VOLUMEN DE UN SOLIDO DE REVOLUCION

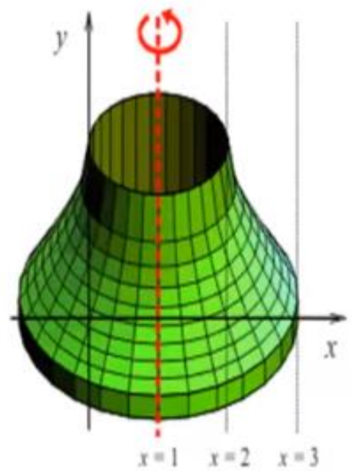
Con este recurso se comprobara mediante la simulación que el volumen de un sólido de revolución previamente obtenido con cálculos matemáticos, arrojara el mismo resultado cuando utilizamos la herramienta de geogebra.

¿QUE ES UN SOLIDO DE REVOLUCION?

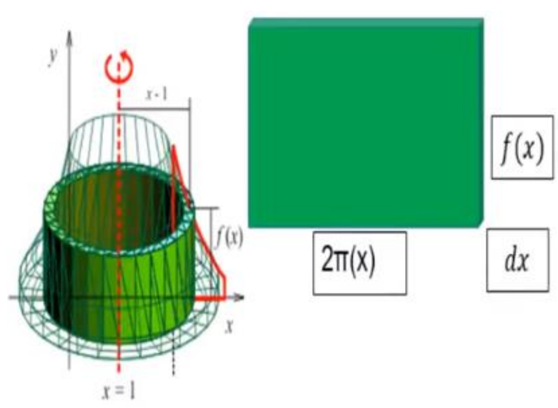
Es el sólido que se obtiene al rotar una región de un plano alrededor de una recta.

Como ejemplo realizaremos el siguiente ejercicio:

Hallar el volumen del solido generado al girar la curva $f(x) = 2 - \sqrt{x^2 - 2x}$ entre las rectas X=2, X=3 y con giro en X=1, como se muestra en la siguiente figura.



Para su solución utilizaremos el método de casquetes cilíndricos, el cual consiste en tomar un diferencial en X y ponerlo a rotar junto con la figura obteniendo un cilindro, este cilindro se abrirá para formar un cuadrilátero y de esta manera el diferencial de volumen será el volumen de ese cuadrilátero que sería la longitud por la altura por el espesor (ver figura)



De esta manera el diferencial de volumen seria:

$$dv = 2\pi(x-1)\left(2-\sqrt{x^2-2x}\right)dx$$

Integrando en ambos lados

$$v = 2\pi\int_2^3 (x-1)\left(2-\sqrt{x^2-2x}\right)dx$$

Se remplaza en radio X por (X—1) ya que el eje de rotación no es el eje Y sino la recta X=1.

Resolviendo por sustitución

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x^2-2x \\ du &= 2x-2dx \end{aligned}}$$

$$v = 2\pi\int_2^3 \frac{(x-1)\left(2-\sqrt{u}\right)du}{2x-2}$$

$$v = 2\pi\int_2^3 \frac{(x-1)\left(2-\sqrt{u}\right)du}{2(x-1)}$$

$$v = \pi\int_2^3 \left(2-\sqrt{u}\right)du$$

Evaluando en X=3 y X=2 tenemos:

$$v = \pi\left[2u-\frac{2\sqrt{u^3}}{3}\right]\begin{cases}3\\2\end{cases}$$

$$v = 2\pi\left[(x^2 - 2x) - \frac{\sqrt{(x^2-2x)^3}}{3}\right]$$

$$v = 2\pi\left[\left((3^2 - 2(3)) - \frac{\sqrt{(3^2 - 2(3))^3}}{3}\right) - \left((2^2 - 2(2)) - \frac{\sqrt{(2^2 - 2(2))^3}}{3}\right)\right]$$

Finalmente obtenemos que:

$$v = 2\pi\left[\left(3 - \frac{3\sqrt{3}}{3}\right)\right] \qquad v = 2\pi\left[\left(3 - \sqrt{3}\right)\right] = 7{,}96und^3$$

Ahora comprobemos el resultado utilizando la herramienta de geogebra y verificando con el recurso presentado a continuación.

Se referencia la siguiente página de internet donde se puede ampliar más el tema referente a volúmenes de solidos de revolución.

https://es.slideshare.net/fer123asdzxc/aplicacion-de-la-integral-definida-en-areas-y-volumenes

Teniendo en cuenta la construcción realizada en Geogebra, responda las siguientes preguntas:

1. Para la función del ejemplo mostrado, que cambios se tendrían que hacer en la función volumen si el sólido de revolución se hace rotar en la recta X=0 (eje Y).

2. ¿Qué cambios puede tener el volumen del solido generado si se cambian los límites de integración a X=3 y X=6?, realice los cálculos nuevamente y compruebe el resultado.

3. ¿De acuerdo a la construcción realizada, cree usted que se pueda utilizar los mismos pasos para hallar el volumen de otro solido haciendo girar cualquier otra curva?

4. Si la respuesta a la anterior pregunta es si, realice los cambios necesarios para obtener el volumen de un sólido de revolución de una función propuesta por usted y determine por los dos métodos (geogebra y cálculos matemáticos) el volumen del solido resultante.

5. El ejercicio del recurso fue realizado por el método de casquetes cilíndricos, ¿Diga por qué no se puede resolver por el método de arandelas?

Responda las siguientes preguntas de acuerdo a la teoría y material de apoyo suministrados:

1. ¿Qué es un sólido de revolución?
2. ¿En qué consiste el método de casquetes cilíndricos?
3. ¿En qué consiste el método de arandelas?
4. ¿Qué otros métodos conocidos se tienen para hallar el volumen de un sólido de revolución?

Elaborado por: Profesor Frank Alexis Fernández Solarte.