gráfica para dibujar un nuevo punto que será el centro y, a continuación hacemos clic en A para que la circunferencia pase por A.



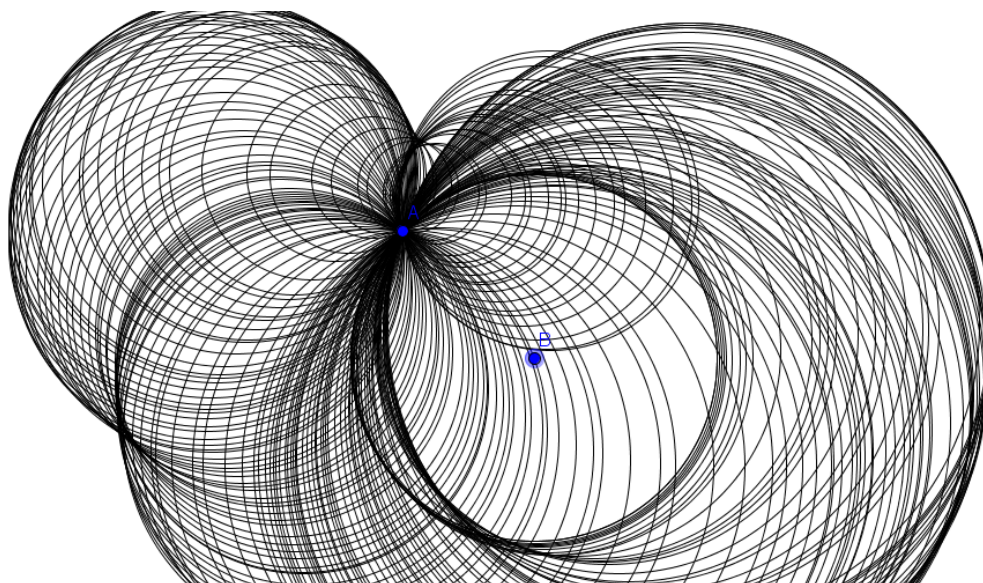
Ya tenemos una circunferencia que pasa por el punto A. ¿Existen más circunferencias?

Para responder a esta pregunta sólo ha que mover el punto B, dejando fijo el punto A. Es evidente que existen infinitas que corresponden a los infinitos centros que podemos tomar.

Para convencer a nuestro alumnado de esta situación, activamos el rastro de la circunferencia.



Y movemos el punto B. El resultado será similar al que aparece en la imagen siguiente:



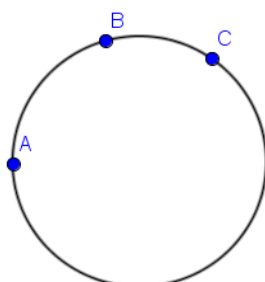
Podemos observar muchas circunferencias, lo que esperamos que convenza al alumnado de la existencia de infinitas ya que este proceso lo podemos repetir hasta el infinito moviendo el punto B.

Si deseamos un resultado con más colorido, podemos cambiar el color de la circunferencia.

Para determinar ahora cuántas circunferencias pasan por dos puntos, comenzamos dibujando los dos puntos A y B.



A continuación, seleccionamos la herramienta Circunferencia por tres puntos, marcando A, B y un tercer punto C, para obtener una circunferencia que pasa por A y B.



Ahora, moviendo C obtendremos nuevas circunferencias que pasan por A y B.

De manera similar a como hemos hecho anteriormente, podemos activar el rastro para que ayude a dar la respuesta al alumnado.

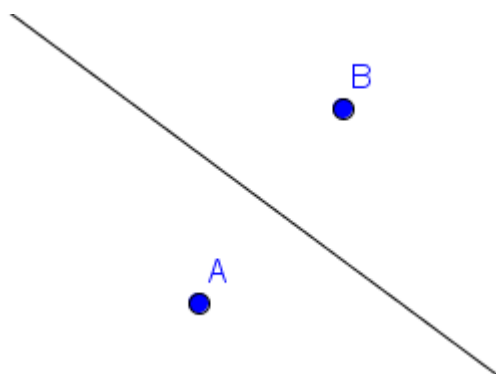
Si los contenidos que previamente hemos trabajado con el grupo permite utilizar la mediatriz podemos resolver esta tarea de otra forma.

Para encontrar una circunferencia que pasan por A y B necesitamos determinar el centro, para lo que aplicamos que como A y B son puntos de la circunferencia, estarán a la misma distancia del centro.

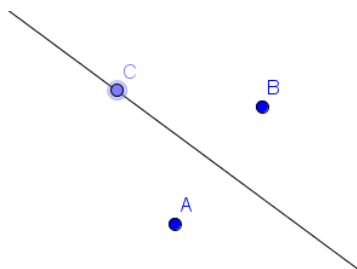
Los puntos que están a la misma distancia de dos puntos dados A y B, se encuentran en la mediatriz del segmento AB. Dibujamos la mediatriz utilizando la herramienta del mismo nombre que encontramos en el bloque siguiente:



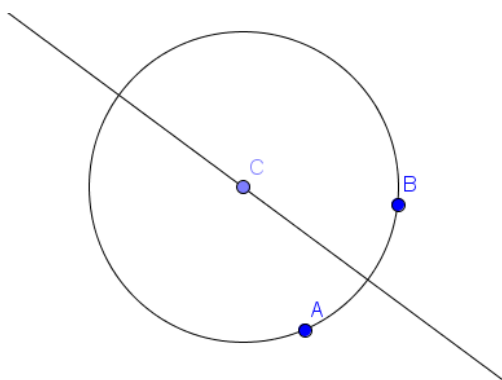
Seleccionamos la herramienta y pulsamos sobre A y B. Observemos que no es necesario trazar previamente el segmento AB.



¿Dónde estará el centro de la circunferencia que pasa por A y B? El centro estará en la mediatriz, por lo que utilizando la herramienta **Punto**, creamos un punto cualquiera en la recta mediatriz.

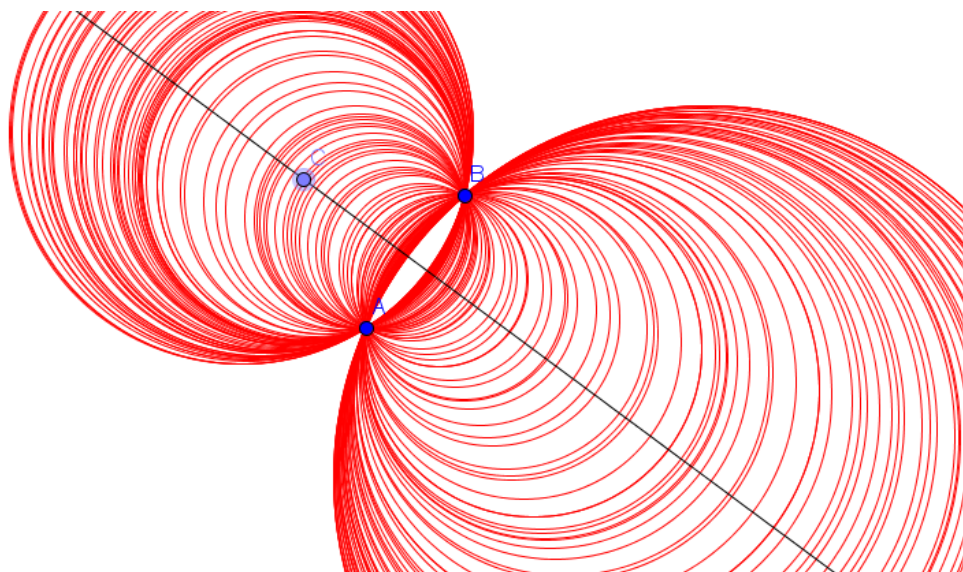


Ya solo nos queda dibujar la circunferencia que tiene centro en C y pasa por cualquiera de los dos puntos A o B. Para ello, seleccionamos la herramienta **Circunferencia (centro, punto)**, haciendo clic sobre C y a continuación en A (o en B).



Ya tenemos una circunferencia que pasa por A y B. Para obtener una nueva, solo hay que mover C.

Con ayuda del rastro obtendremos nuevas circunferencias como podemos observar en la imagen, en la que previamente hemos cambiado el color a la circunferencia.



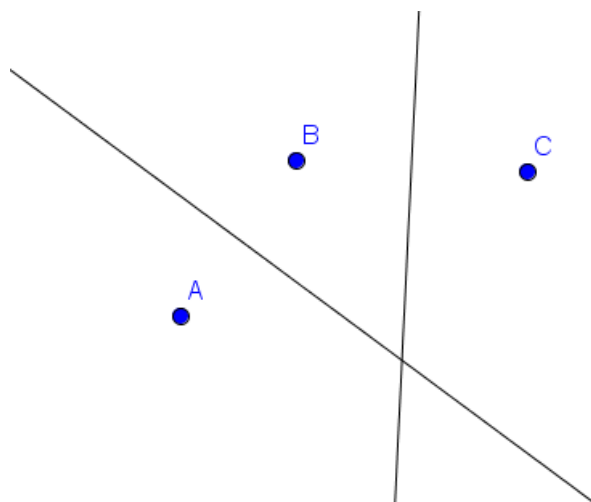
En el siguiente apartado no preguntan por cuantas circunferencias pasan por tres puntos, por lo que comenzamos dibujando los tres puntos A, B y C.

Utilizando la herramienta Circunferencia por tres puntos dibujamos la circunferencia que pasa por A, B y C.

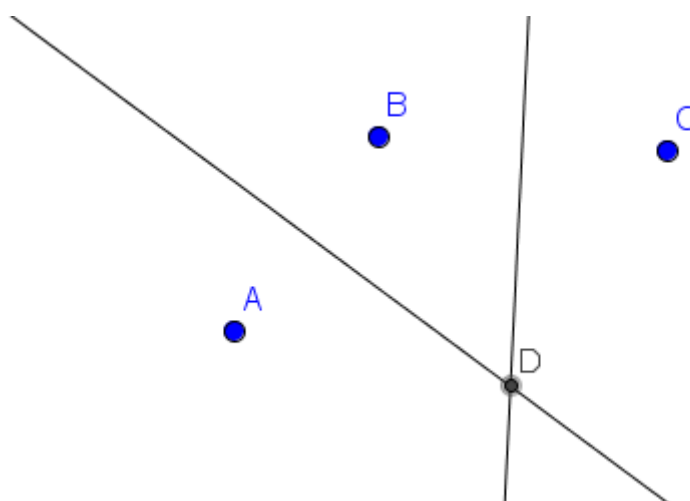
Y ahora, ¿qué punto movemos? No tenemos más opciones para mover, por lo que hay que deducir que solo existe una circunferencia que pasa por los tres puntos.

Es evidente que el mismo resultado se obtendrá si utilizamos la herramienta **Mediatriz**.

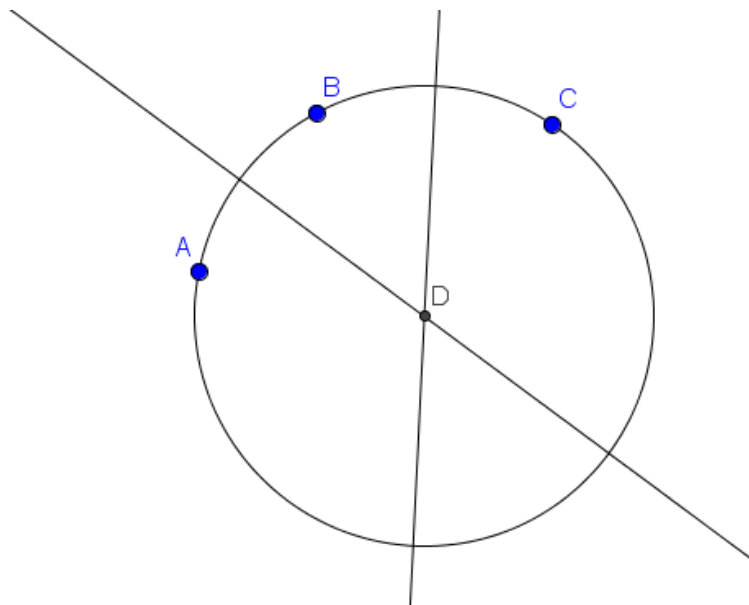
Para encontrar la circunferencia que pasa por A, B y C, es necesario determinar el centro. Al pasar por A y B, el centro se encontrará en la mediatriz del segmento AB, por lo que trazamos esta mediatriz. Como también pasa por B y C, el centro estará en la mediatriz de BC; trazamos esa nueva mediatriz.



Por tanto, como el centro estará en las dos mediatrices, será el punto de intersección de las dos rectas que obtenemos con la herramienta Intersección.



Ya solo queda dibujar la circunferencia que tiene centro en D y pasa por cualquiera de los otros tres puntos.



Observamos que no podemos mover el punto D ya que depende del resto de objetos, por lo que deduciremos que sólo hay una circunferencia.

Y para responder a la última cuestión, a partir de la construcción anterior, por cuatro puntos pasará una circunferencia o ninguna, dependiendo que el cuarto punto esté o no en la circunferencia trazada por los tres puntos anteriores.

Con pocas herramientas podemos plantear distintas actividades, de las que algunas os proponemos a continuación.

ELEMENTOS DE UNA CIRCUNFERENCIA

Dibuja una circunferencia de centro A y que pase por un punto B.

Traza los siguientes elementos:

- Un radio.
- Una cuerda.
- Un diámetro.

POSICIONES RELATIVAS

Posición relativa de dos circunferencias

Dibuja dos circunferencias.

Investiga que posiciones relativas pueden tener las dos circunferencias.

Posición relativa de una circunferencia y una recta

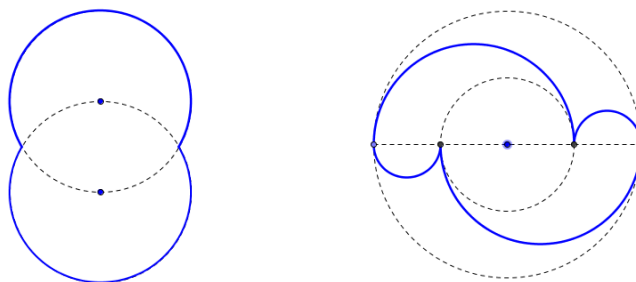
¿Qué posiciones relativas pueden tener una circunferencia y una recta?

Una vez dibujadas una circunferencia y una recta encuentra los puntos de intersección entre ambos objetos.

A continuación, mueve cualquiera de los dos objetos para cambiar su posición relativa, ¿qué ocurre con los puntos de intersección?

DIBUJANDO CIRCUNFERENCIAS

Intenta realizar las construcciones siguientes:



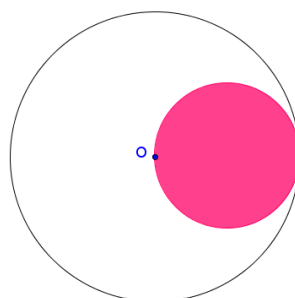
¿Puedes calcular su longitud y su área?

ÁREAS

Dos circunferencias

En una circunferencia se inscribe una nueva circunferencia que pasa por el centro y es tangente a la primera.

Realiza la construcción.



Determina la relación entre las áreas de las dos circunferencias.
Circunferencia y círculo

Tres circunferencias

Realiza la siguiente construcción:

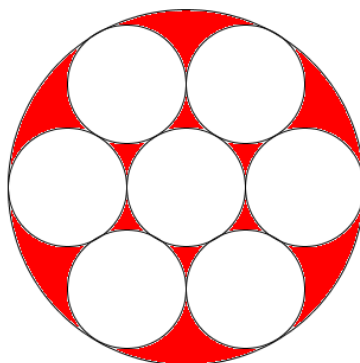
Dibuja tres circunferencias a , b y c , que cumplan las condiciones siguientes:

- La circunferencia b pasa por el centro de la circunferencia a y es tangente a ella.
- La circunferencia c pasa por el centro de la circunferencia b y es tangente a ella.

Una vez dibujadas, responde a la cuestión siguiente: ¿qué fracción del círculo a queda dentro del círculo b pero fuera del círculo c ?

Siete circunferencias

Realiza la construcción siguiente.



Si las circunferencias pequeñas tienen un radio de una unidad de medida, ¿cuál es el área de la parte dibujada en rojo?

TANGENTES

Recta tangente por un punto de la circunferencia

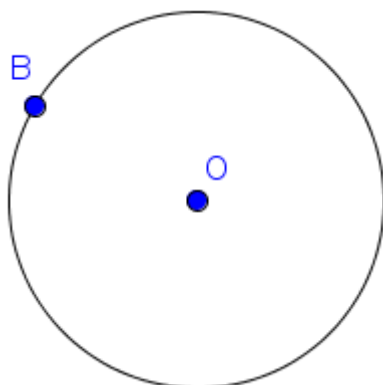
Dibuja una circunferencia c cuyo centro llamamos O y sea A un punto de la circunferencia.

Traza la recta tangente a la circunferencia por el punto A .

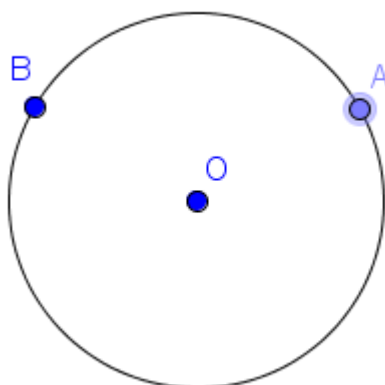
¿Qué propiedad cumple la recta tangente?

Comenzamos dibujando una circunferencia utilizando la herramienta Circunferencia (centro, punto).

Cambiamos el nombre al centro para llamarlo O .

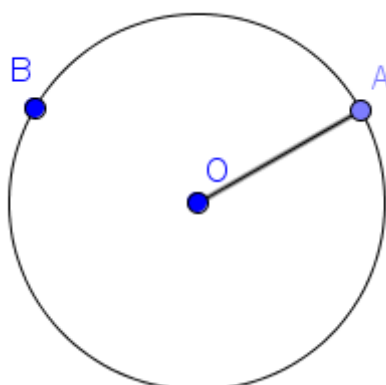



Creamos un nuevo punto en la circunferencia que será A. Es conveniente no utilizar el punto B ya que este punto es el que fija el radio.

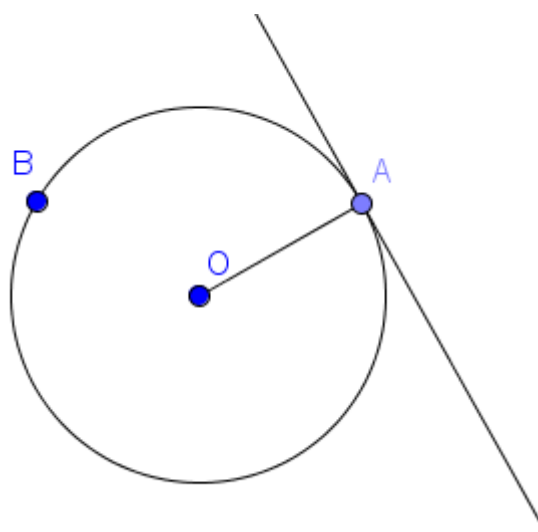


Observemos que el punto A aparece en un color azul menos intenso, lo que significa que es un punto que puede moverse pero solo sobre la circunferencia, mientras que los otros dos puntos, en azul más intenso, son puntos libres.


La recta tangente a una circunferencia por un punto de ella cumple la propiedad de ser perpendicular al radio, por lo que dibujamos el radio OA con ayuda de la herramienta **Segmento**.



Ya solo nos queda trazar la recta perpendicular al segmento OA por el punto A que obtendremos con la herramienta **Recta perpendicular** .

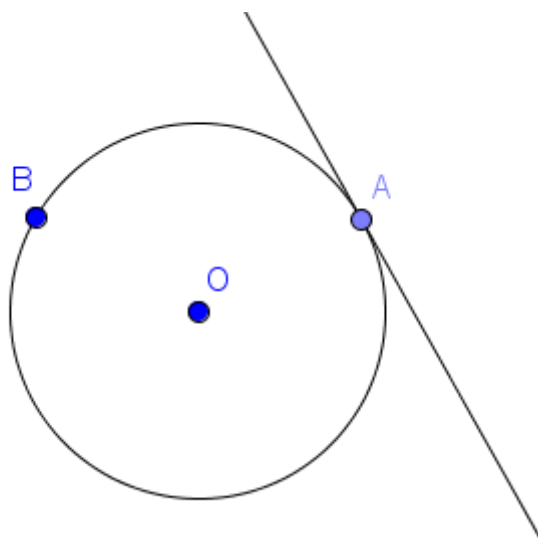


Podemos mover el punto A para comprobar que la recta en todo momento es tangente a la circunferencia.

En GeoGebra hay otra forma de obtener la recta tangente ya que disponemos de una herramienta que la dibuja. Esta herramienta es **Tangentes**  que encontramos en el mismo bloque en el que hemos seleccionado la herramienta **Recta perpendicular**.



Para obtener la recta tangente a la circunferencia por el punto A, seleccionamos la herramienta, pulsamos sobre la circunferencia y a continuación sobre el punto A.



Si realizamos la construcción con esta herramienta, lo que tenemos que hacer es preguntar ¡qué propiedad cumple la tangente? Es decir, resolver el problema al revés.

Recta tangente por un punto exterior

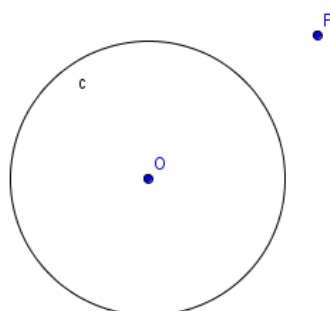
Sea P un punto exterior a una circunferencia de centro O.

Traza las rectas tangentes a la circunferencia por el punto P.

¿Qué propiedades cumplen las dos tangentes?

Circunferencia tangente

Dibuja una circunferencia c cuyo centro llamamos O y un punto exterior P.



Construye la circunferencia de centro P que sea tangente a la circunferencia c.

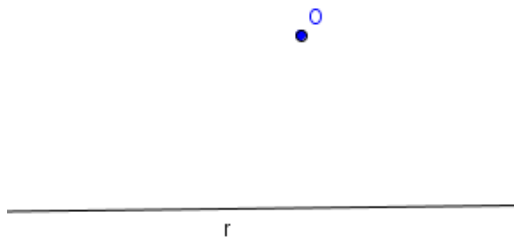
Una vez construida mueve los objetos que intervienen en la figura para comprobar que las condiciones de tangencia se mantienen. Mueve primero el punto P, a continuación mueve el centro O y por último intenta cambiar el tamaño de la circunferencia.

¿Hay alguna posición en la que desaparece la circunferencia obtenida?

Estudia que pasaría si P es un punto interior a la circunferencia.

Una tangente más

Dibuja la circunferencia cuyo centro es O y es tangente a la recta r .



Circunferencia tangente

Dibuja una circunferencia c cuyo centro es O y un punto A en la circunferencia.

Sea P un punto interior a la circunferencia.

Traza la circunferencia que pasa por el punto P y es tangente a la circunferencia c en el punto A .

¿Hay que cambiar algo en la construcción para que sea válida para el caso en el que el punto P sea exterior a la circunferencia c ?