UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ – UFOPA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE CIÊNCIAS EXATAS
LICENCIATURA INTEGRADA EM MATEMÁTICA E FÍSICA

ISABEL CRISTINA TAVARES MARTINS

ENSINO DE TRIGONOMETRIA:

Uma proposta de atividades *online* na plataforma Geogebra

Santarém – PA
2020

ISABEL CRISTINA TAVARES MARTINS

ENSINO DE TRIGONOMETRIA:

Uma proposta de atividades *online* na plataforma Geogebra

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura Integrada em Matemática e Física, da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA) como requisito parcial para a obtenção do título de licenciatura integrada em Matemática e Física.

Orientador: Prof. Me. Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

Santarém – PA

2020

ISABEL CRISTINA TAVARES MARTINS

ENSINO DE TRIGONOMETRIA:

Uma proposta de atividades *online* na plataforma Geogebra

Trabalho de Conclusão de Curso a apresentada ao Programa de Ciências Exatas, do Instituto de Ciências da Educação da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), como requisito parcial para a obtenção do título de licenciatura integrada em Matemática e Física.

Conceito:
Data de aprovação:_____/_____/_____

____
Prof. Me. Aroldo Eduardo Athias Rodrigues - Orientador
UFOPA

____
Prof. Me. Hamilton Cunha de Carvalho
UFOPA

____
Prof. Me. Miguel Ângelo Moraes de Sousa
UFOPA

Aos meus filhos David e Rafael

AGRADECIMENTO

A Deus, por me dar saúde e sabedoria para enfrentar os desafios.

A minha amada família.

Ao meu orientador Aroldo Eduardo Athias Rodrigues, sempre paciente e atencioso.

Aos colegas de curso.

Aos professores do curso de Licenciatura em Matemática e Física.

Aos professores Marcos Olivetto e Renata Repolho.

RESUMO

A trigonometria é um dos conteúdos em relação ao qual muitos alunos apresentam dificuldades. Devido sua importância para várias áreas do conhecimento tem-se buscado encontrar estratégias de abordagens que melhorem o processo de ensino-aprendizagem deste tema. Este trabalho tem como objetivo principal elaborar uma sequência de atividades sobre razões trigonométricas usando o *software* Geogebra, especialmente no que se refere as dificuldades de compreensão da transição entre a Trigonometria do Triângulo e o Ciclo Trigonométrico. As atividades foram elaboradas na plataforma do *software* Geogebra e depois reunidas em um livro dinâmico disponibilizado no *site* oficial do Geogebra. Duas atividades foram desenvolvidas em um encontro no modelo de ensino emergencial remoto reunindo duas turmas do 2º ano do ensino médio de uma escola pública de Santarém-PA. Os diálogos que ocorreram durante a execução das atividades, foram registrados e analisados. Concluímos que as atividades elaboradas com foco na construção de conceitos, com o auxílio da geometria dinâmica, produzem interessantes possibilidades para o processo de ensino-aprendizagem deste conteúdo.

Palavras-chaves: Razões Trigonométricas, Geogebra, Atividades *on-line,* Livro dinâmico.

ABSTRACT

Trigonometry is a high school subject that students mostly present difficulties. Due to its importance to various fields, strategies have been sought to find approaches that could improve the teaching-learning process of this theme. The main objective of this work is to elaborate a sequence of activities about Trigonometric ratios using software Geogebra, related with difficulties of understanding the transition between Triangle Trigonometry and the Trigonometric Circle. Activities were elaborated in the Geogebra software platform and then assembled in a dynamic book available in Geogebra official site. Two activities were applied in a high school class through emergencial remote class model, gathering two classes from the 2nd year of high school from a public school of Santarém-PA. Dialogues that occurred during the meeting about the activities' execution were registered and analyzed. It was concluded that the activities elaborated focusing on the construction of concepts, auxiliated by dynamic geometry can produce interesting possibilities to the teaching-learning process of this subject.

Key words: Trigonometric ratios, Geogebra, On-line activities, Dynamic book.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
TDIC	Tecnologias Digitais da informação e Comunicação
UFOPA	Universidade Federal do Oeste do Pará

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho aborda o tema da Trigonometria, que entendemos aqui como sendo a área da matemática que estuda as relações entre os lados e ângulos de um triângulo. Encontrada em diversos campos da ciência e áreas do conhecimento, a trigonometria está presente em aplicações práticas, a exemplo da Mecânica, da Eletricidade, da Acústica, da Engenharia, da Medicina, da Astronomia e de outros campos do saber, sendo imprescindível o uso de seus conceitos.

No que se refere a aprendizagem deste conteúdo, Feijó (2018) mostra que grande parte dos alunos considera a Trigonometria de difícil compreensão e aplicação e as dificuldades são percebidas principalmente nos conceitos que a embasam, passando por dificuldades de identificar objetos matemáticos, principalmente os que necessitam de maior abstração.

Algumas abordagens usadas nas aulas, ainda baseadas em uma perspectiva tradicional de ensino, segundo a qual o professor é um transmissor de conhecimento e nas quais o aluno assume um papel absolutamente passivo, podem ser um indicativo dos problemas encontrados na aprendizagem do tema.

O surgimento de novas ferramentas tecnológicas de ensino, como os *softwares* de geometria dinâmica, viabilizou novas possibilidades de abordagem para o tema, as quais, acompanhadas de fundamentos educacionais adequados, acreditamos que possam produzir bons frutos. Sobre a inserção de tecnologias digitais no âmbito educacional Ferreira (2020) discute a relação entre tecnologia e educação sob duas perspectivas orientadoras, a determinística tecnológica e a instrumental. O autor produz uma análise sobre as implicações e limitações de tais perspectivas e aponta a necessidade de aprofundamento em relação a dimensão política da tecnologia e suas implicações para a educação matemática.

Esta realidade nos motivou a produzir atividades com ênfase na manipulação pelos alunos e no direcionamento das investigações feitas por eles, por meio de perguntas, a partir das quais eles pudessem fazer suas próprias reflexões e descobertas. Assim, esta pesquisa tenta responder a seguinte questão: Como atividades elaboradas a partir do uso do *software* Geogebra podem contribuir para melhorar o processo de ensino-aprendizagem do conteúdo de Trigonometria?

Compreendemos que seria muita pretensão de nossa parte acreditarmos que seja possível em um trabalho de conclusão de curso apresentar uma resposta completa para esta pergunta, entretanto, desejamos trazer nossa parcela de contribuição para o enfrentamento do problema, e para isso, definimos como objetivo geral desta pesquisa: Desenvolver uma sequência de atividades voltadas para o ensino de razões trigonométricas.

A fim de identificar os principais obstáculos neste processo, faz-se uma pesquisa bibliográfica qualitativa de trabalhos relacionados com o ensino da Trigonometria, já apontados por outros autores, traçamos também como objetivo, a elaboração de um material digital, composto por atividades que pudessem auxiliar professores e alunos no processo de ensino-aprendizagem das razões trigonométricas, por meio de representações dinâmicas, produzidas a partir do *software* Geogebra, além de executarmos algumas das atividades desenvolvidas .

A pesquisa foi organizada considerando-se as seguintes etapas: levantamento de trabalhos relacionados ao ensino de trigonometria na plataforma da Capes e no banco de dissertações do Profmat, com objetivo de identificar os principais obstáculos de ensino-aprendizagem sobre o tema; elaboração das atividades a partir dos principais obstáculos encontrados na etapa anterior, com base nos pressupostos da construção de conceitos, utilizando o *software* Geogebra; criação do livro digital na plataforma Geogebra; execução das atividades de Triângulos e Razões Trigonométricas, no mês de junho de 2021, em duas turmas de 2° ano do ensino médio de uma escola pública estadual no município de Santarém; e descrição e análise dos diálogos registrados durante a execução das atividades.

No próximo capítulo, o capítulo 2, abordamos os aspectos relacionados ao que se refere as competências e habilidades sugeridos na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2018), quanto aos conteúdos de trigonometria que os alunos devem apropriar-se até o final do ensino básico, além de apresentar um levantamento dos trabalhos nos quais se discute sobre as dificuldades encontradas no processo de ensino-aprendizagem de trigonometria.

Já no capítulo 3, discutimos o uso das tecnologias digitais no contexto educacional e apresentamos um levantamento de trabalhos nos quais o *software* Geogebra é utilizado para o ensino de trigonometria, identificando as principais tendências na abordagem do assunto, apontando aqueles trabalhos que se serviam de sequências de atividades para a construção de conceitos como estratégia de ensino. É também neste capítulo que fazemos uma breve apresentação do Geogebra e da plataforma criada em torno do mesmo no site oficial deste *software*.

No capítulo 4 são descritas as atividades e a forma como estas foram conduzidas nós, analisando os diálogos registrados durante a execução das atividades pelos alunos.

Ao final, apresentamos mais algumas considerações sobre as atividades e sua execução, bem como perspectivas e possibilidades para aprofundamentos destas atividades ou desdobramentos que podem surgir a partir das mesmas.

2 O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

A matemática possui grande importância na vida humana e está fortemente presente em nosso cotidiano, no entanto é aceita com insatisfação por grande parte dos alunos, que a considera de difícil compreensão. O fato de a matemática exigir um certo grau de abstração e raciocínio próprios de sua estrutura, a forma como tem sido abordada, enfatizando fórmulas e equações, acaba distanciando o aluno das ações concretas da prática cotidiana.

Seu estudo apresenta diversos temas, sendo um deles a trigonometria que apesar de ser uma importante ferramenta para várias áreas e essencial para que os estudantes desenvolvam determinadas competências é apontada por alunos e professores como um dos assuntos de mais difícil compreensão.

Este capítulo apresenta as sugestões contidas na BNCC (2018) e discute sobre as pesquisas relacionadas às dificuldades frequentemente observadas no processo de ensino-aprendizagem.

2.1 A trigonometria sob o olhar da BNCC

Este tópico destina-se a abordar os aspectos relacionados ao que se refere ao ensino de trigonometria encontrados na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2018).

Recentemente o ministério da educação lançou a base nacional comum curricular BNCC (2018), trata-se de um documento nacional que descreve o conjunto de normatizações e aprendizagens essenciais que os alunos devem constituir na sua permanência na Educação Básica.

Com a implantação da BNCC os professores continuam exercendo sua autonomia para escolher a melhor forma de planejar e executar suas aulas, uma vez que o documento não delimita como ensinar, mas sinaliza o conteúdo mínimo que os alunos têm o direito de aprender em cada etapa da educação básica.

O documento aponta dez competências gerais para a formação do cidadão que se pretende formar, são elas: Conhecimento; Pensamento científico, crítico e criativo; Repertório cultural; Comunicação; Cultura digital; Trabalho e projeto de vida; Argumentação; Autoconhecimento e autocuidado; Empatia e cooperação; e Responsabilidade e cidadania.

No que se refere a cultura digital, observa-se a necessidade do emprego dos meios tecnológicos a fim de formar um cidadão ético, crítico e protagonista na construção do seu conhecimento, neste sentido ressalta-se a inserção das Tecnologias digitais da informação e comunicação (TDIC) nas práticas docentes em temas tratados na área da matemática e suas tecnologias em diferentes contextos, no sentido de desenvolver soluções para problemas cotidianos usando diferentes ferramentas.

> [...] propostas de trabalho que potencializem aos estudantes o acesso a saberes sobre o mundo digital e a práticas da cultura digital devem também ser priorizadas, já que, direta ou indiretamente, impactam seu dia a dia nos vários campos de atuação social e despertam seu interesse e sua identificação com as TDIC. Sua utilização na escola não só possibilita maior apropriação técnica e crítica desses recursos, como também é determinante para uma aprendizagem significativa e autônoma pelos estudantes (BNCC, 2018, p.487).

Devido ao caráter balizador deste documento, a BNCC funciona como uma orientação aos objetivos de aprendizagem de cada etapa escolar. Ao analisar os textos referentes aos anos do ensino médio, identifica-se habilidades relacionadas à trigonometria no que se refere ao estudo de funções trigonométricas, fenômenos periódicos e ondas. Dentre as habilidades cita-se,

> Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria (BNCC, 2018, p. 536).

Assim como,

> Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos (BNCC, 2018, p. 536).

Este trabalho procura seguir as recomendações dadas por este documento oficial, através da inserção de tecnologias digitais que contribuam na compreensão e construção dos conhecimentos de trigonometria.

2.2 Alguns obstáculos no ensino-aprendizagem de trigonometria

Para identificarmos as principais dificuldades de ensino-aprendizagem no tema Trigonometria fez-se um levantamento bibliográfico, no banco de teses e dissertações da plataforma CAPES e do Profmat. A opção por este último banco de dissertações visa valorizar as pesquisas protagonizadas por professores da Educação Básica. O levantamento dos trabalhos foi realizado no período de 2010 a 2020. As palavras-chaves usadas foram “Trigonometria” e “dificuldades”. A seguir faz-se uma breve descrição das pesquisas selecionadas apontando seus principais pontos.

Celso e Ferreira (2015) apresentam uma proposta didática para o ensino de trigonometria no triângulo e comentam que um dos obstáculos encontrados no ensino-aprendizagem do tema é a falta de apropriação de conhecimentos básicos de matemática trabalhados em anos anteriores ao ensino médio. Segundo os autores, grande parte dos alunos do ensino básico apresentam defasagem de aprendizagem.

Alves (2017) trata sobre a dificuldade no ensino-aprendizagem da transição entre as representações da trigonometria do triângulo e do ciclo trigonométrico. Segundo o autor esta dificuldade pode estar relacionada a abordagem desconectada do assunto apresentado no ensino fundamental e no ensino médio, quando as razões trigonométricas passam a valer para ângulos quaisquer. Sua pesquisa resultou na produção de dois materiais, um teórico e um outro concreto, que ao serem trabalhados conjuntamente, auxiliam na compreensão desta transição.

Calazans (2019) cita que as maiores dificuldades no ensino de Trigonometria estão relacionadas a falta de compreensão de outros temas básicos, como razões, proporções e elementos de geometria plana, que acabam dificultando o entendimento e as aplicações desses conceitos matemáticos. Ao desenvolver uma sequência didática com os alunos do nono ano, a autora ressalta também a dificuldade dos alunos em compreender a linguagem matemática.

Feijó (2018) investigou os principais erros/dificuldades apresentados na aprendizagem de um grupo de alunos do 2° ano do ensino médio de escolas públicas no distrito federal e conclui que estas permeiam todos os ramos da trigonometria, destacando as dificuldades em relação à definição de radiano, razões trigonométricas seno e cosseno, propriedades, características e comportamentos das funções trigonométricas, bem como em relação à conexão entre o ciclo trigonométrico e as funções trigonométricas pela função de Euler. Segundo a autora uma das justificativas para essa imagem conceitual a respeito de tais assuntos, pode ser atribuída ao descaso dado a Geometria por parte do currículo escolar.

Freitas *et al* (2016), argumentam sobre as dificuldades enfrentadas no ensino-aprendizagem de Trigonometria e destacam que estas estão relacionadas a vários fatores, dentre eles, a falta de estrutura dos ambientes escolares que pode intervir no ensino, o desinteresse dos alunos e a abordagem baseada em situações descontextualizadas gerando uma dinâmica de estudos que causam a rejeição dos alunos para o tema.

A fim de investigar a concepção de professores a respeito do tema de Trigonometria e a correspondência entre diferentes modos como são tratados seus assuntos no ensino básico, Quintaneiro (2010) aplicou um questionário piloto à um grupo de professores de matemática. O autor concluiu que, em geral, não houve articulação entre a trigonometria no triângulo, trigonometria no ciclo, gráficos de funções trigonométricas e definição formal das noções fundamentais de trigonometria e que a maioria dos livros didáticos utilizados não faz, de forma significativa, a conexão entre a trigonometria do triângulo e a do círculo.

Medeiros (2014) cita que uma das dificuldades, com a aprendizagem de trigonometria, está relacionada com a falta de conhecimentos de Geometria como a definição de triângulo retângulo, seguidas do reconhecimento de seus elementos, além da identificação de cateto oposto e adjacente a um ângulo, o que compromete o entendimento das razões trigonométricas desde o triângulo até o ciclo trigonométrico, o autor critica as práticas pedagógicas que apenas apresentam aos alunos uma série de conceitos sistematizados, fazendo com que os alunos sejam meros espectadores deste processo.

Nascimento (2014) evidencia que a Trigonometria aparece como um obstáculo no ensino de matemática, tanto para os alunos como para professores, sendo que as principais dificuldades encontradas pelos alunos estão vinculadas ao não entendimento dos seus significados, conceitos e ideias, além da dificuldade de fazer conexões entre a trigonometria do triângulo retângulo e a do ciclo trigonométrico.

Silva e Frota (2010) utilizaram a modelagem matemática para associar situações práticas com a trigonometria. Segundo as autoras, os alunos apresentaram dificuldades principalmente quanto a mobilização de conhecimentos prévios, defasagem na aprendizagem de Geometria e na conexão exigida entre os estudos de Trigonometria e Geometria. A experiência conduzida pelas autoras evidenciou a necessidade de maior ênfase nos estudos de relações trigonométricas e do ciclo trigonométrico além do triângulo retângulo.

A fim de analisar como ocorre a resolução de problemas bem como identificar as dificuldades na aprendizagem do assunto de razões Trigonométricas, Frigo e Cardoso (2014) aplicou uma sequência de atividades envolvendo resolução de problemas a um grupo de alunos do 2º e 3° do ensino médio. A autora identificou dificuldades relevantes, principalmente no que diz respeito a mobilização dos conceitos matemáticos, as representações e interpretações das situações-problema.

Dionizio e Brandt (2011) utilizaram a Teoria dos Registros de Representação semiótica para identificar a natureza das dificuldades, apresentadas por alunos do ensino médio, em Trigonometria. Os autores destacam que a falta de compreensão dos conteúdos da Trigonometria, apresentada pelos alunos, pode ser devido a diversos fatores, dentre eles a dificuldade que os estudantes têm de conceitualizar os objetos matemáticos, que se apresentam de forma muito abstrata no ensino deste tema.

As pesquisas selecionadas, a partir do levantamento, apontam para um cenário no qual pode-se considerar que as dificuldades no ensino e aprendizagem estão relacionadas a diversos assuntos que compõem o tema de Trigonometria, além dos assuntos que a embasam. No quadro 1, citam-se as dificuldades mais relevantes encontradas no ensino-aprendizagem de Trigonometria e os autores das pesquisas que apontam tais dificuldades.

Quadro 1 – Dificuldades identificadas no ensino-aprendizagem de Trigonometria e pesquisas que as apontam.

Dificuldades	Pesquisas
Razões trigonométricas e a transição entre a Trigonometria no triângulo e a Trigonometria no ciclo trigonométrico	Feijó (2018), Freitas et al (2016), Medeiros (2015), Nascimento (2014), Silva e Frota (2010), Dionízio e Brant (2011), Quintaneiro (2010) e Alves (2017).
Conceitos matemáticos básicos de Geometria plana e aritmética	Celso e Ferreira (2015), Calazans (2019), Feijó (2018), Nascimento (2014).
Representação de figuras e objetos matemáticos	Celso e Ferreira (2015), Feijó (2018), Medeiros (2015), Dionízio e Brant (2011), Frigo (2014).
Definição de radianos e funções trigonométricas	Quintaneiro (2010) e Feijó (2018).

Fonte: A autora (2020)

Neste trabalho nos propusemos a abordar as dificuldades apontadas nas três primeiras linhas do quadro acima, as quais foram citadas por uma quantidade substancial de autores.

3 O USO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS NO CONTEXTO EDUCACIONAL

As tecnologias digitais têm apresentado um enorme impacto em muitas áreas da sociedade e tem estado cada vez mais presente nas formas contemporâneas de educação. Nesse contexto pergunta-se como a educação se assenta diante dessas mudanças?

Sobre os processos educativos mediados por tecnologias Peixoto (2015) ressalta a complexidade nos processos de apropriação dessas tecnologias aos quais se contrapõem as políticas institucionais e as formas individuais e coletivas de uso, afirmando que “a integração das tecnologias de informação e comunicação aos processos educativos não acontecem naturalmente” (PEIXOTO, 2015, p. 317).

Frequentemente tem-se identificado nos discursos sobre Tecnologia e Educação, a presença de duas perspectivas, a tecnocentrada e a antropocentrada, suas abordagens, segundo Ferreira (2020), apresentam limitações pois consideram os recursos tecnológicos como instrumentos neutros ou então desconsideram as implicações que a dimensão técnica dos recursos impõe aos usos que são determinados por elas.

Essas perspectivas influenciam a educação sob vários aspectos, principalmente quando se tratam de políticas educacionais impostas, sem que se considere os contextos nos quais elas estão imersas. Portanto “é preciso uma perspectiva que não pense os usos como uma relação direta entre a dimensão técnica dos recursos e usuários, mas que considere outros aspectos que fogem a essa dimensão” (FERREIRA e DANTAS, 2018, p. 8). Neste sentido, a perspectiva sociotécnica propõe,

> [...] uma abordagem mais abrangente, conduzida pela relação entre recursos e contextos, que considera a necessidade de haver sempre uma atualização acerca dos projetos, que determinam finalidades para o uso dos recursos, dos meios nos quais os usos se dão, da disponibilização dos recursos e dos usos efetivados. (FERREIRA e DANTAS, 2018, loc. cit.)

Portanto, a perspectiva sociotécnica distancia-se de visões ingênuas a respeito das tecnologias digitais, pois considera o contexto nos quais os usos dessas tecnologias se dão. Contexto este que não ignoramos quando da realização das atividades propostas neste trabalho, pois compreendemos que em um momento no qual o distanciamento social se fazia necessário em razão da pandemia provocada pelo coronavírus, atividades *online* como a que propusemos neste trabalho poderiam contribuir no atendimento das necessidades de professores e alunos da escola pública, sem, contudo, sermos ingênuos ao ponto de acreditarmos que não há muitos alunos excluídos neste processo pela falta de acesso ou baixa qualidade de conexão de internet das quais dispõem, realidade que fica clara quando consideramos a quantidade de alunos que efetivamente puderam participar das atividades propostas.

Em relação à Educação Matemática, chama-se atenção para o uso de recursos computacionais. Segundo Peixoto (2015), ao tratarmos da utilização desses recursos, devemos estar atentos para as abordagens, é preciso compreender que não são as ferramentas (tecnologias digitais) que provocam as transformações na educação e sim as nossas concepções sobre ela e os contextos aos quais as aplicamos.

O computador pode ser uma ferramenta que torna possível ao aluno buscar informações, refletir e elaborar sobre seus conhecimentos, porém o uso de qualquer *software* educacional não será a ferramenta que irá solucionar definitivamente os problemas de ensino da matemática, mas mais uma estratégia didática mediadora do processo de ensino, com suas potencialidades e limitações.

Ferreira (2020) destaca que não podemos ser ingênuos em acreditar que as ferramentas tecnológicas são neutras e que delas podemos fazer uso da forma que bem quisermos, no caso dos *softwares* é necessário pensar que por trás de uma tecnologia digital, existe um desenvolvedor que a produziu com base em seus pressupostos, além do que elas também podem apresentar limitações concretas em relação ao seu uso.

Mais uma vez reforçamos que não devemos ignorar o contexto no qual estamos inseridos, pois ao planejarmos uma atividade *online*, as condições desiguais de acesso à internet que vivenciam a grande maioria de nossos alunos, juntamente com a falta de estrutura da escola, podem ser um impedimento para seu uso.

A discussão sobre tecnologia na Educação, em nosso caso, na Educação Matemática, vai além de questões técnicas ou instrumentais, voltadas apenas ao uso de dados recursos na prática docente, tem a ver com os pressupostos que os educadores carregam consigo, suas crenças sobre o que é ensinar ou sobre as finalidades da avaliação.

A compreensão do que foi dito acima foi o que nos motivou a produzir atividades com ênfase na manipulação pelos alunos e no direcionamento das investigações destes, por meio de perguntas a partir das quais eles pudessem fazer suas próprias reflexões e descobertas. Ênfase esta que não foi dada porque estamos utilizando tecnologias digitais, mas pelos pressupostos de educação nos quais acreditamos. O papel das tecnologias foi o de ampliar possibilidades de exploração pelos alunos por meio do dinamismo oferecido pelo Geogebra.

3.1 A Plataforma Geogebra

Atualmente existem vários *softwares* que utilizam a Geometria Dinâmica como base em suas manipulações, dentre eles podemos citar o Geogebra que é um *software* educacional livre de matemática dinâmica, criado em 2001, na Universidade Americana *Florida Atlantic University*, por Markus Hohenwarter, para ser utilizado em sala de aula.

O Geogebra reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo apresentando a vantagem didática de mostrar ao mesmo tempo a conversão entre duas representações diferentes de um mesmo objeto, as representações gráficas e algébricas, além de ser um *software* gratuito ou *freeware*, de fácil manipulação, rápida instalação e que não requer um computador com alto poder de processamento de dados, além de estar disponível para várias plataformas, tais como: Windows, Linux, Apple e Android.

Atualmente existem vários Institutos Geogebra pelo mundo, cujo objetivo é disponibilizar tutoriais, fóruns, vídeos e construções que ajudam na compreensão do uso das ferramentas e recursos deste *software*, auxiliando sua inserção no cotidiano de alunos e professores.

Segundo Zampieri e Javaroni (2018), atualmente o Geogebra também tem impulsionado a constituição de ambientes de aprendizagem, possibilitando produzir e ensinar matemática colaborativamente. Tais ambientes tornam possível que pequenos grupos de alunos, ou ainda, pequenos grupos envolvendo alunos e professores, se engajem na resolução de problemas que envolvam discussão e reflexão, interagindo com o Geogebra.

Tanto este aspecto colaborativo como o fato de tratar-se de um *software* educacional livre foram razões importantes para que optássemos por desenvolver as atividades apresentadas neste trabalho diretamente no site oficial do Geogebra, embora algumas construções tenham sido desenvolvidas com a versão 5.0 do programa *offline* para depois serem inseridas no site.

O *software* Geogebra tem diferentes possibilidades de uso no meio educacional, especialmente no ensino de matemática. O programa tem passado por diversas atualizações nos últimos anos e o site oficial tem acompanhado esses avanços. Nele é possível hoje não somente postar construções cuja finalidade não fica clara para outros usuários, mas construir atividades que se servem destas construções e que, portanto, acabam inseridas dentro de um contexto que viabiliza seu uso em contextos educacionais. Hoje, é possível, inclusive, reunir estas atividades em livros, que se constituem em verdadeiros livros dinâmicos.

As atividades criadas no site permitem relacionar de forma conectada textos, vídeos, áudios, *applets* e outros materiais desenvolvidos na plataforma Geogebra que se encontram disponíveis para uso público, além de outros recursos com o objetivo de ensinar e aprender em todos os níveis de educação.

Existe ainda outra funcionalidade no *site* oficial do Geogebra, o Geogebra *Classroom*, que possibilita ao professor criar salas de aula a partir das atividades elaboradas por ele mesmo ou por outros usuários. Através dessas salas de aula é possível que o professor acompanhe em tempo real as atividades que estão sendo realizadas pelos alunos, utilizando este recurso também como ferramenta de avaliação.

3.2 O Geogebra e o ensino de razões trigonométricas

Este capítulo foi elaborado a partir de uma revisão bibliográfica cujos objetivos foram identificar as pesquisas que utilizam o *software* Geogebra como recurso didático no ensino de razões trigonométricas, além de enfatizar a construção de conceitos pelos próprios alunos. Para isso fez-se um levantamento bibliográfico, no portal da CAPES, de resumos de dissertações de mestrado, realizadas no período de 2015 a 2020. As palavras-chaves usadas foram “Razões trigonométricas” e “Geogebra”. A seguir faz-se uma breve descrição das pesquisas selecionadas. O recorte que fizemos privilegiou aquelas cujo enfoque era a elaboração conceitual feita pelos próprios alunos, através da manipulação de objetos.

Vassalo (2017) apresentou uma série de atividades que envolvem construções realizadas com régua e compasso além da utilização do *software* Geogebra. Em seu trabalho ele utiliza a construção do conceito de razões trigonométricas a partir da construção de um teodolito construído a partir de materiais de fácil acesso.

Medeiros (2018) elaborou uma sequência didática para investigar, com auxílio do *software* Geogebra, a aprendizagem dos alunos a partir da construção de conceitos da Trigonometria no triângulo retângulo. Sua pesquisa apoiou-se na construção dos conceitos da didática da matemática, na Teoria das situações didáticas e no uso de novas tecnologias. As atividades da sequência favoreceram a capacidade de realizar investigações e verificar regularidades por meio de observações.

Silva (2020) utiliza uma sequência didática elaborada com o uso do Geogebra para investigar o desenvolvimento de competências, nos conteúdos de razões trigonométricas, tendo por base as sugestões propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). trigonométrico. O autor concluiu que o uso do Geogebra possibilitou uma visão mais abrangente de diversos conceitos fundamentais para a Trigonometria, principalmente por permitir a manipulação dos objetos matemáticos.

Catharina (2017) propôs uma sequência didática referente ao ensino de trigonometria no triângulo retângulo, inserindo a história da matemática e os recursos tecnológicos do Geogebra. O autor concluiu que a abordagem favoreceu ao aprendizado aumentando a participação dos alunos.

Silva (2011) propôs a construção de atividades, por meio do *software* Geogebra, pelos próprios alunos. A autora concluiu que estas atividades contribuíram para melhorar o raciocínio lógico do aluno, além de ser capaz de promover o aprendizado através da interação por meio da manipulação dos objetos, levando-o a conclusões pertinentes acerca do assunto em estudo.

Fritzen (2011) analisou o processo de elaboração do pensamento conceitual de trigonometria, particularmente o conceito de seno de um ângulo, tendo por base uma atividade de ensino planejada à luz da teoria histórico-cultural. A autora utiliza o processo de execução de tarefas elaboradas a partir do *software* Geogebra. Os resultados indicam o progresso de elaboração conceitual dos alunos nas relações trigonométricas.

Souza (2018) apresenta um GeogebraBook com uma proposta de atividades para o ensino de trigonometria por meio da manipulação de tecnologias digitais, mais especificamente, de *applets* criados com o auxílio do *software* GeoGebra para a construção e aprendizagem significativas desse conteúdo. O autor destaca a importância dos recursos tecnológicos para o ensino de matemática e o papel do professor frente aos avanços da tecnologia, como agente facilitador da interdisciplinaridade e como motivador e mediador do conhecimento

Dos trabalhos apresentados acima, nenhum desenvolveu atividades usando a plataforma disponível no site do GeoGebra, além disso, embora tenham trabalhado atividades priorizando a construção de conceitos, não houve a elaboração prévia de construções que visassem a manipulação pelos alunos como o que optamos por fazer neste trabalho. No próximo capítulo, trataremos justamente das atividades elaboradas.

4 ATIVIDADES PARA O ENSINO DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste capítulo apresentam-se as cinco atividades elaboradas na plataforma do site do Geogebra, bem como descreve-se a condução de duas das atividades trabalhadas com um grupo de alunos do ensino médio. Por último, é feita a análise dos diálogos registrados durante a execução destas pelos alunos.

4.1 Atividades elaboradas

Uma das competências específicas de matemática e suas tecnologias para o ensino médio sugeridas pela BNCC (2018) é:

> Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), sendo fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível (BNCC, 2018, p. 531).

Ao se tratar da utilização de recursos que possibilitam representações dinâmicas dos objetos matemáticos nas aulas de trigonometria, trabalhos têm relatado resultados positivos, principalmente quando tais recursos priorizam a participação ativa do aluno na construção do seu conhecimento. De acordo com Celso (2015), ao executarmos uma proposta de aprendizagem, a diversificação dos recursos didáticos possibilita atingirmos a compreensão de um maior número de alunos.

Considerando os obstáculos encontrados no ensino-aprendizagem de Trigonometria feito no capítulo 2 e com o objetivo de auxiliar professores e alunos no ensino-aprendizagem da trigonometria, especificamente no assunto de razões trigonométricas, elaborou-se uma sequência de atividades na plataforma do site oficial do Geogebra.

A sequência é composta por 5 atividades que abordam as Razões Trigonométricas desde o triângulo retângulo até o ciclo trigonométrico, além de 2 atividades auxiliares que podem ser usadas como apoio no ensino dos assuntos de Semelhança e Triângulos.

As atividades a seguir foram reunidas no formato de um livro digital e encontram-se disponíveis no site da plataforma do *software* Geogebra em: https://www.geogebra.org/m/cumnnkvs.

No texto, as atividades podem ser acessadas isoladamente simplesmente clicando no título de cada uma delas. Recomenda-se que o leitor experimente a versão dinâmica no site para que obtenha o melhor proveito deste material. Mesmo assim, uma forma estática destas atividades pode ser encontrada no apêndice A deste trabalho com o intuito de garantir que o leitor possa ter uma rápida visão geral da estrutura das mesmas, facilitando a leitura das descrições feitas a seguir, cuja finalidade é deixar claros os objetivos que previmos para cada uma delas, bem como tecer algumas considerações que pensamos que poderão ser úteis para aqueles professores que possam vir a fazer uso delas com seus alunos.

Atividade 01: Triângulos

Tema: Classificação de triângulos quanto aos ângulos e reconhecimento de lados opostos e adjacentes.

Objetivos: Identificar o triângulo retângulo e seus elementos componentes, bem como relacionar os lados oposto e adjacente a um determinado ângulo.

Composição da atividade: Esta atividade é composta por uma construção dinâmica e 3 perguntas acerca da construção.

Considerações a respeito da atividade:

A atividade de triângulos busca reforçar o conhecimento prévio dos alunos, acerca dos assuntos sobre identificação do triângulo retângulo, denominação dos lados que o compõem (catetos e hipotenusa), além da identificação de catetos opostos ou adjacentes a um determinado ângulo.

É importante notar que a manipulação do triângulo permite que o aluno identifique uma infinidade de triângulos retângulos em variados tamanhos e posições da malha, eliminando conclusões equivocadas a respeito da sua identificação.

Segundo Medeiros (2018) a maioria dos erros cometidos em questões, que envolvem o assunto de razões trigonométricas, ocorre devido ao aluno não saber distinguir o lado oposto e o lado adjacente a um ângulo, resultando naturalmente na escolha equivocada da razão trigonométrica.

Diante da relevância do conceito, entendemos que a abordagem dinâmica, na qual o aluno pode experimentar variadas situações em relação a manipulação de lados e ângulos do triângulo, possa favorecer o entendimento deste conteúdo.

Caso o professor esteja trabalhando o assunto de trigonometria no triângulo com alunos que já estudaram a classificação de triângulos e as relações métricas no triângulo retângulo, esta atividade pode ser encarada como uma forma de consolidar os conceitos já estudados nas séries anteriores.

Atividade 02: Semelhança de triângulos

Tema: Casos de semelhança LLL, AA e LAL.

Composição da atividade: Esta atividade é composta por um texto introdutório, quatro construções dinâmicas e perguntas acerca delas.

Objetivo: Compreender os casos de semelhança de triângulos.

Considerações a respeito da atividade:

No estudo de trigonometria a semelhança de triângulos é um dos assuntos mais importantes, segundo Lima (2012) ela é a sua base de sustentação, porém quando se trata de ensino/aprendizagem deste assunto, ele é apontado como de difícil compreensão pelos estudantes.

Oliveira e Chiummo (2015) analisaram as respostas de alunos de graduação de matemática, em relação ao conceito de semelhança de triângulos, concluindo que um conjunto significativo de alunos apresentou diferentes dificuldades, expressas por erros conceituais e procedimentais, ou por concepções equivocadas desse conteúdo.

Pereira e Pereira (2016) verificaram que numa amostra de 100 alunos do ensino médio de uma escola pública o estado do Pará, a maioria não teve contato com o conceito de semelhança e mesmo os que tiveram apresentaram aprendizagem insatisfatória. A pesquisa revelou também que quase nunca os professores utilizam *softwares* de geometria dinâmica como recurso metodológico.

Diante dessas dificuldades procuramos orientar o estudo sobre os principais casos de semelhança de triângulos. A elaboração da atividade considerou as seguintes etapas, noção intuitiva do assunto, construção do conceito e por último a formalização do conceito de semelhança de triângulos. Acreditamos que ao manipular os objetos, experimentar reduções, ampliações e proporções, o aluno pode descobrir regularidades até chegar ao formalismo final do conceito sem que este surja pronto e acabado.

Nesta atividade trabalhamos os principais casos de semelhança de triângulos: LLL (lado-lado-lado), AA (ângulo-ângulo) e LAL (lado-ângulo-lado).

Iniciamos a atividade com a intenção de explorar a noção intuitiva do aluno acerca de semelhança, desse modo não apresentamos as medidas dos lados nem dos ângulos, evitando informações inicialmente desnecessárias. Com base na pesquisa de Medeiros (2018), espera-se que ao manipular os triângulos, de acordo com as orientações dadas no enunciado, o aluno possa identificar as regularidades que ocorrem em relação a seus lados, em particular, o paralelismo que se observa em um dos pares de lados quando os outros dois pares de lados correspondentes estão sobrepostos.

Para explorar os conceitos relacionados aos casos de semelhança, utilizamos um triângulo dinâmico, no qual uma reta intersecta dois de seus lados mantendo-se paralela ao terceiro lado. Queremos que o aluno note que a mesma regularidade, observada intuitivamente para o triângulo apresentado na construção anterior desta atividade, ocorre também para outros triângulos que ele manipula através da construção. Outra observação que deve ser analisada é que a reta que intersecta o triângulo, ao dividi-lo, produz outro triângulo semelhante a ele.

A atividade trabalhou também com os casos de triângulos, que apesar de serem semelhantes, encontram-se numa posição refletida, não podendo ser sobrepostos. Segundo Medeiros (2018) essa é uma das fontes de erro cometidos pelos alunos, os quais ignoram a semelhança entre os triângulos em função da posição assumida pelas figuras. Nossa intenção é fazer com que o aluno perceba que a semelhança ocorre, apesar de o triângulo estar refletido e que, depois de feita a reflexão, essa semelhança pode ser observada da mesma forma que nas construções anteriores desta atividade.

Atividade 03: Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Tema: Razões trigonométricas

Composição da atividade: Esta atividade é composta por um texto introdutório, 1 construções dinâmicas, 2 tabelas e perguntas acerca delas.

Objetivo: Construir o conceito das razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo.

Considerações a respeito da atividade:

Uma das principais dificuldades, quando se trata de trigonometria no triângulo, é compreender as razões trigonométricas. Ao aplicar um teste diagnóstico, cujo objetivo foi identificar habilidades quanto ao uso das razões trigonométricas, Catharina (2017) mostrou que grande parte dos alunos não conseguem lançar mão dos conteúdos estudados em trigonometria quando precisam resolver problemas que envolvam o tema.

Fritzen (2011) comenta sobre a abordagem dada ao tema de razões trigonométricas encontrada em alguns livros didáticos e ressalta o predomínio do enfoque algébrico sobre o geométrico. Segundo ele, os autores iniciam o conceito em seu nível mais alto de abstração e generalização para, posteriormente, aplicarem valores numéricos às fórmulas.

No sentido de propor uma atividade que contemple a construção dos conceitos das razões trigonométricas no triângulo retângulo, usou-se a noção de semelhança, de acordo com a BNCC (2018) no que se refere a sua aplicação.

Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. (BNCC, 2012, p. 536).

Esta atividade orienta a construção dos conceitos das razões trigonométricas, seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo. A sua elaboração considera que os conteúdos básicos constantes nas atividades anteriores já tenham sido trabalhados em sala de aula, ou seja, o aluno é capaz de identificar um triângulo retângulo, os elementos que o compõem, bem como reconhecer quando um cateto é adjacente ou oposto a um ângulo agudo.

A atividade apresenta um triângulo retângulo dinâmico, cujos ângulos agudos podem ser ajustados, bem como os tamanhos de seus lados, ao manipular o triângulo é possível obter outros triângulos que servirão como recursos para nossa investigação. É desejável que cada aluno possa obter triângulos retângulos diferentes, para que os resultados obtidos não convirjam para os mesmos valores, evitando conclusões inconsistentes sobre o conceito que queremos formalizar.

A construção dos conceitos foi planejada a partir da organização em tabelas, dos dados correspondentes às medidas dos lados dos triângulos e das razões obtidas entre catetos e hipotenusa. Ao perceber as regularidades, ou seja, que as razões são sempre constantes, o aluno é instigado a refletir, conjecturar, comparar e discutir seus resultados, como sugere a BNCC (2018). Queremos que o aluno conclua que os diferentes resultados dependem do ângulo que cada um escolheu e não do tamanho dos lados dos triângulos.

Fritzen (2011) chama atenção para o fato de que as atividades devem conter indicações para que os alunos percebam as regularidades referentes às razões entre as medidas dos lados do triângulo retângulo, quando o ângulo é mantido constante. A partir da constituição desses elementos podemos formalizar o conceito de razões trigonométricas.

Atividade 04: Razões trigonométricas no ciclo trigonométrico

Tema: Razões trigonométricas

Composição da atividade: Esta atividade é composta por um texto introdutório, 3 construções dinâmicas e perguntas acerca delas.

Objetivo: Compreender que as razões trigonométricas já definidas no triângulo retângulo possuem uma definição equivalente a partir do ciclo trigonométrico.

Considerações a respeito da atividade:

Uma das maiores dificuldades na compreensão dos assuntos de trigonometria diz respeito a conceitualização e representação dos objetos matemáticos. Dionizio e Brandt (2011,

p. 4409) observaram que, ao utilizar diferentes representações de um objeto matemático, os alunos procedem como se essas não se referissem a esse mesmo objeto.

Alves (2017) sugere agregar a circunferência trigonométrica já no ensino fundamental, trabalhando as razões trigonométricas obtidas no triângulo retângulo e estendendo os conceitos de seno, cosseno e tangente para ângulos não agudos.

A atividade proposta por nós foi elaborada com o objetivo de construir os conceitos de razões trigonométricas a partir da representação no ciclo trigonométrico. Espera-se que já exista uma apropriação conceitual das razões trigonométricas no triângulo retângulo, principalmente no que se refere a dependência destas em relação aos ângulos e não ao tamanho dos triângulos.

A nossa intenção em trabalhar somente os ângulos compreendidos no intervalo de 0º a 90º tem por objetivo mostrar ao aluno que as razões trigonométricas obtidas no triângulo retângulo, também são válidas quando obtidas por meio de outras representações, neste caso o ciclo trigonométrico.

Queremos que, ao manipular a construção, o aluno perceba que existe uma relação definida entre o raio da circunferência e a hipotenusa do triângulo retângulo e que ao variar os ângulos agudos do triângulo, se formarão diferentes triângulos retângulos com a mesma hipotenusa.

Diante desta apropriação queremos que o aluno teste diferentes hipóteses para o tamanho do raio da circunferência comparando os resultados, dessa forma poderá concluir sobre a vantagem de utilizar uma circunferência de raio unitário. Espera-se que, a partir da compreensão desses conceitos, o aluno possa concluir que as coordenadas do ponto coincidem com as razões seno e cosseno. A partir dessa formalização partimos para o conceito de tangente.

No tratamento do conceito de tangente, espera-se que o aluno, ao manipular a construção, sabendo que o raio da circunferência é unitário, observe que esta razão trigonométrica corresponde a ordenada do ponto P, já que o cateto adjacente é igual a 1 (raio unitário).

Espera-se que o aluno perceba que as razões trigonométricas do seno, cosseno e tangente, anteriormente obtidas no triângulo retângulo, podem ser também definidas de outro modo, a partir do ciclo trigonométrico.

Atividade 05: Razões trigonométricas de ângulos maiores que 90°

Tema: Generalização do conceito de razões trigonométricas a partir do ciclo trigonométrico

Composição da atividade: Esta atividade é composta por um texto introdutório, três construções dinâmicas e perguntas acerca delas.

Objetivo: Estender o conceito de razões trigonométricas para ângulos de 90° a 360°.

Considerações a respeito da atividade:

Esta atividade trabalha os conceitos de razões trigonométricas para ângulos maiores que 90°, mas ainda limitados ao ângulo máximo de 360°. Consideramos que o aluno já compreenda como são obtidas as razões trigonométricas no ciclo para ângulos de 0º a 90º.

A fim de representar as relações de simetria entre os ângulos em cada par de quadrantes, Silva (2011) propôs atividades utilizando material concreto e o *software* Geogebra. Em seus resultados a autora destaca que o uso do *applet* facilitou a descoberta de regularidades pelos alunos.

Na elaboração da atividade procuramos explorar primeiramente a compreensão geométrica do assunto usando relações de simetria, na qual buscamos orientar o aluno a perceber que em cada par de quadrantes há uma relação diferente entre as razões trigonométricas e que essas podem ser iguais ou simétricas entre si.

A partir dessa apropriação espera-se que o aluno esteja pronto para estabelecer as relações que existem entre as razões trigonométricas dos ângulos maiores que 90° e as dos ângulos do primeiro quadrante. Nossa intenção é mostrar ao aluno que a partir das associações geométricas é possível estabelecer relações que permitam determinar as razões trigonométricas para todo o ciclo trigonométrico.

4.2 Planejamento da condução das atividades

Para a realização das atividades contactamos com uma professora de matemática do ensino médio da rede estadual de ensino. O objetivo foi discutirmos sobre a proposta das atividades e quais poderiam ser aplicadas. Foi definido que seriam as atividades de Triângulos e Razões Trigonométricas. Após o aceite, definimos as turmas, datas e horários de aplicação.

A professora responsável pelas turmas conversou previamente com os alunos sobre a aplicação das atividades, explicando a eles sobre a importância da participação de todos e que as atividades fariam parte deste trabalho de conclusão de curso.

As atividades foram desenvolvidas em um único encontro com 15 alunos de duas turmas do 2º ano do ensino médio da escola estadual Madre Imaculada, em uma mesma sala de reunião do *Google Meet*, no dia 16/06/2021, no horário da manhã. Essas atividades foram conduzidas por mim com o acompanhamento da professora das turmas, sendo destinado o tempo de 50 minutos para cada atividade, tendo a segunda atividade se estendido cerca de 15 minutos além do tempo previsto. Ressalta-se que não se tratou de uma atividade extra, da qual os alunos participariam espontaneamente, mas de uma atividade dentro do tempo regular de aula dos alunos.

Destaca-se que as atividades ocorreram de forma virtual, devido ao fato de estarmos sob as condições do ensino remoto emergencial, imposto pela pandemia de COVID-19, o que a princípio não interferiu na condução das mesmas, pois foram elaboradas para serem trabalhadas num ambiente digital.

Os encontros foram divididos em três momentos: conversa com os alunos sobre os objetivos da aplicação das atividades; apresentação do Geogebra, mostrando as vantagens de aprender com as manipulações das construções dinâmicas, seguidas pela apresentação das atividades e as orientações sobre as questões propostas; e, por último, disponibilização do *link* de acesso para a realização das atividades no Geogebra *Classroom*, o que foi feito tanto pelo *chat* da reunião quanto pelo grupo criado pela professora das turmas especificamente para a disciplina em aplicativo de mensagens instantâneas.

Os alunos acessaram as atividades tanto através de *notebook* quanto por meio de *smartphones*. Para cada atividade criou-se uma sala no ambiente Geogebra *Classroom*, no qual foi possível acompanhar o progresso da realização das atividades executadas pelos alunos.

4.3 Descrição e análise das atividades conduzidas

Nesta seção buscamos descrever a condução das atividades, ao mesmo tempo em que analisamos os diálogos que ocorreram durante a orientação e execução destas.

Ao invés de fornecer um tempo para que os alunos realizassem cada atividade para então discuti-las ao final, optamos por uma dinâmica em que cada item era lido por mim e sendo discutido a medida em que eram resolvidos pelos alunos.

As interações encontram-se representadas através de perguntas e comentários feitos durante o encontro.

4.3.1 Atividade Triângulos

Segundo a professora, os alunos dessa turma já tinham visitado os conteúdos de ângulos, triângulos e razões trigonométricas em séries anteriores.

Do total de alunos presentes, cinco alunos interagiram verbalmente discutindo o tema.

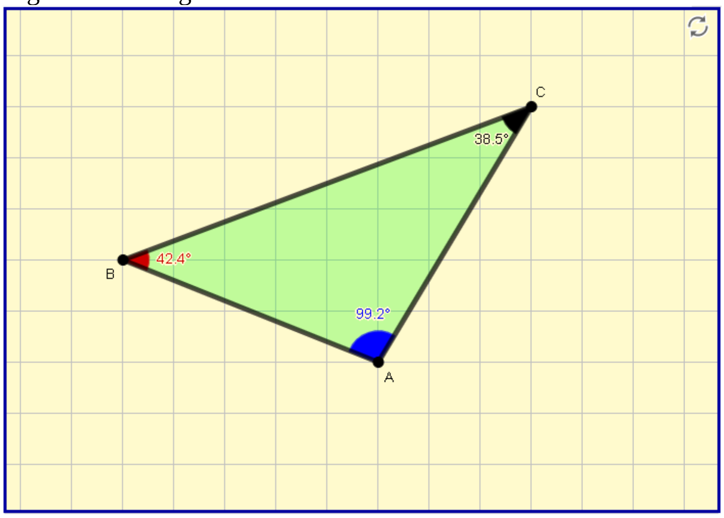
As questões da atividade são baseadas na construção de um triângulo (Figura 1), o qual pode ter seus vértices deslocados (pontos A, B e C), de modo que seus lados e ângulos sejam modificados. As questões se desdobram em itens.

A seguir apresentamos, dentro de caixas de texto, o enunciado daqueles itens cujos registros nos pareceram mais relevantes, apresentando logo abaixo destes enunciados nossa análise a respeito dos mesmos.

Inicialmente perguntamos para os alunos sobre sua familiaridade com o Geogebra e descobrimos que nenhum deles havia tido, até então, contato com o *software*. Contudo, estes não apresentaram dificuldades em realizar as manipulações exigidas pela atividade.

Vejamos a seguir o que aconteceu durante o transcorrer do encontro.

Figura 1 – Triângulo ABC



Fonte: Autor (2020)

Questão 1: Quanto aos ângulos do triângulo responda: **(a) Qual a cor que o triângulo assume ao se tornar um triângulo retângulo?**

Como a maioria dos alunos usou o *smartphone* para acessar a aula, surgiu a preocupação com a transição que haveria entre a execução da atividade criada no Geogebra *Classroom* e a reunião do *Google Meet*, na qual a aula estava se passando, por isso, inicialmente compartilhei minha tela com os alunos apresentando a atividade como um todo, mostrando a possibilidade de manipulação do triângulo a partir dos vértices e realizando a leitura da primeira questão. A seguir, os alunos foram orientados a acessar a atividade através do *link* disponibilizado no *chat* da aula para execução das tarefas.

Ao manipular os vértices A, B e C do triângulo os alunos deveriam concluir que quando um dos ângulos se torna reto o interior do triângulo fica vermelho, podendo ficar ainda verde ou azul dependendo de sua classificação quanto aos ângulos.

Vejamos o que foi registrado por nós dos diálogos que ocorreram entre os alunos a respeito deste item.

Aluno1: Esse triângulo é o mesmo do teorema de Pitágoras, né?

Aluna 2: Os ângulos podem ficar desse jeito? (A aluna faz referência aos dois ângulos representados por números decimais).

Aluno 3: Quando eu mexo aparecem três cores diferentes.

Embora o Aluno 1 não tenha dito explicitamente que um dos ângulos do triângulo era igual 90°, tudo indica que ele já sabia que se tratava de um triângulo retângulo. Nossa crença se baseia na menção feita pelo aluno ao teorema de Pitágoras que, como sabemos, se refere a este tipo de triângulo. A sua fala fez desencadear a reação dos outros dois colegas, conforme apresentado abaixo.

A Aluna 2 aceita a conclusão do Aluno 1, mas chega num impasse, pois aparentemente acredita que os dois outros ângulos do triângulo só poderiam ser representados por números inteiros e que isso poderia invalidar a conclusão de que este é um triângulo retângulo, como provavelmente ela estaria acostumada a encontrar nos livros.

O Aluno 3 busca caracterizar o que foi solicitado, usando a manipulação puramente exploratória do triângulo, tentando possíveis posições para os pontos A, B e C, mas ainda não estabelece a conexão entre o triângulo retângulo e a cor vermelha, embora procurasse compreender o que ocasionava a mudança de cor.

Durante esta aplicação foram feitas algumas intervenções, nelas procurei manipular o triângulo para que os alunos visualizassem triângulos retângulos em diferentes posições, incluindo casos nos quais os lados dos triângulos não estavam posicionados na horizontal, evitando equívocos no reconhecimento das figuras e dando maior abrangência aos exemplos.

(b) Qual a cor que o triângulo assume ao se tornar um triângulo acutângulo?

Ao manipular os vértices A, B e C do triângulo os alunos deveriam concluir que quando todos os ângulos internos do triângulo forem menores do que 90°, o interior do triângulo assume a cor azul.

Aluno 1: Como é um triângulo acutângulo?

Os alunos pareciam não conhecer ou não lembrar o conceito de ângulo agudo, por isso fiz uma intervenção, já que somente a mudança de cor do triângulo parecia não ser suficiente para levá-los a uma conclusão sobre o conceito. Manipulei o triângulo retângulo (trabalhado na questão anterior) e conceituei o ângulo agudo. Ao que parece o conceito foi compreendido, como evidencia o diálogo abaixo.

Mediadora: Como vocês procederiam para tornar todos os ângulos do triângulo agudos?

Aluno 1 e Aluno 2: Fazendo os ângulos ficarem menores que 90°.

(c) Qual a cor que o triângulo assume ao se tornar um triângulo obtusângulo?

Questionados sobre a cor que torna o triângulo obtusângulo todos os alunos responderam corretamente que a cor era a verde.

Parecia que o item havia sido respondido por eliminação das alternativas, pois restava apenas uma cor para ser visualizada. Entretanto, questionei qual característica teria o referido triângulo e como fariam para obtê-lo, recebendo a seguinte resposta.

Aluno 1: Aumentando o ângulo do triângulo ele fica verde.

Apesar do Aluno 1 não citar o termo ângulo obtuso no momento em que observa o ângulo maior que 90°, ele parece usar essa noção ao responder à questão, quando se refere a "aumentar o ângulo".

Questão 2: **Desloque os pontos A, B e C, e responda o que se pede.**

(a) Ao tornar o triângulo reto em C, identifique os catetos e a hipotenusa

(b) Ao tornar o triângulo reto em B, identifique os catetos e a hipotenusa.

(c) Ao tornar o triângulo reto em A, identifique os catetos e a hipotenusa.

Ao tornar o ângulo igual a 90° no vértice indicado, os alunos deveriam identificar os elementos do triângulo.

Vejamos os diálogos registrado por nós que ocorreram entre os alunos a respeito deste item.

Aluno 1: Os catetos são os menores!

Aluno 3: Como eu faço pra ficar reto em C?

Os alunos parecem não associar o termo reto ao ângulo de 90°. Nesse momento fiz uma intervenção explicando a eles o significado matemático do termo e eles questionaram:

Aluno 2: Não é o mesmo que dizer que é retângulo em C?

A linguagem usada de forma coloquial pelo aluno durante a aula suscita a participação da mediadora para que o aluno se aproprie da linguagem matemática. Segundo Fritzen (2018) é através da inter-relação entre as duas linguagens que acontece a apropriação dos conhecimentos esperados.

Em relação a identificação de catetos e hipotenusas não houve registros que indicassem alguma dificuldade na identificação destes elementos. Possivelmente a fala do Aluno 1 fez com que os outros alunos também reconhecessem a definição dos catetos dada por ele, como sendo os lados menores do triângulo.

Questão 3: No item (c) da questão anterior você obteve um triângulo retângulo reto em A. Com base nesse triângulo responda:
(a) Qual o cateto oposto ao ângulo vermelho?
(b) Qual o cateto adjacente ao ângulo vermelho?
(c) Qual o cateto oposto ao ângulo preto?
(d) Qual o cateto adjacente ao ângulo preto?
(e) Qual o lado que corresponde a hipotenusa?

A partir do triângulo retângulo formado, conforme o item indicado, os alunos deveriam identificar os catetos opostos e adjacentes aos ângulos vermelho e preto do triângulo.

Os diálogos abaixo ocorreram entre os alunos durante a resolução da questão 3.

Aluno 4: Eu nunca sei isso!

Aluno 1: Oposto é quando se está de frente!

Aluno 3: Quando é que é adjacente?

Os alunos parecem compreender o significado de oposto, quando usam o termo "de frente" em substituição a esta palavra, mas o mesmo não acontece quando se trata da palavra adjacente, pois não se trata de uma palavra usual do cotidiano do aluno. Eles parecem confundir a hipotenusa com um dos catetos, principalmente quando se trata do cálculo do cosseno de um ângulo, pois os dois lados do triângulo envolvidos nesse cálculo formam o ângulo de referência e, portanto, são ambos adjacentes a ele.

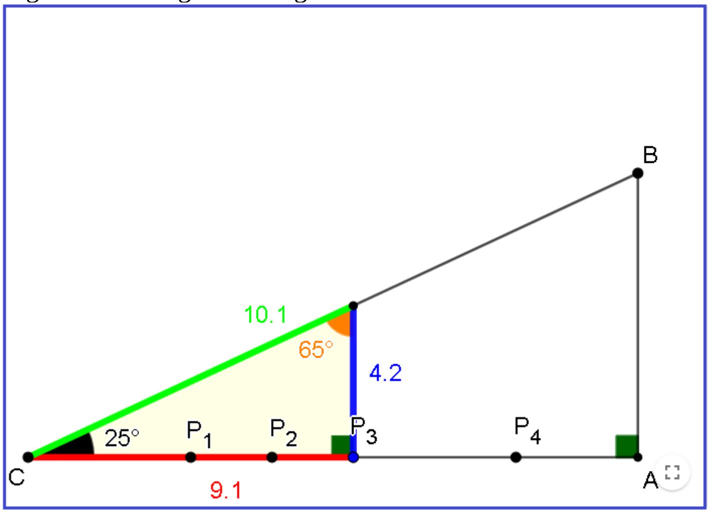
Nesse momento fiz uma intervenção reforçando a identificação de catetos e hipotenusa e assim finalizamos a primeira sessão das atividades.

Dos 15 alunos presentes na reunião, todos acessaram a atividade no Geogebra *Classrom*, desse total dois finalizaram as tarefas durante a aula e o restante ao longo da semana. Além dos alunos presentes, mais um 16º aluno realizou também a tarefa.

4.3.2 Atividade Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Ainda na mesma sala de reuniões com a mesma turma, compartilhei a segunda atividade sobre razões trigonométricas no triângulo. Iniciei a atividade fazendo um breve histórico sobre trigonometria, no que diz respeito ao seu surgimento e desenvolvimento. A seguir passei a apresentar a construção (Figura 02) que norteia as questões da atividade.

Figura 2 – Triângulo Retângulo ABC



Fonte: Autor (2020).

Figura 3 - Tabela para preenchimento dos valores correspondentes aos elementos do triângulo ABC referente ao ângulo preto

Pontos	Cateto oposto (O)	Cateto Adjacente (A)	Hipotenusa (H)	O/H	A/H	O/A
P1						
P2						
P3						
P4						
A						

Fonte: Autora (2020).

A Figura 2 apresenta um triângulo retângulo ABC cujos pontos B e C podem ser deslocados para modificar os valores dos ângulos associados a estes vértices. O ponto azul pode ser deslocado sobre o lado AC do triângulo. Ao posicioná-lo sobre cada um dos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 o aluno deveria preencher a tabela da Figura 3, informando as medidas dos lados solicitados, tomando como referência o ângulo preto e depois preencher outra tabela similar referente ao ângulo laranja.

Nesta atividade fiz uma leitura detalhada, com os alunos, mostrando e comentando as possibilidades de manipulação da construção (Figura 2). Para que houvesse uma melhor compreensão, segui dando um exemplo. Posicionei o ponto azul no ponto P_1 e juntamente com os alunos, entre perguntas e respostas, fiz o preenchimento da primeira linha da tabela (Figura 3), o que foi importante no sentido de dirimir dúvidas a respeito do uso do teclado virtual do GeoGebra e também para explicar o significado das abreviações utilizadas no cabeçalho da tabela.

A seguir pedi aos alunos que acessassem as atividades através do *link*, disponibilizado no *chat* da reunião e que preenchessem a tabela, aconselhando-os a realizarem os cálculos necessários com o auxílio da calculadora.

Vejamos alguns diálogos registrados.

Aluno 1: É obrigado fazer a mesma coisa pra todos os triângulos?

Aluno 2: Cada um vai ter que formar o seu triângulo?

Aluno 3: É muito trabalhoso!

Nota-se nos registros das falas dos alunos, apresentados acima, que houve uma resistência quanto a realização desta tarefa. Entrei então em negociação com os alunos solicitando que preenchessem apenas as duas primeiras linhas da tabela.

Questão 01

(a) Você notou alguma variação nos valores que encontrou nas colunas: O/H, A/H e O/A?

Vejamos agora os registros dos comentários que surgiram depois do preenchimento das duas primeiras linhas da tabela pelos alunos.

Aluno 1: Professora eu acho que tem variação!

Aluno 2: O meu está dando igual!

Nota-se que não houve um consenso entre os alunos na resposta para este item, o que me motivou a fazer uma intervenção. Assim, pedi que deslocassem o ponto azul para P_3 e preenchessem a próxima linha da tabela.

Aluno 1: Os números deram quase iguais!

Aluno 2: Tem uma pequena diferença!

Os alunos conversam sobre os números que encontraram, mas aparentam precisar de mais informações para concluir algo.

Logo abaixo da questão 1, o texto informa sobre o fato de que, devido a semelhança entre os triângulos que foram trabalhados, os valores obtidos para as razões **O/H**, **A/H** e **O/A** são constantes para o mesmo ângulo, mas esta informação parece não causar efeitos no modo de analisar a questão.

É possível que os alunos precisem dessa conexão para compreender os valores que encontraram, dessa maneira fiz uma intervenção usando os triângulos da construção para mostrar a eles do que se tratavam as razões de semelhança.

(b) Como você justifica o resultado do item (a)?

Os alunos deveriam identificar a regularidade entre os números das colunas e justificar o item anterior associando-a a propriedade de semelhança entre os triângulos.

Aluno 1: Não sei como explicar!

Os alunos parecem perceber a regularidade existente entre os números das colunas, mas não associam esta, com a propriedade de semelhança entre os triângulos. É possível que eles ainda não tenham tido contato com este assunto.

Questão 02: Converse com seus colegas para responder as perguntas abaixo.

(a) Os resultados que eles encontraram nas três últimas colunas também foram constantes?

(b) Os valores obtidos por eles nessas colunas foram os mesmos que você obteve?

(c) Caso a resposta para a pergunta anterior seja negativa, o que você acha que produziu os resultados diferentes? Caso seja positiva, o que justifica isso?

Esta questão exigiria uma maior interação entre os alunos, interação esta que foi prejudicada pelas limitações de tempo somadas às dificuldades operacionais criadas pelo modelo de ensino emergencial remoto, como, por exemplo, a necessidade do compartilhamento de telas pelos alunos.

Vejamos abaixo as respostas dadas ao item a.

Aluno 1: Os meus foram quase iguais!

Aluno 2: Os meus também!

Os alunos parecem perceber que os números convergem para um resultado próximo de um valor constante, talvez se um maior número de linhas da tabela tivesse sido preenchido por eles, como previa a atividade, as noções de aproximação e arredondamento tivessem ficado mais claras.

Não houve registros sobre os itens b e c. Além das dificuldades de interação já mencionadas, é possível que o contexto (nisto incluo cansaço mental, tempo em frente a tela, oscilação de internet, dentre outros em que estávamos imersos naquele momento) tenha influenciado na falta de respostas. Outra hipótese é a dificuldade frequentemente apresentada pelos alunos para desenvolver argumentações ou expor justificativas. No entanto, não há como inferirmos sobre o que eles poderiam ter dito a respeito dos itens.

A seguir apresentamos nossas considerações finais a respeito das atividades desenvolvidas.

5 Considerações finais

A experiência com a condução destas atividades nos leva a crer que a inserção das TDIC nas aulas de matemática cria novas possibilidades no processo de ensino-aprendizagem de trigonometria. A maneira como conduzimos as atividades criadas no *software* Geogebra favoreceu a participação dos alunos, pois o dinamismo das figuras e das cores e a possibilidade de manipulação pelos próprios alunos facilitaram a interação destes no sentido de comparar, questionar e testar hipóteses confirmando a pesquisa de Medeiros (2018).

Ao considerarmos o contexto em que as atividades foram desenvolvidas, ou seja, na forma de aulas remotas, apontamos principalmente a falta de acesso dos alunos à internet e as dificuldades para perceber as reações dos alunos que não interagiram por meio do chat, visto que não víamos seus rostos em função das câmeras desligadas.

Um bom planejamento das atividades pode direcionar o olhar dos discentes para os temas sobre os quais se deseja que estes produzam reflexões e o professor deve estar atento as pistas deixadas pelos alunos a partir dos diálogos provocados por tais reflexões. Além disso, acreditamos que a inserção de atividades de manipulação dinâmicas no ensino de trigonometria pode se constituir em uma estratégia pedagógica que auxilia na compreensão dos temas. As observações apresentadas por nós sobre o desenvolvimento das atividades não esgotam o tema e podem servir como um ponto de partida para outras pesquisas. Há ainda, por exemplo, os registros das respostas dos alunos no Geogebra *Classroom*, que não foram explorados por nós neste trabalho, mas que podem servir como importantes fontes de análise das direções de produção de significado realizadas pelos discentes em trabalhos futuros.

Chama-se atenção para a presença fundamental do professor como mediador e motivador da aprendizagem, auxiliando diante possíveis dificuldades. Esperamos que as atividades propostas aqui sejam mais um recurso a ser utilizado pelo professor no ensino de razões trigonométricas.

Consideramos que ainda há espaço para uma continuidade da atividade proposta, podendo esta ser ainda estendida para tratar do tema das funções trigonométricas com o mesmo dinamismo e seguindo os mesmos pressupostos educacionais utilizados nas atividades já elaboradas.

Esperamos que esta pesquisa sirva como um dos recursos a serem usados por professores e alunos nas aulas de trigonometria.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, Diego. **A trigonometria do ensino fundamental para o ensino médio: uma proposta didática**. 2017. 68f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional). Instituto de matemática pura, Rio de janeiro. 2017. Disponível em: https://is.gd/izdq1I. Acesso em: 12 de outubro de 2019.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Disponível em:http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 19 de julho de 2020.

CALASANS, Aline Oliveira. **Uma proposta de sequência didática para o ensino de trigonometria no ensino médio**. 2019. 63f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2019. Disponível em: https://is.gd/CiPcAX. Acesso em: 12 de outubro de 2020.

CATHARINA, Carlos Ronaldo. **Uma proposta para aprendizagem de conceitos trigonométricos no ensino fundamental**. 2019. 63f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campo dos Goytacazes, 2019. Disponível em: https://is.gd/HJ22uQ. Acesso em 15 de outubro de 2020.

CELSO, Ana Berenice Pedroso Biazutti. **Trigonometria no Triângulo Retângulo: uma abordagem prática para a construção de conceitos**. 2015. 30f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de São João Del Rei, São João del Rei. 2015. Disponível em: https://is.gd/YsIBTY. Acesso em: 2 de agosto de 2020.

DIONÍSIO, Fátima Queiroz; BRANDT, Célia Finck, **Análise das dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio em trigonometria**. X Congresso Nacional de Educação – EDUCERE, I Seminário Internacional de Representações Sociais, subjetividade e educação – SIRSSE. Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba. 7 a 10 nov. 2011. Páginas 4408-4421.

FEIJÓ, Rachel Saffir Araújo Alves. **Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria: um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal**. 2018. 108 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade de Brasília, Brasília, 2018. Disponível em: https://is.gd/08li7L. Acesso em: 10 de setembro de 2019.

FERREIRA, Guilherme Francisco. **Por uma epistemologia da tecnologia na Educação Matemática.** 2020. 177 f. Tese Doutorado. Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2020. Disponível em: https://is.gd/yDzhSd. Acesso em: 30 de junho, 2020.

FERREIRA, Guilherme Francisco; DANTAS, Sérgio Carrazedo. **Notas sobre a disciplinarização do uso de recursos tecnológica**. I UNESPAR-Encontro Paranaense de Tecnologia na Educação Matemática. 2018. Páginas 1-15.

FREITAS, Raquel Silva de; FARIAS, Maria Camila de Araújo; SILVA, José Lucas Galdino da; BARREIRO, José Lindomberg. **As dificuldades apresentadas por professores e alunos no ensino da Trigonometria**. III CONEDU-Congresso Nacional de Educação. 2016. Disponível em: https://is.gd/ewdYvx. Acesso em: 10 de maio de 2019.

FRIGO, Priscila Sonza; CARDOSO, Franciele Catelan. **Resolução de situações-problema em Trigonometria**. IV Escola de inverno de educação Matemática. 2° Encontro Nacional Pibid Matemática. Anais p. 1-13. Rio grande do Sul, Santa Maria. 2014.

FRITZEN, Karina Rossa. **Estudo do sistema conceitual de trigonometria no ensino fundamental uma leitura histórico-cultural**. 2011. 97 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade do extremo sul Catarinense, Criciúma, 2011.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. v. 1. 280 p. 10ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MEDEIROS, Zildomar Rodrigues de. **O ensino dos conceitos básicos de trigonometria no triângulo retângulo com o uso do *software* educacional GeoGebra**. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018. Disponível em: https://is.gd/BPqncF. Acesso em: 10 de janeiro de 2021.

MEDEIROS, Weskley Carneiro de. **Uma proposta para o ensino de Trigonometria utilizando o *software* Geogebra.** 2014. 118 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014. Disponível em: https://is.gd/5OUnv1. Acesso em:

NASCIMENTO, Maurício Alves do. **Ensino-aprendizagem de Trigonometria através da resolução e exploração de problemas e cotidiano escolar**. 2014. 218 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014. Disponível em:

OLIVEIRA, Emílio Celso de; CHIUMMO, Ana. **Análise da aprendizagem de semelhança de triângulos por alunos de graduação em matemática.** Revista eletrônica VIDYA. Vol. 35, N. 2, Disponível em: https://is.gd/8OUUXy. Acesso em 15 de janeiro de 2020, p. 179-195, 2015.

PEIXOTO, Joana. **Relações entre sujeitos sociais e objetos técnicos: uma reflexão necessária para investigar os processos educativos mediados por tecnologias**. Revista Brasileira de Educação, Rio de Janeiro, v. 20, n. 61, p. 317-32, 2015

PEREIRA, Sandra; PEREIRA, Marcos. **O ensino de semelhança de triângulos na opinião de alunos**. In. XII Encontro Nacional de Educação Matemática, ENEM. 2016, São Paulo, Anais [...] São Paulo: SBEM, 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf Acesso em: julho, 2020.

QUINTANEIRO, Welerson. **Representações e Definições Formais em Trigonometria no ensino Médio**. 2010. 144 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010. Disponível em: https://is.gd/mSlS3t. Acesso em: 10 de dezembro de 2019.

SILVA, Marlizete Franco da. **Trigonometria, modelagem e tecnologias: um estudo sobre uma sequência didática**. 236 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática). Belo Horizonte: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais,2011. Disponível em: https://is.gd/uWRW9G. Acesso em: 10 dezembro de 2019.

SILVA, Marlizete; FROTA, Maria. **Uma experiência com modelagem da Trigonometria associada a situações práticas**. In. X Encontro Nacional de Educação Matemática, ENEM. 2010, Salvador, Bahia. Anais [...], p. 1-10, SBEM, 2010. Disponível em:

SILVA, Marlon Rafael Krein. **A BNCC e suas implicações no Ensino Médio: a utilização do *software* Geogebra no conteúdo de razões trigonométricas**. 2020. 88 f Dissertação (Mestrado) – Educação Científica e Matemática. Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Dourados, 2020. Disponível em: https://is.gd/IvGrZ6. Acesso em: 30 Junho de 2020.

SOUZA, Flávio Ribeiro de. **Ensino de funções trigonométricas com *applets***. 97f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Campos do Goytacazes, 2018. Disponível em: https://is.gd/xuXnPW. Acesso em: setembro, 2020.

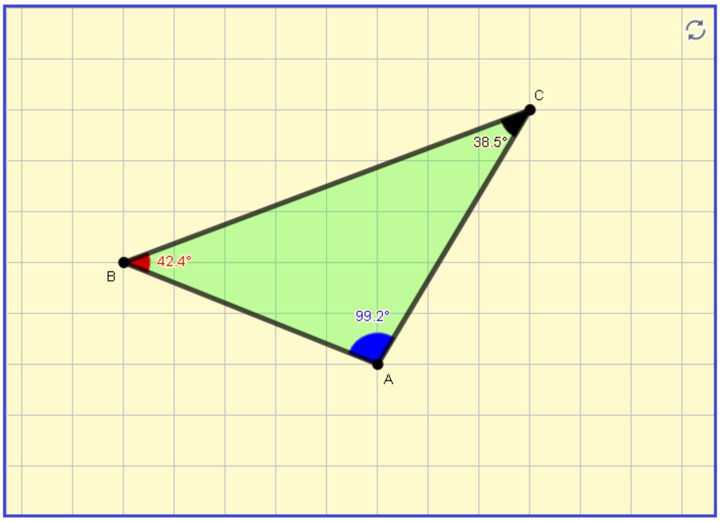
VASSALO, Victor. **Razões Trigonométricas: Uma Abordagem do Cotidiano**. 47 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de fora, 2017. Disponível em: https://is.gd/NAsWHh. Acesso em: junho, 2020.

ZAMPIERI, Maria Teresa; JAVARONI, Sueli Liberatti. **A constituição de ambientes colaborativos de aprendizagem em ações de formação continuada: Abordagem experimental com Geogebra.** Boletim de Educação Matemática – BOLEMA. vol. 32, n. 61, p. 375-397, 2018. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a04. Acesso em: 20 de julho de 2021.

APÊNDICE A – Atividades do livro digital

Atividade 01: Triângulos

Na construção abaixo você pode deslocar os pontos A, B e C do triângulo, modificando seus lados e ângulos. Ela servirá de referência para as questões 1, 2 e 3.



Questão 01

Quanto aos ângulos do triângulo responda: (a) Qual a cor que o triângulo assume ao se tornar um triângulo retângulo? (b) Qual a cor que o triângulo assume ao se tornar um triângulo acutângulo? (c) Qual a cor que o triângulo assume ao se tornar um triângulo obtusângulo?

Questão 02

Desloque os pontos A, B e C, e responda o que se pede. (a) Ao tornar o triângulo reto em C, identifique os catetos e a hipotenusa. (b) Ao tornar o triângulo reto em B, identifique os catetos e a hipotenusa. (c) Ao tornar o triângulo reto em A, identifique os catetos e a hipotenusa.

Questão 03

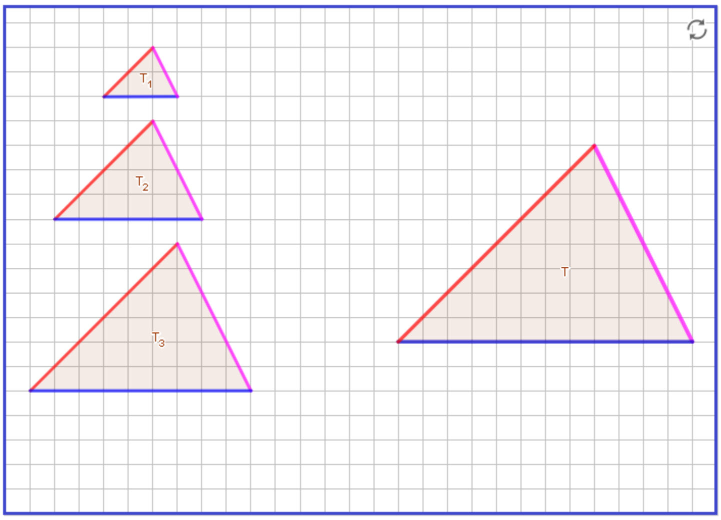
No item (c) da questão anterior você obteve um triângulo retângulo reto em A. Com base nesse triângulo responda: (a) Qual o cateto oposto ao ângulo vermelho? (b) Qual o cateto adjacente ao ângulo vermelho? (c) Qual o cateto oposto ao ângulo preto? (d) Qual o cateto adjacente ao ângulo preto? (e) Qual o lado que corresponde a hipotenusa?

Atividade 02: Semelhança de triângulos

O triângulo é o polígono mais explorado na geometria. A sua aplicação em problemas práticos remonta há muitos séculos, isso se deve ao fato de ser o único polígono rígido (isto é, não permite movimento em suas junções), o que favorece sua aplicação em vários tipos de construções, por exemplo em pontes e estruturas rígidas. Acabamos de verificar as condições necessárias para estabelecer a semelhança entre duas figuras quaisquer. Para o caso de triângulos, veremos que basta apenas analisar alguns critérios para que possamos identificar a semelhança.

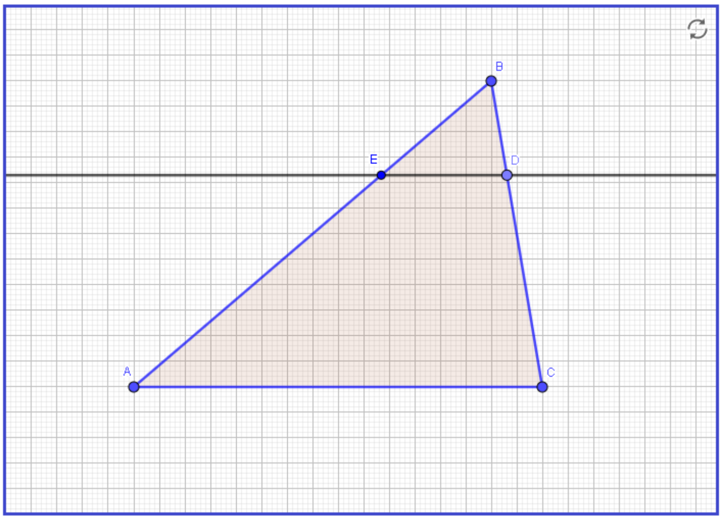
Noção intuitiva

A construção abaixo apresenta 4 triângulos semelhantes: T, T_1, T_2 e T_3. Coloque o triângulo T_1 sobre o triângulo T de modo que dois lados de mesma cor fiquem sobrepostos. Agora responda: o que aconteceu com os lados que não ficaram sobrepostos? O mesmo acontece se repetirmos o procedimento para os outros dois triângulos T_2 e T_3?



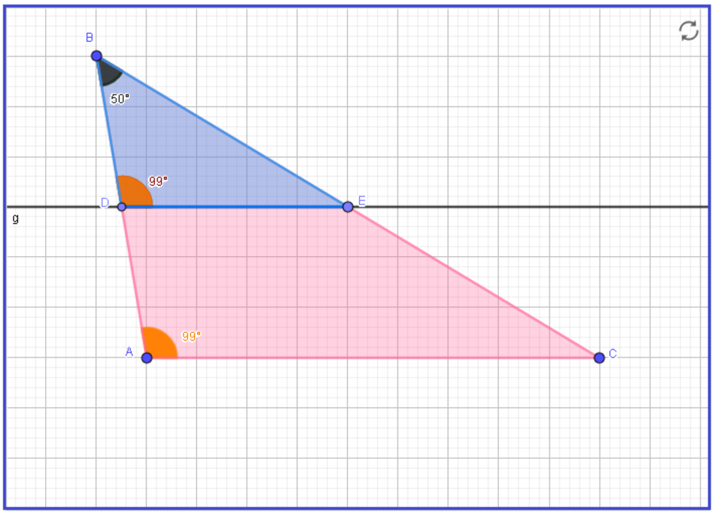
Questão 01

A construção abaixo mostra um triângulo ABC intersectado por uma reta paralela ao lado AC. Os pontos **A**, **B, C** e **D** podem ser deslocados modificando seus lados e ângulos. Agora responda: (a) Ao intersectar dois lados do triângulo ABC, a reta determina um novo triângulo. Você consegue identificá-lo? Se sim, indique seus vértices. (b) Agora desloque o ponto D e responda: embora os triângulos EBD e ABC apresentem tamanhos diferentes, eles possuem a mesma forma? Isto é, eles são semelhantes?



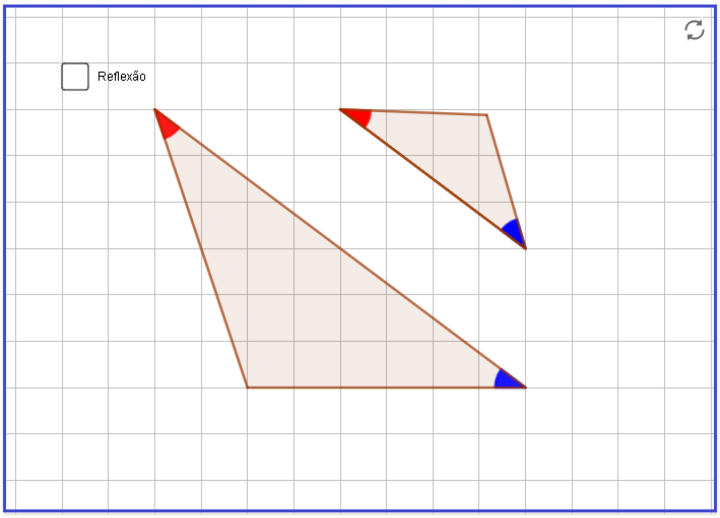
Questão 02

Na construção abaixo o ângulo preto é comum aos triângulos ABC e DBE. Ao movimentarmos o ponto E até que a reta g torne-se paralela ao lado AC, tornamos os triângulos ABC e DBE semelhantes, como visto nas questões anteriores. Diante dessa afirmação responda: o que acontece com o par de ângulos laranjas neste caso?



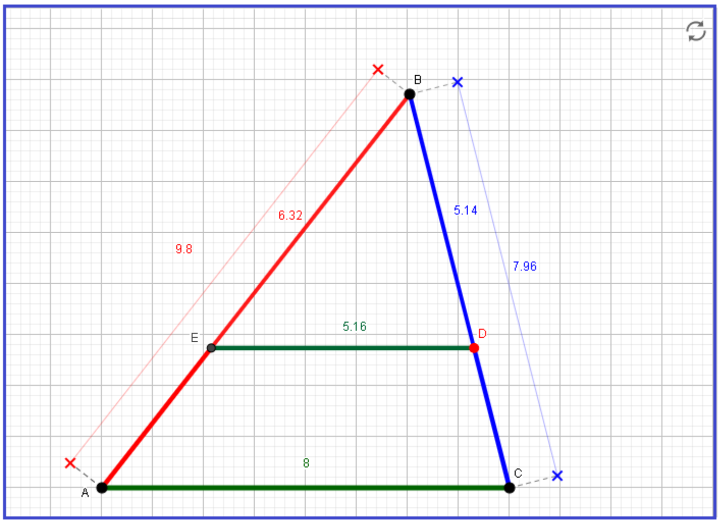
Questão 03

Os dois triângulos na construção abaixo são semelhantes pelo caso AA. Observe que ao ativar a opção **Reflexão** obtemos uma reflexão do triângulo menor em relação a um de seus lados. Com essa opção desativada tente sobrepor os ângulos azuis. Feito isto, os lados que não ficaram sobrepostos ficaram paralelos? E se a opção reflexão for ativada?



Questão 04

Escolha uma posição fixa para o ponto D sobre o lado BC na construção abaixo. Preencha a primeira coluna da tabela 02 com as medidas dos lados do triângulo ABC, a segunda coluna com as medidas dos lados correspondentes do triângulo EBD e a terceira coluna, com os valores das razões entre as medidas desses lados. O que você observou na terceira coluna? Compare seus resultados com os de seus colegas.



Valores de r	Azul (A)	Verde (V)	Razão (A/V)
0.5			
1			
1.5			
2			
2.5			

Mais um caso de semelhança

Todas as construções acima referentes a triângulos mostraram que quando uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intersecta os outros dois lados, determinando um novo triângulo, este será semelhante ao triângulo original. Na última construção tínhamos exatamente esta situação, pois os segmentos ED e AC são paralelos, ou seja, os triângulos eram semelhantes. Nela você observou que a razão entre as medidas dos lados correspondentes dos dois triângulos é constante, ou seja, os três pares de lados correspondentes são proporcionais. A recíproca é também verdadeira, ou seja, se os três pares de lados forem proporcionais, os triângulos serão semelhantes. Esse é mais um critério de semelhança, conhecido como **LLL** (lado - lado- lado). Outro caso de semelhança de triângulos bastante conhecido é o **LAL**, no qual conhece-se a congruência de um par de ângulos e sabe-se que os pares de lados correspondentes que determinam esses ângulos são proporcionais.

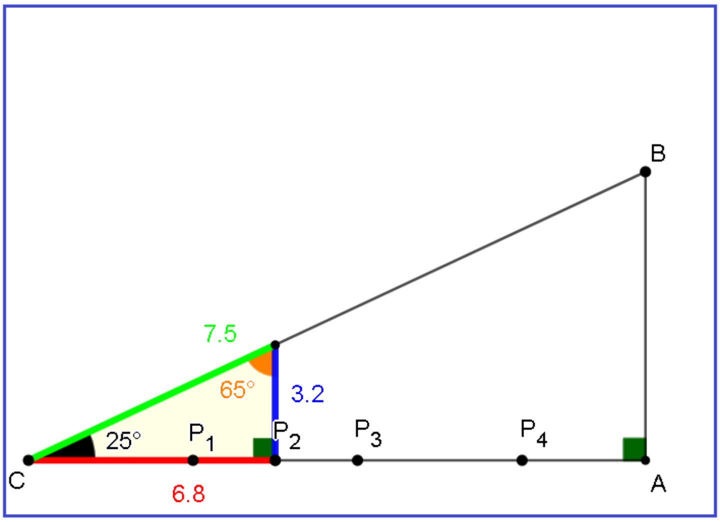
A semelhança de triângulos é um importante tópico dentro da matemática, amplamente utilizado na resolução dos mais diversos tipos de problemas de geometria, desde os mais simples até os mais desafiadores. Munido destes critérios de semelhança, você agora também está apto para enfrentar estes desafios.

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Você sabe do que trata a trigonometria?

Palavra de origem grega: tri (três) + gonía (ângulo) + métron (medida), a trigonometria é o ramo da Matemática que trata das relações entre os lados e os ângulos de triângulos. Não se sabe ao certo quando ela surgiu, mas pode-se afirmar que a trigonometria começou de forma prática para determinar as distâncias que não podiam ser medidas diretamente, chamadas de distâncias inacessíveis, como, por exemplo, a distância entre duas margens de um rio, a altura de uma construção e até mesmo a distância entre a Terra e a Lua. Nas próximas atividades, vamos direcionar nossa atenção para o triângulo retângulo, que por possuir propriedades e relações métricas já conhecidas, servirá como base para o nosso estudo.

A construção abaixo apresenta um triângulo retângulo ABC (e serve como referência para as questões 01 e 02). Os pontos B e C podem ser deslocados para modificar os valores dos ângulos associados a estes vértices (Faça isso!). O ponto azul pode ser deslocado sobre o lado AC do triângulo. Posicione-o sobre cada um dos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 e então preencha a tabela 01, informando as medidas dos lados solicitados, tomando como referência o ângulo preto, depois preencha também a tabela 02 tomando como referência o ângulo laranja.



Questão 01

(a) Você notou alguma variação nos valores que encontrou nas colunas: **O/H**, **A/H** e **O/A**?

(b) Como você justifica o resultado do item (a)?

Você verificou nas tabelas 01 e 02 que quando tomamos como referência um mesmo ângulo, os valores obtidos para as colunas O/H, A/H e O/A, são constantes, isto ocorre porque os triângulos formados são semelhantes entre si. Na matemática quando deparamos com valores que apresentam sempre o mesmo resultado, independente de qualquer outro elemento, dizemos que este é constante, podendo então dar um nome a ele, dessa forma poderemos nomear as razões:

Seno, a razão entre o cateto oposto a um determinado ângulo e a hipotenusa do triângulo ABC (O/H). b) **Cosseno**, a razão entre o cateto adjacente a um determinado ângulo e a hipotenusa do triângulo ABC (A/H). c) **Tangente**, a razão entre o cateto oposto e o adjacente a um determinado ângulo e a hipotenusa do triângulo ABC (O/A).

Questão 02

Converse com seus colegas para responder as perguntas abaixo. (a) Os resultados que eles encontraram nas três últimas colunas também foram constantes? (b) Os valores obtidos por eles nessas colunas foram os mesmos que você obteve? (c) Caso a resposta para a pergunta anterior seja negativa, o que você acha que produziu os resultados diferentes? Caso seja positiva, o que justifica isso?

Razões trigonométricas no ciclo

Fenômenos Periódicos

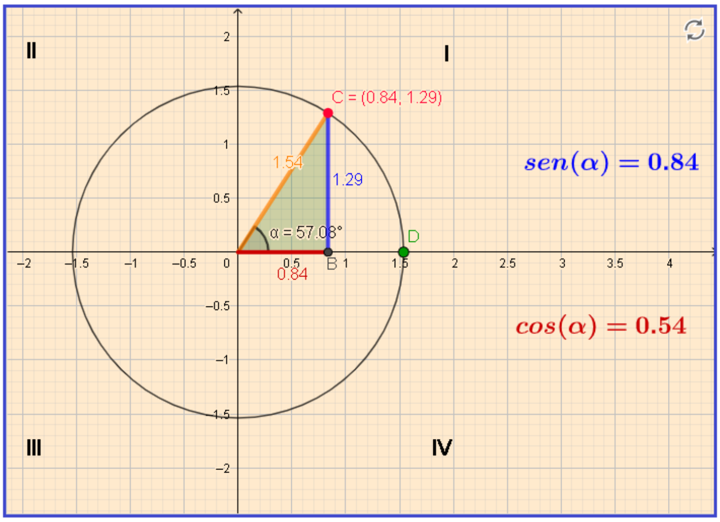
Um fenômeno é dito periódico quando ele se repete, indefinidamente, após intervalos de tempo iguais. Vários fenômenos físicos se enquadram nessa perspectiva como: o movimento das marés, os batimentos cardíacos, as fases da lua, a rotação do eixo de um motor, bem como os movimentos de rotação e translação que a Terra executa, além de muitos outros. Tomemos como exemplo os movimentos de rotação e translação da Terra. O movimento contínuo de rotação da Terra em torno do seu próprio eixo é realizado num período de 24 horas. Embora não sintamos o giro da Terra, esse movimento é importantíssimo, pois ele determina a sucessão dos dias e das noites. No movimento de translação, que também é periódico, a Terra executa sua órbita aproximadamente circular, em torno do Sol durante aproximadamente 365 dias que correspondem a um ano, nesse período ocorre a mudança das estações climáticas em nosso planeta.

Esses movimentos podem ser modelados matematicamente, e a trigonometria é uma ferramenta imprescindível para entendermos o comportamento desses fenômenos.

Construindo o conceito

A construção abaixo apresenta uma circunferência centrada na origem O do plano cartesiano, cujo raio é representado pelo segmento AC. Os eixos cartesianos dividem a circunferência em quatro partes denominadas quadrantes, os quais encontram-se numerados de I a IV. Nesta construção consideraremos apenas ângulos positivos e estabeleceremos o sentido anti-horário para medi-los. Ao movimentar o ponto D horizontalmente, modifica-se o tamanho do raio da circunferência, e ao movimentarmos o ponto C, os valores do ângulo DOC, denominado aqui pela letra grega α, são alterados.

As questões de 01 a 04 são referentes à construção 01.



Questão 01

Como você classificaria o triângulo verde quanto a seus ângulos?

Questão 02

Quem assume o papel da hipotenusa do triângulo verde?

Questão 03

Posicione o ponto *C* no primeiro quadrante, desloque o ponto *D* e observe os valores das razões seno e cosseno. Para qual medida do raio da circunferência, os valores das razões seno e cosseno correspondem as coordenadas do ponto *C*? **Sugestão:** Depois de encontrar o valor procurado para o raio, torne a movimentar o ponto C e certifique-se de que as coordenadas deste ponto ainda coincidem com os valores das razões trigonométricas.

Questão 04

Movimente o ponto D para tornar o raio igual a 2 e calcule os valores do cosseno e do seno do ângulo α a partir das medidas dos lados do triângulo retângulo, mantenha o registro da razão entre esses lados.

Sem movimentar o ponto C, repita o procedimento para o raio igual a 1,5. Observe seus registros e explique porque as coordenadas do ponto C coincidem com os valores do cosseno e do seno quando o raio é igual a 1?

Questão 05

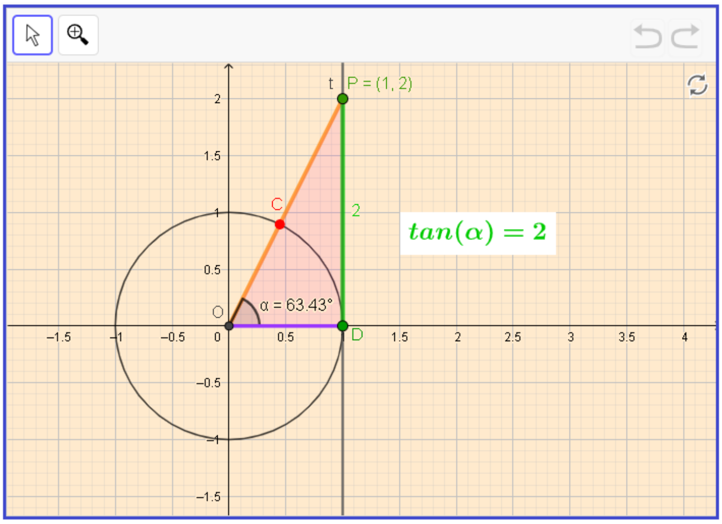
Considere o círculo de raio unitário com centro na origem e responda: Como podem ser definidos o cosseno e o seno do ângulo α a partir das coordenadas do ponto C?

Mais uma razão trigonométrica: a tangente

No capítulo sobre razões trigonométricas a definição de tangente foi dada pela razão entre o seno e o cosseno do ângulo α, porém, a exemplo do que fizemos com o cosseno e com o seno do ângulo α, vamos agora representar a tangente no ciclo trigonométrico.

Orientações sobre a construção 02

Na construção 2 o ponto P é obtido como interseção entre a reta t, que tangencia o ciclo trigonométrico no ponto D, e a semirreta OC, de modo que sua ordenada corresponde ao comprimento do segmento PD.



Questão 06

Na Construção 2, como você classificaria o triângulo rosa quanto a seus ângulos?

Questão 07

Qual o valor do cateto adjacente ao ângulo α no triângulo rosa?

Questão 08

Com base nas respostas que você deu para as questões 6 e 7 e na definição da tangente de um ângulo em triângulo retângulo (razão entre as medidas dos catetos oposto e adjacente), forneça a relação entre a ordenada do ponto P e o valor da tangente do ângulo α. Movimente o ponto C para verificar se a relação percebida por você realmente se sustenta.

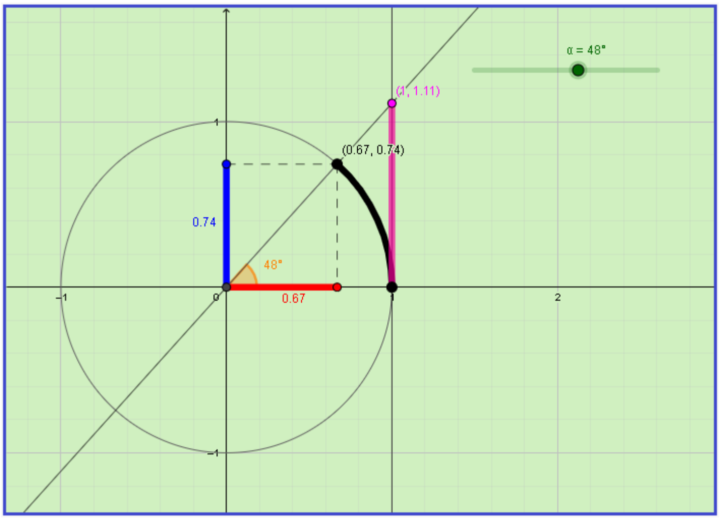
Questão 09

Na construção 02 desloque o ponto C pelo 1º quadrante e observe o comportamento do segmento DP. (a) Qual o valor da tangente quando o ângulo α equivale a 0°? (b) Quando o ângulo α se aproxima de 90° o que acontece com o valor do comprimento do segmento DP? (c) O que podemos afirmar sobre a tangente do ângulo α quando este mede 90°?

Definição de ciclo Trigonométrico

Passamos a definir o **ciclo trigonométrico** como a circunferência centrada na origem do plano cartesiano, de raio igual a 1, utilizada para definir os valores das razões trigonométricas de um ângulo qualquer. Nele ângulos tomados no sentido anti-horário possuem medida positiva e aqueles tomados no sentido horário possuem medida negativa.

Ciclo Trigonométrico



Vimos, nas representações acima, que as relações trigonométricas antes estabelecidas no triângulo retângulo, também podem ser obtidas através de uma outra formalização construída a partir do ciclo trigonométrico. Na próxima atividade, vamos nos aprofundar sobre o significado das razões trigonométricas para ângulos maiores que 90°.

Razões trigonométricas de ângulos maiores que 90°

Até aqui estudamos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente limitadas a ângulos entre 0° e 90°, nesta atividade vamos mostrar como é possível tornar os conceitos de seno, cosseno e tangente ainda mais gerais, associando-os também a ângulos fora deste intervalo, mas ainda limitados ao intervalo entre 0° e 360°.

Dizemos que α é um ângulo do **1º quadrante** quando **0° < α < 90°**.

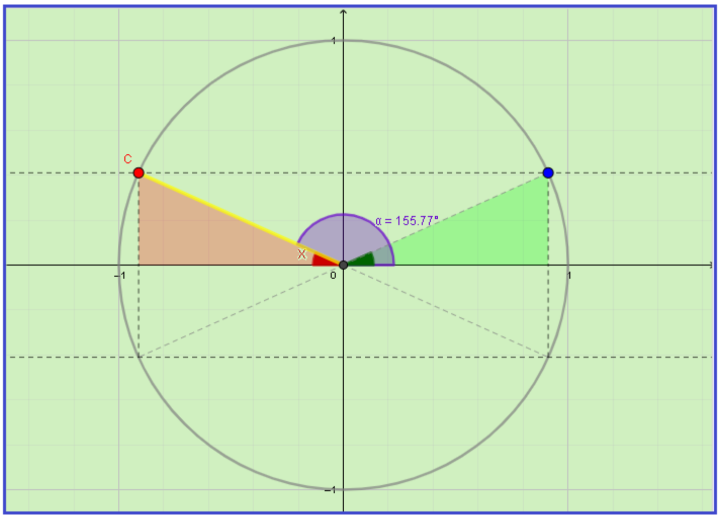
Dizemos que α é um ângulo do **2º quadrante** quando **90° < α < 180°**.

Dizemos que α é um ângulo do **3º quadrante** quando **180° < α < 270°**.

Dizemos que α é um ângulo do **4º quadrante** quando **270° < α < 360°**.

Nosso objetivo aqui é mostrar como é possível encontrar os valores das razões trigonométricas relacionadas a um ângulo α localizado no 2º, 3º ou 4º quadrante a partir de um ângulo X do 1º quadrante associado a α. Observe que, na Construção 1, ao deslocarmos o ponto C, o ângulo vermelho X, embora apareça em diferentes quadrantes, é considerado um ângulo do 1º quadrante, já que é sempre agudo, isto é, menor que 90°.

Construção 01



Questão 01

Ao posicionamos o ponto C fora do primeiro quadrante, obtemos um ângulo vermelho X. Os ângulos verde e vermelho são sempre congruentes? Justifique sua resposta.

Questão 02

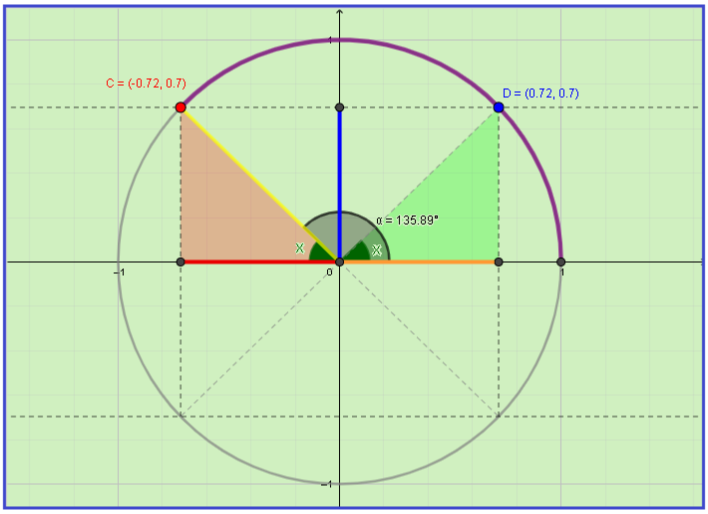
(a) Quando α é um ângulo do 2º quadrante, qual o valor da **soma** dos ângulos α e X? (b) A partir do resultado obtido no item (a), encontre o valor do ângulo X, considerando o valor assumido pelo ângulo α na posição do 2º quadrante escolhida por você para o ponto C.

Questão 03

(a) Quando α é um ângulo do 3º quadrante, qual o valor da **diferença** entre os ângulos α e X? (b) A partir do resultado obtido no item (a), encontre o valor do ângulo X, considerando o valor assumido pelo ângulo α na posição do 3º quadrante escolhida por você para o ponto C.

Questão 04

(a) Quando α é um ângulo do 4º quadrante, qual o valor da soma dos ângulos α e X? (b) A partir do resultado obtido no item (a), encontre o valor do ângulo X, considerando o valor assumido pelo ângulo α na posição do 4º quadrante escolhida por você para o ponto C.



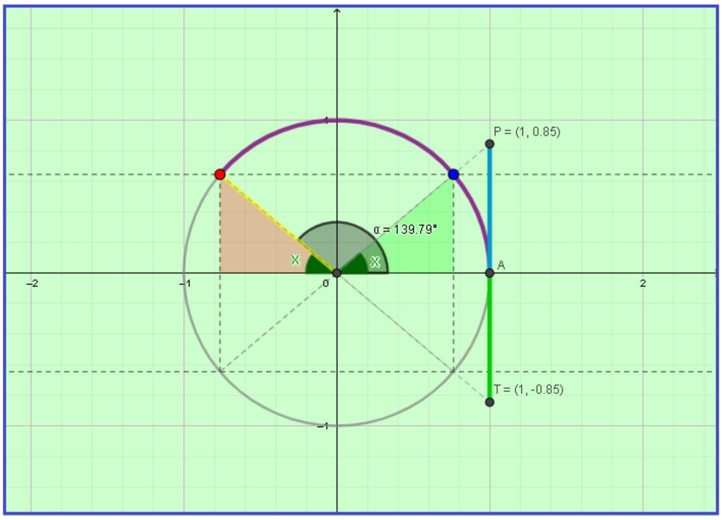
Comprimento orientado

Na construção acima os segmentos **azul**, **lilás**, **vermelho** e **laranja** têm sempre uma extremidade na origem do sistema de coordenadas. Nesta construção os segmentos **laranja** e **lilás** terão sempre comprimento orientado positivo. Já o segmento **vermelho** terá comprimento orientado positivo quando estiver à direita da origem e negativo quando estiver à esquerda. Já o segmento **azul**, terá comprimento orientado positivo quando estiver acima da origem e negativo quando estiver abaixo. Considerando esta definição e o que aprendemos em atividade anterior sobre o **ciclo trigonométrico**, podemos afirmar que o **seno de α** é o comprimento orientado do segmento **azul** e o **cosseno de α** o comprimento orientado do segmento **vermelho**.

Questão 05

Considerando a definição de comprimento orientado dada acima e observando as relações entre os comprimentos orientados dos segmentos azul e lilás, estabeleça as relações entre o seno de α e o seno de X para cada um dos quadrantes. A seguir faça o mesmo para o cosseno, considerando os segmentos vermelho e laranja.

Na construção abaixo, os segmentos verticais **azul** e **verde** possuem uma extremidade comum no ponto A, localizado sobre o eixo x. Desse modo, assim como feito na Construção 2, podemos também aqui dizer que os segmentos **azul** e **verde** possuem comprimento orientado positivo, quando estão acima do eixo x e negativo quando estão abaixo. Considerando o que aprendemos na atividade sobre **ciclo trigonométrico** podemos afirmar que a **tangente de α** é o comprimento orientado do segmento **verde** e a tangente de X, quando não coincide com a tangente de α, é dada pelo comprimento orientado do segmento **azul**.



Questão 06

A partir dos comprimentos dos segmentos verde e azul, estabeleça as relações entre a tangente do ângulo α e a tangente do ângulo X para cada um dos quadrantes.

Questão 07

O que ocorre com o valor da tangente de α: (a) quando α = 0° ou α = 180°? (b) quando α = 90° ou α = 270°? (c) a medida que o valor de α se aproxima de 90°, mas sem assumir esse valor? (d) a medida que o valor de α se aproxima de 270°, mas sem assumir esse valor?

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

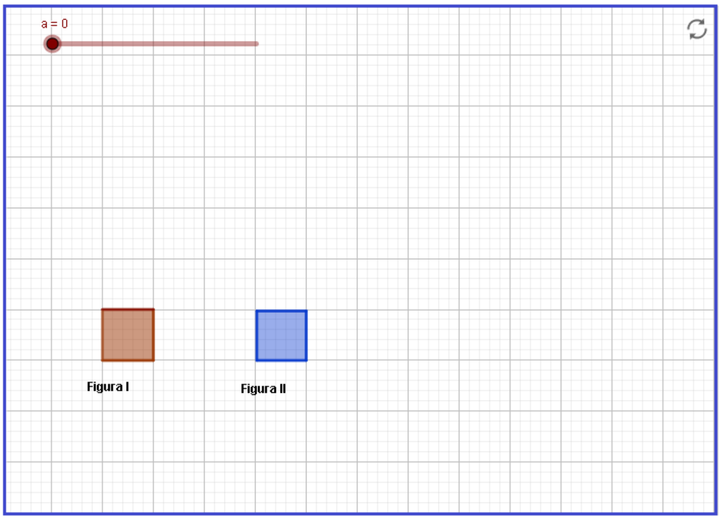
Semelhança

No dia a dia, usamos a palavra semelhante quando queremos dizer que duas coisas são parecidas. Matematicamente a palavra semelhança tem um significado um pouco mais restrito. Por exemplo, ao ver a imagem de sua série favorita na TV, imediatamente você reconhece a fisionomia de seus personagens, mesmo que a imagem seja bem menor do que o seu tamanho real. O mesmo acontece com uma foto ou a imagem vista na tela do cinema. Sem grandes formalidades, podemos dizer que duas figuras são semelhantes quando possuem a mesma forma sem possuírem necessariamente o mesmo tamanho.

Noção intuitiva

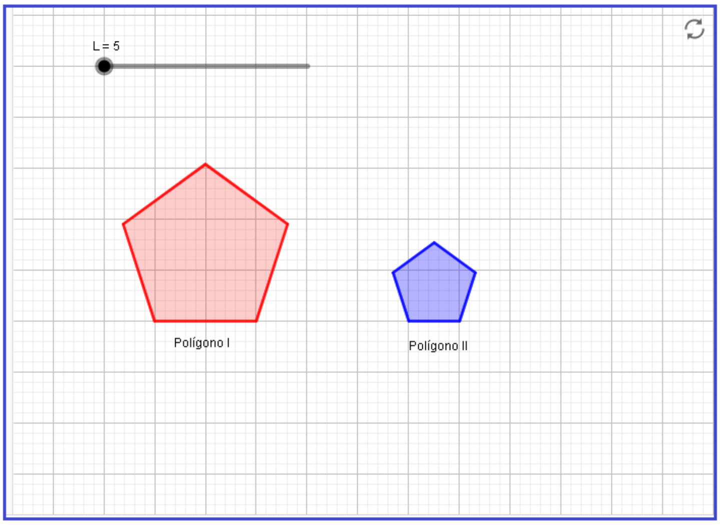
Questão 01

Desloque o controle deslizante na construção abaixo. Usando a noção de semelhança apresentada no texto acima e notando o que aconteceu com a construção, você diria que os polígonos das figuras I e II são semelhantes? Justifique sua resposta.



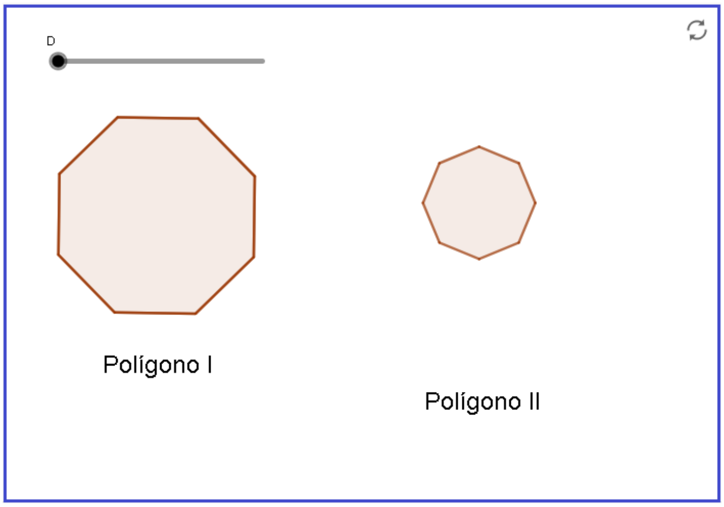
Questão 02

Na construção abaixo movimente o controle deslizante e responda. Quando L=5 o polígono I é semelhante ao polígono II? E quando modificamos o valor de L, eles permanecem semelhantes? Justifique a sua resposta.



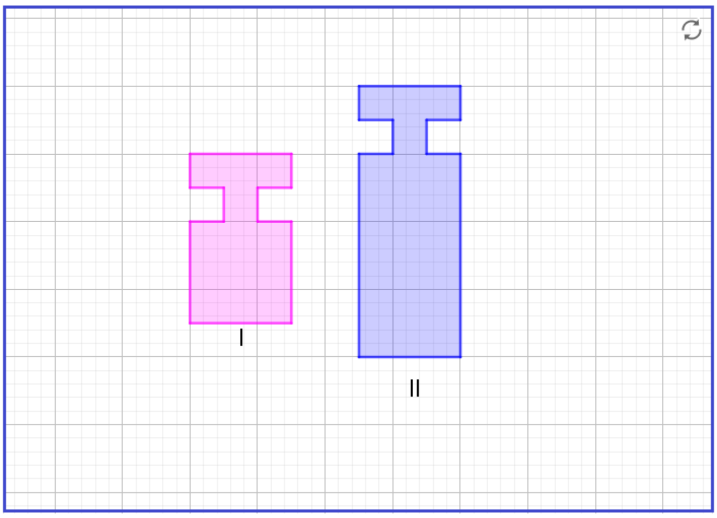
Questão 03

Na figura abaixo, usando o controle deslizante responda: os dois polígonos são semelhantes?

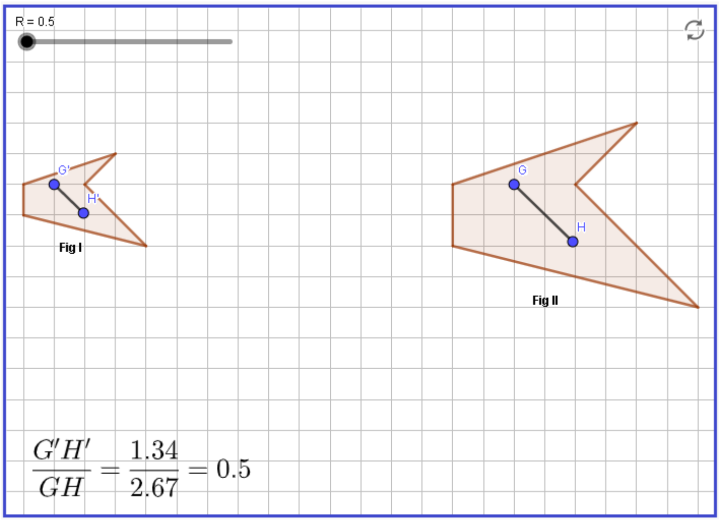


Construindo conceitos

Em dois, dos três exemplos acima, você percebeu que apesar de reduzirmos ou ampliarmos as figuras, elas mantiveram a mesma forma e essa observação foi o suficiente para às considerarmos semelhantes. No entanto, o termo "manter a forma" é um pouco vago, de modo que necessitamos de um critério mais preciso para identificar se, duas figuras são ou não semelhantes. Observe a construção abaixo. Se olharmos despretenciosamente para a figura abaixo, teremos a ideia falsa de que elas apresentam apenas tamanhos diferentes, no entanto é possível notar que as duas garrafas não guardam as mesmas proporções, logo chegamos a conclusão de que é necessário termos uma maneira mais precisa para averiguar se as proporções entre elas são mantidas.



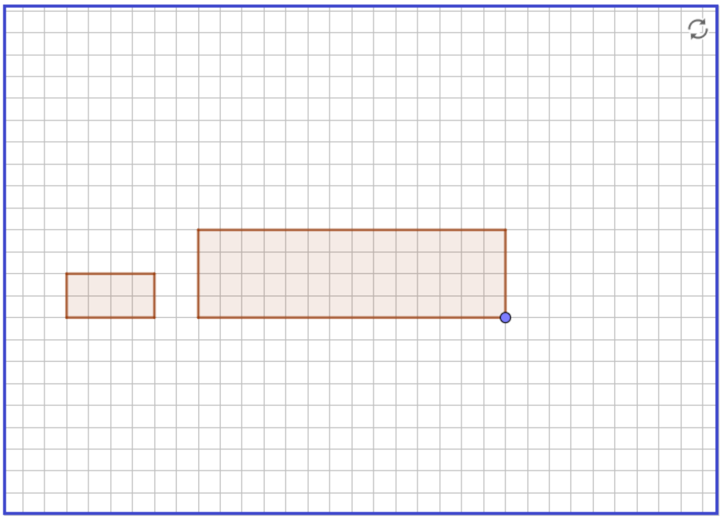
Na construção abaixo o controle deslizante R altera o tamanho da Figura I sem alterar sua forma, que é a mesma forma da Figura II. Escolha um valor fixo para R e movimente os pontos G e H dentro da Figura II. Observe o que acontece com a razão entre os comprimentos dos segmentos GH e G'H' e compare o valor desta razão com o valor que você escolheu para R.



Com base no que você observou, agora podemos formalizar um pouco mais o conceito de semelhança. Podemos então dizer que, duas figuras serão semelhantes quando houver uma correspondência entre os pontos de uma e os pontos da outra, de modo que quaisquer pontos **G** e **H** da figura I e seus correspondentes **G'** e **H'** da figura II apresentam a razão **G'H'/GH** constante.

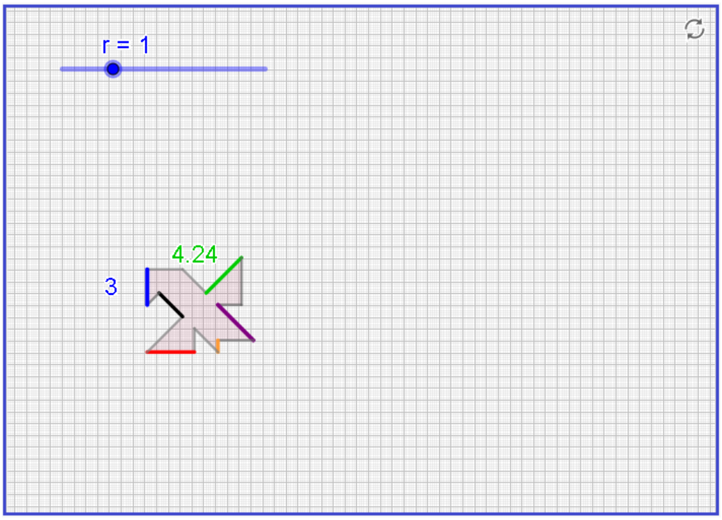
Questão 04

Para a construção abaixo, movimente o ponto azul até que as duas figuras se tornem semelhantes, tente descobrir o que acontece. O que aconteceu? A resposta foi única? Justifique sua resposta.



Indo mais além

Na construção abaixo o controle deslizante r modifica o tamanho do polígono, além de exibir ou ocultar a medida dos lados desse polígono clicando sobre eles.



Questão 05

Com base no polígono apresentado na construção acima, preencha, na tabela abaixo, as medidas dos segmentos azul e verde para os valores correspondentes de r, e depois com o auxílio da calculadora, forneça o valor da razão entre eles. O que você observou sobre essa razão?

OBS: Insira os valores nas células cor de rosa dando dois cliques rápidos sobre a célula e depois digitando o valor desejado.

Valores de r	Azul (A)	Verde (V)	Razão (A/V)
0.5			
1			
1.5			
2			
2.5			

Questão 06

Usando a mesma tabela experimente fazer o mesmo com outros lados do polígono (lilás e laranja, por exemplo) e responda: O comportamento ainda é o mesmo observado para os segmentos azul e verde? Justifique sua resposta.

Questão 07

A partir das observações feitas nas questões 5 e 6, enuncie uma propriedade sobre figuras semelhantes.