

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS DE BACHILLERATO

1. Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos de las siguientes funciones.

a) $y = e^x(x - 2)$

Solución: Decreciente $(-\infty, 1)$, Creciente $(1, +\infty)$. mínimo $(1, -e)$.

b) $y = x^5 - 5x^3 + 10x$

Solución: Decreciente $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$, Creciente $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$. mínimos $(-1, -6), (\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$, máximos $(1, 6), (-\sqrt{2}, 16\sqrt{2})$

c) $y = (x - 1)^4$

Solución: Decreciente $(-\infty, 1)$, Creciente $(1, +\infty)$. mínimo $(1, 0)$.

d) $y = \log\left(\frac{x^2}{2x + 1}\right)$

Solución: Decreciente $(-\frac{1}{2}, 0)$, Creciente $(0, +\infty)$. No hay máximos ni mínimos.

e) $y = \frac{x - 1}{e^x}$

Solución: Decreciente $(2, +\infty)$, creciente $(-\infty, 2)$. máximo $(2, e^{-2})$.

f) $y = \frac{x^2}{x - 2}$

Solución: Decreciente $(0, 2) \cup (2, 4)$, creciente $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$. máximo $(0, 0)$, mínimo $(4, 8)$

2. Dada la función $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, hallar a, b, c, d de modo que :

- a) tenga puntos singulares en $(1, 1)$ y $(2, 0)$.

Solución: $a = 2, b = -9, c = 12, d = -4$

- b) pase por los puntos $(2, 27)$ y $(1, 37)$ y admita punto singular en $(0, 0)$.

Solución: $a = \frac{-121}{4}, b = \frac{269}{4}, c = 0, d = 0$

- c) tenga punto singular en $(0, -1)$ y la curva sea tangente a la recta de ecuación $2x - y - 2 = 0$ en el punto $(1, 0)$

Solución: $a = 0, b = 1, c = 0, d = -1$

3. Hacer una representación gráfica de la función $f(x) = 1 + 4x - x^2$ hallando dominio, puntos de corte con los ejes y máximos y mínimos de $f(x)$ en el intervalo $[1, 7]$

4. Representar las funciones hallando dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas, crecimiento y decrecimiento y extremos relativos:

a) $f(x) = \frac{x}{x - 3}$

(PROPUESTO EN SELECTIVIDAD)

- b) $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$
- c) $f(x) = \frac{2x^2 - 2}{x+4}$
- d) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ (PROPUESTO EN SELECTIVIDAD)
- e) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ (PROPUESTO UNIVERSIDAD LA LAGUNA)
- f) $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$ (PROPUESTO UNIVERSIDAD LEÓN)
- g) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$
- h) $f(x) = x \cdot e^{-x}$ (PROPUESTO UNIVERSIDAD LEÓN)
- i) $f(x) = x^2 \cdot e^{-2x}$
- j) $f(x) = x^3(x - 1)$ (PROP. UNIV OVIEDO)
- k) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
- l) $f(x) = x + \sqrt{x}$
- m) $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$
- n) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{4 - x^2}}$
- ñ) $f(x) = x \cdot \ln x$

5. Con un alambre de 1 m, queremos construir el borde de un rectángulo de área máxima. ¿Qué dimensiones ha de tener el rectángulo?

Solución: 0'25 m **cada lado**

6. Calcula dos números reales cuya suma sea 5 y cuyo producto sea el mayor posible.

Solución: 2'5 **cada número**

7. Sea un segmento de longitud a que se divide en dos partes que van a servir de base a sendos rectángulos. En uno de los rectángulos la altura es el doble de la base y en el otro, la altura es el triple de la base. Determina el punto de división de modo que la suma de sus áreas sea mínima.

Solución: $\frac{3a}{5}, \frac{2a}{5}$

8. Halla el área del triángulo determinado por los dos ejes coordenados y la tangente a la curva $\frac{1}{x}$ en el punto $x = 1$

Solución: 2 u^2

9. Aprovechando como hipotenusa una pared de $\sqrt{200}\text{m}$, se desea acotar una superficie triangular de área máxima. ¿Qué medidas deberán tener los catetos?

Solución: 10 m **cada uno**

10. Indica cuál es el triángulo de área máxima de entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30cm.

Solución: un triángulo equilátero de lado 10 cm

11. Una hoja de papel debe contener 18cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2cm cada uno y los laterales 1cm. Calcular las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

Solución: 5cm y 10cm

12. Una ventana normanda consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo. Encontrar las dimensiones de la ventana de área máxima si su perímetro es de 10m.

Solución: radio $\frac{10}{4 + \pi}$, base del rectángulo $\frac{20}{4 + \pi}$ y altura del rectángulo igual al radio

13. De todos los conos de área lateral $2\pi\text{dm}^2$, ¿cuál es el de volumen máximo?

Solución: el de radio $\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$ y altura $\frac{2\sqrt[4]{27}}{3}$

14. De todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio 5dm, ¿cuál es el de perímetro máximo?

Solución: lado = $5\sqrt{2}$ dm

15. En una oficina de correos sólo se admiten paquetes con forma de paralelepípedo rectangular, tales que la anchura sea igual a la altura y, además, la suma de ancho, alto y largo debe ser 72cm. Hallar las dimensiones del paralelepípedo para que el volumen sea máximo.

Solución: un cubo de lado 24 cm

16. Los barriles que se utilizan para almacenar petróleo tienen forma cilíndrica y una capacidad de 160l. Hallar las dimensiones del cilindro para que la chapa empleada en su construcción sea mínimo.

Solución: radio $2\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$ y altura $\frac{40}{\pi}\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{100}}$

17. Un agente comercial cobra por la venta de mercaderías una comisión: $C(x) = 100 + \frac{x}{100} - \frac{x^2}{100}$ medido en euros, donde x representa la cantidad en miles de euros de la venta efectuada. Determinar la cantidad que habrá que vender para que la comisión que haya que pagar sea máxima y calcula esa comisión

Solución: 500 euros cantidad máxima que habrá que vender y la comisión es de 100 euros