



HOJA DE TRABAJO 2. Construyendo las identidades Pitagóricas

Nombre del estudiante: _____ Fecha: _____

Grupo: _____

1. Declaración de competencias:

- Deduce las identidades trigonométricas pitagóricas a través del uso del teorema de Pitágoras en un triángulo cuya hipotenusa mide uno.
- Comprueba por medio del teorema de Pitágoras el valor de las identidades fundamentales, usando para ello la sustitución de ángulos.
- Identifica cuando una igualdad trigonométrica es una identidad trigonométrica.

2. Secuencia metodológica:

- Primero usarás el software de geogebra para visualizar una propiedad.
- Luego usarás geogebra para medir, encontrar y generalizar una propiedad que tienen los triángulos rectángulos.
- Debes comunicar la conjetura que emerge.
- En la parte final debes dejar de usar el geogebra para resolver únicamente con lápiz y papel algunos ejercicios relacionados el teorema involucrado en la presente hoja de trabajo.
- En la fase de socialización, participa en la discusión y hazle saber tus puntos de vista al profesor y a tus compañeros.

3. Diagnóstico

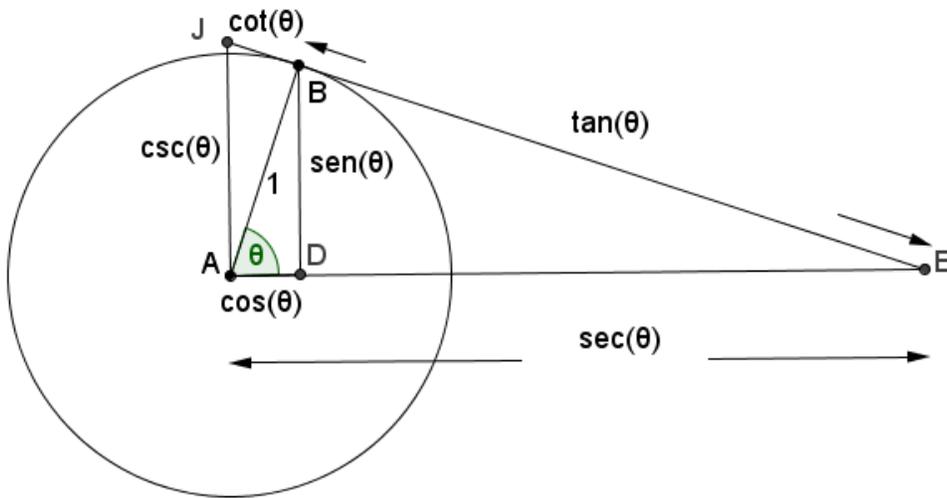
3.1 En la lista de expresiones trigonométricas van a encontrar una serie de igualdades. Escribe al frente de cada una de ellas si es ecuación, identidad, o función:

- $1 - \cos^2 x = \sin^2$ _____
- $2 \cos(x) = 1$ _____
- $y = \tan(x)$ _____
- $\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$ _____
- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ _____

4. Motivación

Las identidades trigonométricas son igualdades que involucran funciones trigonométricas, verificables para cualquier valor permitido de la variable (es decir, para cualquier valor que pudieran tomar los ángulos sobre los que se aplican las funciones).

En la siguiente figura se construyó una circunferencia unitaria con centro en A, sobre un sistema de ejes de coordenadas. Se ubicó un punto B sobre esta circunferencia. Se trazó el segmento BD, perpendicular al eje horizontal. Todas las funciones trigonométricas de un ángulo θ pueden ser construidas geoméricamente en términos de un círculo Unitario centrado en el punto A.



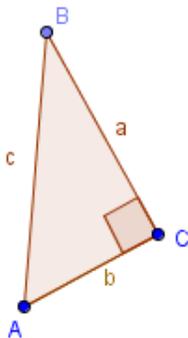
Teniendo como referencia la figura anterior, se pueden deducir varias identidades.

Para tal deducción es útil la definición de las relaciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras. Por ejemplo, en el triángulo ADB el $\text{Sen}(\theta)$ se puede calcular con la razón entre el segmento BD y la hipotenusa (AB), como la hipotenusa de dicho triángulo mide uno, el $\text{sen}(\theta)$ queda representado geoméricamente por el segmento BD.

Estas identidades son útiles siempre que se requiera simplificar expresiones que incluyen funciones trigonométricas.

4.1 Conceptos básicos

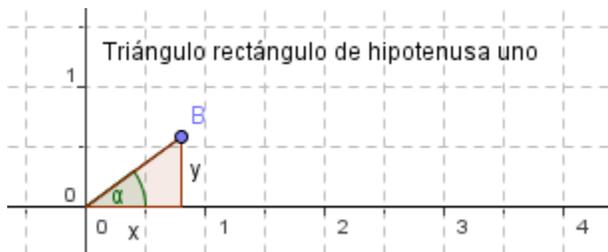
Recordemos el teorema de Pitágoras, en él se cumple que para todo triángulo rectángulo:



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Siendo a y b los catetos del triángulo y c la hipotenusa.

Para el estudio de las identidades se trabajará con un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea siempre uno. Y los catetos estén sobre los ejes X, Y.



En este caso el teorema de Pitágoras quedará: $1^2 = x^2 + y^2$ (1)

Pero si hallamos las relaciones trigonométricas para seno y coseno del ángulo α serán:

$$\text{sen}\alpha = \frac{y}{1} \quad (2)$$

$$\text{Cos}\alpha = \frac{x}{1} \quad (3)$$

Al sustituir estos dos valores (2) y (3) en la ecuación (1) se tiene:

$$1^2 = \text{Cos}^2\alpha + \text{Sen}^2\alpha \quad \text{Que es considerada la identidad fundamental pitagórica}$$

Organizándola queda mejor así: $\text{Cos}^2\alpha + \text{Sen}^2\alpha \equiv 1$

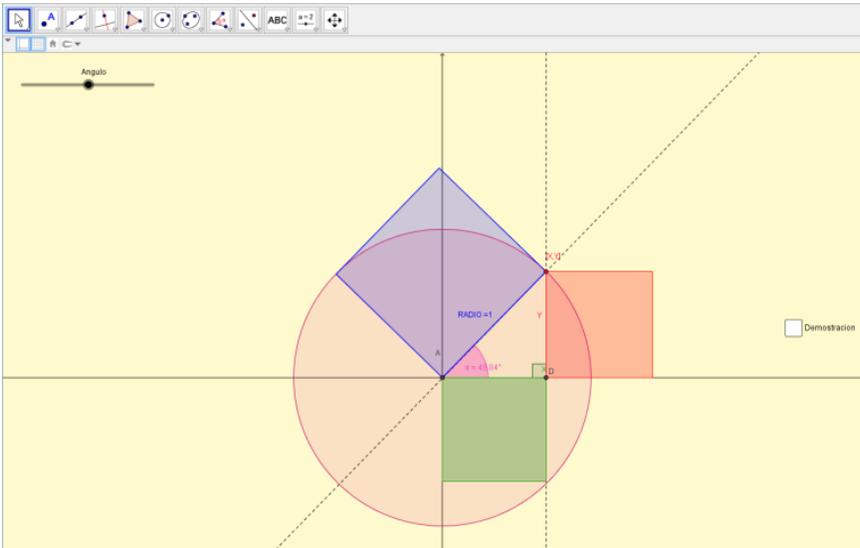
Ahora deduce el valor del seno y el de 1 coseno a partir de la identidad fundamental

$\text{Cos}^2\alpha =$	
$\text{Sen}^2\alpha =$	
$\text{Sen}\alpha =$	
$\text{Cos}\alpha =$	

5. Desarrollo y aplicación de la hoja de trabajo

- En el escritorio de su PC, abra el archivo FUNCIONES PITAGORICAS0.ggb. Realiza las observaciones y las medidas necesarias para que contestes cada una de las siguientes preguntas:

Cuando haya abierto el software aparecerá una ventana de trabajo con la siguiente figura



- Ahora empieza a responder

5.1 ¿Qué clase de triángulo es ABC?

5.2 Con el uso del software geogebra y la calculadora científica comprueba los valores para los cuales la identidad se cumple.

Instrucciones: Lleve el deslizador (Ángulo) a cada uno de los valores que están escritos en la tabla de abajo (Ver tabla). Con la calculadora halla el valor de la función y eleve cada valor al cuadrado.

Ángulo	Sen ² (x)	Cos ² (x)	Sen ² (x) + Cos ² (x)	Resultado
0°				
20°				
30°				
45°				
72°				
90°				

En el cajón verificar compruebe el valor de la identidad, para cada ángulo de la tabla. ¿Qué concluyes?

5.3 En matemáticas muchas expresiones necesitan del álgebra para ser resueltas o encontrar equivalencias a las que denominamos ecuaciones en este caso son identidades. Para comprobar las otras identidades pitagóricas fundamentales utilizaremos las demostraciones algebraicas, así:

- Si tomamos la identidad fundamental pitagórica y dividimos cada una de sus expresiones entre sen²(x) resultará otra identidad, veamos:

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \quad (1)$$

Ahora recordemos las razones recíprocas que se cumplen para todo triángulo rectángulo.

$$1. \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \cot^2 x \quad (2)$$

$$2. \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x \quad (3)$$

Sustituyendo en (1), las ecuaciones (2) y (3); se tiene:

$$\cot^2 x + 1 \equiv \csc^2 x$$

Ahora deduce el valor de la cosecante a partir de la identidad fundamental

$\cot^2 x =$	
$\cot x =$	

5.4 De igual manera puedes hallar el valor de otras identidades pitagóricas si divides toda la identidad por $\cos^2 x$:

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (1)$$

Ahora recordemos las razones recíprocas que se cumplen para todo triángulo rectángulo.

$$3. \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x \quad (2)$$

$$4. \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \quad (3)$$

A partir de las de la ecuación (1) y sustituyendo (2) y (3). Construya las nuevas identidades.