

Questa attività realizza una spirale poligonale logaritmica che con inizio in (P1) si sviluppa allontanandosi dall'origine (P0) oppure avvicinandosi ad essa.

Il cambio di direzione si ottiene cambiando l'inclinazione ( $\alpha$ ) dei segmenti che compongono lo schema di base e di conseguenza la poligonale.

Sia lo schema di base (azzurri) che la poligonale (rossi) sono composti da 36 segmenti di cui il primo è in comune.

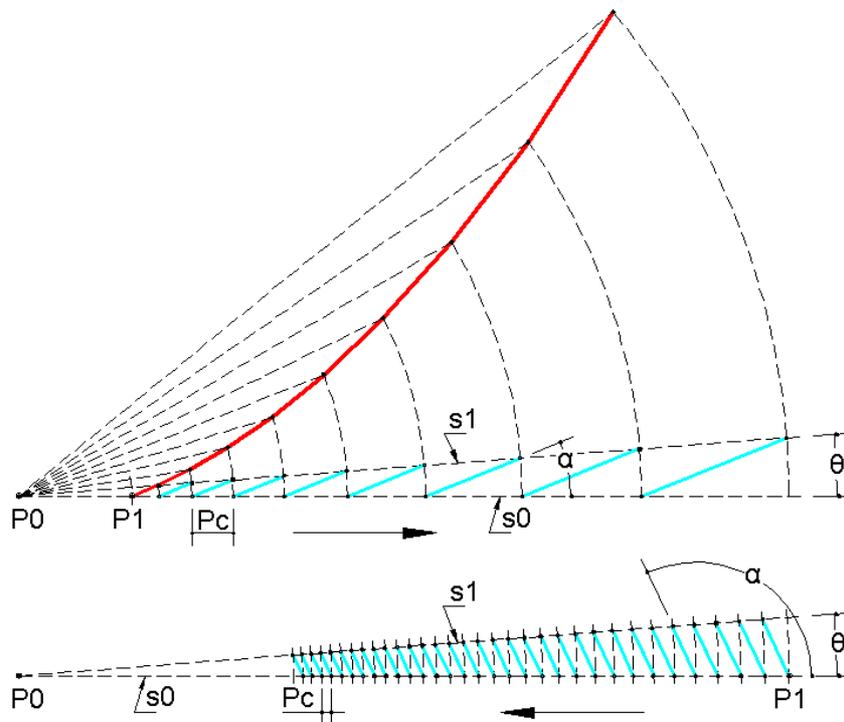
Appena riesco raddoppio il numero dei segmenti ritenendo che la poligonale ci possa guadagnare in eleganza.

Essendo una poligonale logaritmica risponde a tre requisiti che descrivo riferendomi allo schema di base, ossia ai segmenti azzurri.

1) I segmenti hanno tutti la stessa inclinazione ( $\alpha$ ).

2) La lunghezza dei segmenti è delimitata da altri due segmenti ( $s_0$ ) ed ( $s_1$ ) con origine in (P0), il primo è orizzontale ed il secondo forma con il primo l'angolo ( $\theta$ ), quest'ultimo è anche il passo angolare costante che delimita tutti i segmenti della poligonale.

3) L'inizio di ogni segmento condivide la stessa circonferenza di centro in (P0) con il punto finale del segmento precedente.



I segmenti della poligonale (rossi) sono la copia ruotata, con centro in (P0), dei segmenti azzurri, quindi hanno le stesse caratteristiche, vedi anche istruzioni per altre mie attività.

In questa nuova versione ho aggiunto la possibilità di variare l'angolo ( $\theta$ ) da  $5^\circ$  a  $30^\circ$ , ho ampliato il campo di azione dello slider che controlla la distanza tra (P1) e (P0) fino a 1000, ho ampliato il campo di azione dello slider che controlla l'inclinazione ( $\alpha$ ) dei segmenti da  $2.4 \cdot \theta$  a  $180^\circ$  ed ho inserito uno zoom automatico disattivabile.

Lo zoom automatico mantiene la poligonale dentro il campo visualizzato quindi credo che abbia una sua utilità, può però dare l'errata impressione che non cambi nulla quando si agisce sullo slider che controlla la distanza tra (P1) e (P0) questo è dovuto alla caratteristica della spirale logaritmica di rimanere sempre uguale a se stessa in ogni tratto del suo percorso.

Provare a disattivare lo zoom automatico tramite la casella di controllo in basso a sinistra per toccare con mano cosa succede in realtà.

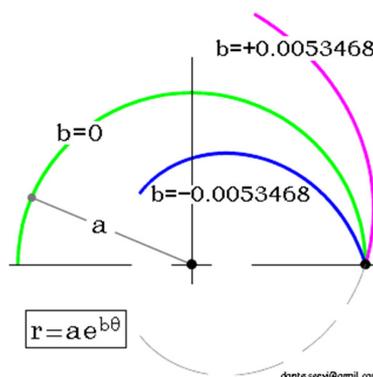
Per sbloccare lo zoom automatico occorre anche muovere leggermente uno dei primi due slider.

Aggiornando questo testo ho anche fatto alcune modifiche all'attività.  
 Ho messo a disposizione dei campi di inserimento per (R0) ed ( $\alpha$ ) anche se online al momento mi risulta che non funzionino correttamente per gli angoli, nel caso utilizzare ancora gli slider.  
 Ho ampliato il campo del passo angolare ( $\theta$ ) che ora parte da 1°.  
 Ho messo due caselle di controllo che ho chiamato Golden IN e Golden OUT.  
 Attivando una si disattiva l'altra, cliccando su quella eventualmente attiva la si disattiva.  
 Quando una delle due caselle è attiva non si può modificare ( $\alpha$ ).  
 Questa modifica permette di attivare la modalità "spirale poligonale aurea" in avvicinamento od in allontanamento da (P0) secondo le coppie di valori di ( $\theta$ ) e di ( $\alpha$ ) che mantengono la poligonale collegata alla spirale aurea.  
 Con la modalità Golden IN oppure Golden OUT attiva provare a variare il passo angolare ( $\theta$ ), che se da una parte incrementandone il valore la poligonale assomiglia sempre meno alla spirale logaritmica, d'altra parte copre un tratto maggiore della spirale.

L'ho sempre pensato e di certo non sono l'unico, la spirale logaritmica è affascinante vederla inseguire l'origine diventando sempre più piccola arrivando al punto che non si riesce più a seguirla  
 Purtroppo per apprezzare questo non aiuta un'immagine statica ho però visto una bella gif animata alla voce "Golden spiral" su Wikipedia; visto che il verso comune di sviluppo mi risulta essere quello antiorario temo che l'immagine utilizzata sia la solita della spirale che si allontana dall'origine.

E' vero che osservando il disegno di una spirale logaritmica uno la può interpretare come preferisce, ma nel momento in cui la stai realizzando non puoi non accorgerti se si allontana oppure se si avvicina all'origine, e questa mia attività non lascia dubbi in merito.  
 Ogni tanto capita di leggere che la spirale logaritmica si può anche dirigere verso l'origine ma non sono riuscito a trovare un articolo che spiegasse chiaramente come e perché, e che spiegasse altrettanto chiaramente la funzione di (a) e di (b) nelle equazioni della spirale logaritmica.  
 Anche per quanto riguarda la definizione di inclinazione della spirale logaritmica non ho trovato uniformità e chiarezza, io ne ho scelta una che utilizzo di seguito.  
 Quanto ho appena scritto è riferito a quanto ho potuto trovare sul Web, non mi sono però limitato a Wikipedia che più di altre fonti, dalle quali mi aspettavo qualcosa di meglio, mi ha convinto ed aiutato.

Essendo la spirale poligonale realizzata con questa attività, diversa dalla spirale logaritmica solo per il fatto di non avere un incremento continuo di ( $\theta$ ) ma un incremento che io definisco a scatti (il passo angolare ( $\theta$ )), ho deciso che fosse arrivato il momento di riportare alla spirale logaritmica quanto ho già descritto da tempo per questa poligonale.



Non pretendo di aver scoperto qualcosa di nuovo riguardo alla spirale logaritmica, mi basta aver provato a fare chiarezza, detto questo ora torno alla poligonale.

Con questa attività, che permette di avvicinare od allontanare il punto (P1) di partenza della poligonale alla origine (P0), faccio scorrere i vertici della poligonale lungo una invisibile spirale logaritmica.

Essendo per costruzione grafica (P1) legato al segmento orizzontale, bisogna immaginare che trascinando (P1) sia la spirale logaritmica a ruotare mentre i vertici della poligonale scorrono su di essa.

Cambiando l'inclinazione ( $\alpha$ ) dei segmenti oppure il passo angolare ( $\theta$ ) cambia la spirale logaritmica di riferimento in quanto per ogni inclinazione della spirale logaritmica esiste un preciso rapporto tra passo angolare ( $\theta$ ) ed il passo ( $P_c$ ) dei cerchi che tengono collegati i segmenti dello schema di base.

In modalità spirale aurea potete constatare come cambiando il passo angolare ( $\theta$ ) cambia automaticamente l'inclinazione ( $\alpha$ ).

Per gli stessi vincoli esistenti, fissato il passo angolare ( $\theta$ ) e l'inclinazione ( $\alpha$ ) costante dei segmenti dello schema di base il passo ( $P_c$ ) dei cerchi risulta graficamente.

Analiticamente si trova lo stesso risultato con questa equazione in coordinate polari che ho trovato su Wikipedia  $r=a \cdot e^{(b \cdot \theta)}$ .

Dove ( $\theta$ ) è l'angolo rispetto all'origine (P0) tra due punti della spirale ed  $r-a$  è la differenza tra le distanze dall'origine (P0) di questi due punti.

Nel nostro caso ( $\theta$ ) è il passo angolare costante ed  $r-a$  è il passo ( $P_c$ ) dei cerchi, che cambia da un segmento all'altro tranne il caso in cui si azzerava come vedremo più avanti, oppure quando diventa uguale ad (R0) che succede per  $\alpha=180^\circ$ .

Per la spirale logaritmica è cosa nota che per  $b=0$  risulta  $e^{(b \cdot \theta)}=1$  e quindi  $r=a$  ossia al variare di ( $\theta$ ) ( $r$ ) non si incrementa e la spirale diventa un cerchio di raggio  $r=a$ .

La spirale poligonale logaritmica non è da meno, ponendo  $R0=a$ , si può trovare il giusto rapporto tra il passo angolare ( $\theta$ ) e l'inclinazione ( $\alpha$ ) dei segmenti per intercettare con i vertici questo cerchio, inoltre se ( $\theta$ ) è sottomultiplo di  $360^\circ$  si genera un poligono regolare.

Ecco una serie di coppie di valori del passo angolare ( $\theta$ ) e dell'inclinazione ( $\alpha$ ) dei segmenti per ottenere questo risultato.

|  $\theta 5^\circ \alpha 92.5^\circ$  |  $\theta 10^\circ \alpha 95^\circ$  |  $\theta 15^\circ \alpha 97.5^\circ$  |  $\theta 20^\circ \alpha 100^\circ$  |  $\theta 24^\circ \alpha 102^\circ$  |  $\theta 30^\circ \alpha 105^\circ$  |

Voglio ora spiegare che l'inclinazione ( $\alpha$ ) dei segmenti non può essere uguale all'inclinazione (in qualunque modo la si chiami) della spirale logaritmica per tre motivi.

Il primo lo abbiamo già visto constatando che l'inclinazione della poligonale risulta dalla combinazione dell'inclinazione ( $\alpha$ ) dei segmenti e del passo angolare ( $\theta$ ).

Utilizzo quest'ultimo confronto tra la poligonale e la spirale logaritmica per spiegare il secondo motivo.

Per la spirale logaritmica in questa particolare situazione in cui diventa una circonferenza di raggio ( $a$ ), la sua inclinazione diventa zero.

Ora è il momento di ricordare che per la spirale logaritmica, con riferimento ad un qualsiasi suo punto, l'inclinazione è l'angolo tra la sua tangente e la perpendicolare nello stesso punto al segmento che lo collega all'origine della spirale.

Diventando una circonferenza, sempre con riferimento ad un qualsiasi punto, la tangente e la perpendicolare nello stesso punto al segmento che lo collega al centro della circonferenza coincidono e quindi l'angolo diventa zero.

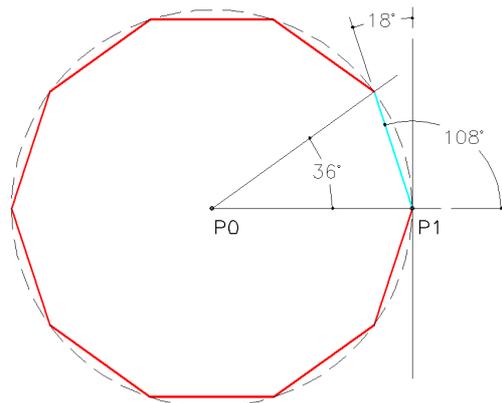
Quando ho definito il mio metodo, ho trovato più semplice nel costruire lo schema di base riferirmi al segmento ( $s0$ ) e non alla sua perpendicolare per definire l'inclinazione ( $\alpha$ ) dei segmenti azzurri, quindi il secondo motivo è un diverso modo di misurare l'inclinazione.

Il terzo motivo è che nello schema di base l'inclinazione dei segmenti la misuro sempre sul lato destro del segmento, non cambio lato seguendo la direzione di sviluppo della poligonale.

Per la spirale logaritmica, secondo la definizione di inclinazione che ho scelto ed appena utilizzato, credo di poter dire che il problema non esiste.

Nella figura seguente per  $(\theta)=36^\circ$  l'inclinazione  $(\alpha)$  dei segmenti risulta  $108^\circ$  mentre, sarebbe risultata  $18^\circ$  se avessi adottato lo stesso metodo utilizzato per la spirale logaritmica.

Nelle coppie di valori  $(\theta)$  ed  $(\alpha)$  appena proposti si può notare che, più è piccolo il valore di  $(\theta)$  più  $(\alpha)$  si avvicina a  $90^\circ$  ( $90^\circ$  per la poligonale corrisponde a  $0^\circ$  per la spirale), questo conferma che più  $(\theta)$  è piccolo più la poligonale si avvicina alla spirale logaritmica, come del resto si nota graficamente.



In un'altra attività che potete trovare a questo link <https://www.geogebra.org/m/hddmz9zy>, nella quale viene controllato il passo  $(Pc)$  dei cerchi invece di controllare l'inclinazione  $(\alpha)$  dei segmenti, per  $(Pc)$  costante si ottiene una poligonale che intercetta con tutti i suoi vertici una spirale di Archimede.

Per ottenere  $(Pc)$  costante basta porre  $(IPc)$  uguale a zero.

Tornando alla poligonale logaritmica, come già detto più è piccolo il passo angolare  $(\theta)$  e più è preciso ma breve il tratto di spirale coperto, evidentemente a parità del numero di segmenti.

Più segmenti si hanno a disposizione e più si può ridurre il passo angolare e quindi aumentare i punti di contatto con una spirale logaritmica.

Questa attività è solo dimostrativa non deve rispondere ad esigenze specifiche, credo però che possa risultare interessante per diversi motivi confrontare il valore di  $x^*$  con quello di  $(R0)$ .

Questi due valori indicano la distanza lineare da  $(P0)$  dei due estremi della poligonale, da non confondere con la lunghezza della poligonale.

Per non essere da meno della spirale logaritmica o voluto togliermi il seguente sfizio.

Voglio disegnare lo schema di base di una poligonale logaritmica che termina in un punto  $(Pf)$  di cui conosco le coordinate polari rispetto a  $(P0)$ .

Non voglio sfruttare le equazioni della spirale logaritmica per trovare l'inclinazione  $(\alpha)$  dei segmenti, perciò mi sono costruito un'equazione per trovare il primo  $(Pc)$  che chiamo  $(Pc_1)$ , dati  $(R0)$   $(Rf)$   $(\theta f)$ .

Sapendo che  $(\theta f)$  ed  $(Rf)$  sono le coordinate polari di  $(Pf)$  rispetto a  $(P0)$ ,  $(\theta)$  lo scelgo sottomultiplo di  $(\theta f)$  e se non ho un interesse particolare per  $(R0)$  lo scelgo a caso o di comodità, l'equazione è la seguente.

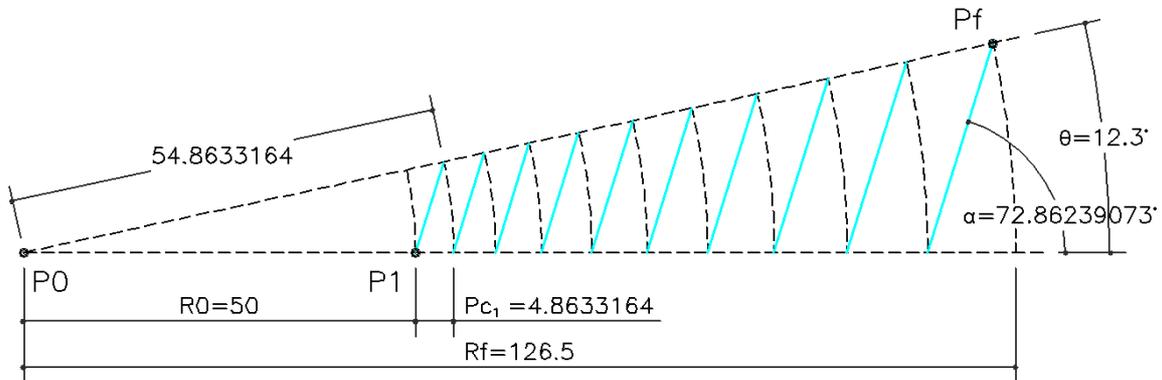
$$Pc_1 = R0 \cdot \sqrt{\frac{\theta f}{\theta} \frac{Rf}{R0}} - R0$$

Che è equivalente ad  $r-a=a \cdot e^{(b \cdot \theta)} - a$  dovendo però calcolare prima  $(b)$

Esempio:  $R_0=50$   $R_f=126.5$   $\theta_f=123^\circ$   $\theta=12.3^\circ$

$$P_{C_1} = 50 \cdot \frac{123}{12.3} \sqrt{\frac{126.5}{50}} - 50 = 50 \cdot {}^{10}\sqrt{2.53} - 50 = 4.8633164$$

Ora conoscendo  $(R_0)$   $(\theta)$  e  $(P_{C_1})$  posso calcolare  $(\alpha)$ , ma posso anche ottenerlo graficamente, come ho fatto.



La poligonale logaritmica la faccio partire sempre ad ore 3 rispetto  $(P_0)$ , quindi l'angolo  $(\theta_f)$  lo intendo riferito a questo orientamento.

Lo dico perché  $(\theta_f)$  a parità di  $(R_f)$  determina l'inclinazione non tanto dei segmenti della poligonale quanto della spirale logaritmica collegata alla poligonale.

Variando  $(\theta_f)$  varia anche l'inclinazione della spirale logaritmica collegata, ossia il percorso che può essere più o meno diretto.

Ricapitolando, date le coordinate polari  $(\theta_f)$  ed  $(R_f)$  del punto finale  $(P_f)$  rispetto a  $(P_0)$ , posso disegnare una poligonale logaritmica che termina in questo punto partendo da  $(P_1)$ , questo calcolando prima  $(P_{C_1})$ .

Nell'esempio il punto  $(P_1)$  poteva essere nei dati, in ogni caso  $(P_1)$  per mia scelta ha sempre coordinate polari:  $0^\circ$ ,  $(R_0)$  come da schema di base.

Il passo angolare  $(\theta)$  deve essere scelto in modo da ottenere un numero intero come risultato di  $(\theta_f)/(\theta)$ .

Nell'esempio ho realizzato lo schema di base per una poligonale che si allontana da  $(P_0)$ , ma si può realizzare anche in senso inverso, cioè verso  $(P_0)$ .

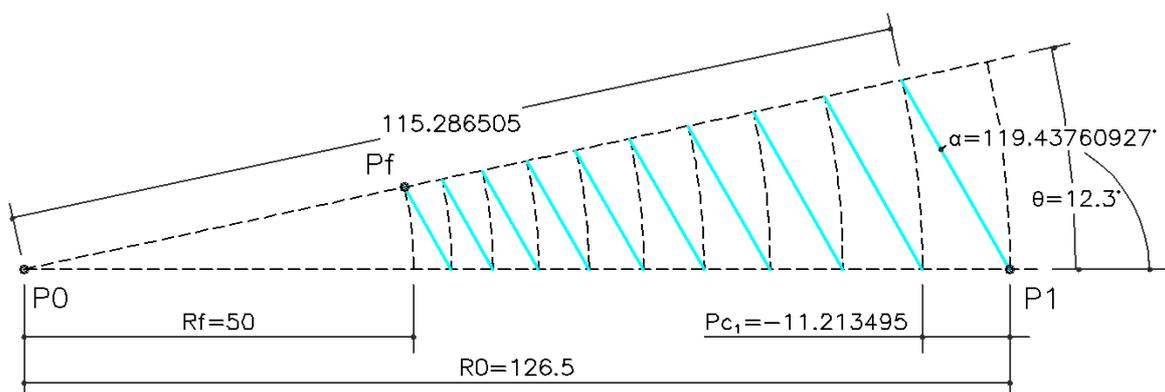
Occorre solo tenere presente che, come da schema di base, la poligonale si sviluppa sempre in senso antiorario.

Il punto finale  $(P_f)$  ha ancora coordinate polari  $(\theta_f)$ ,  $(R_f)$  cambia solo che  $(R_f)$  è minore di  $(R_0)$ .

Come prima devo scegliere  $(\theta)$ , l'equazione per calcolare  $(P_{C_1})$  è sempre la stessa, ma il risultato sarà un numero negativo.

Riporto di seguito lo schema di base risultante invertendo solo i valori di  $(R_f)$  ed  $(R_0)$ .

Noterete che lo schema di base è speculare rispetto al precedente, così è anche per le due poligonali.



Nell'attività ho inserito il valore di  $(Pc_1)$ , tenendo conto che i segmenti sono 36 magari può servire a togliersi qualche curiosità.

Questo è il link: dove trovate tutti i lavori che ho pubblicato su GeoGebra.

<https://www.geogebra.org/u/bydante>

Per trovare gli articoli da cui derivano le attività che ho pubblicato su GeoGebra, questo è il link

[https://vixra.org/author/dante\\_servi](https://vixra.org/author/dante_servi)

(Follows English)

This activity creates a logarithmic polygonal spiral that starts with (P1) moving away from the origin (P0) or approaching it.

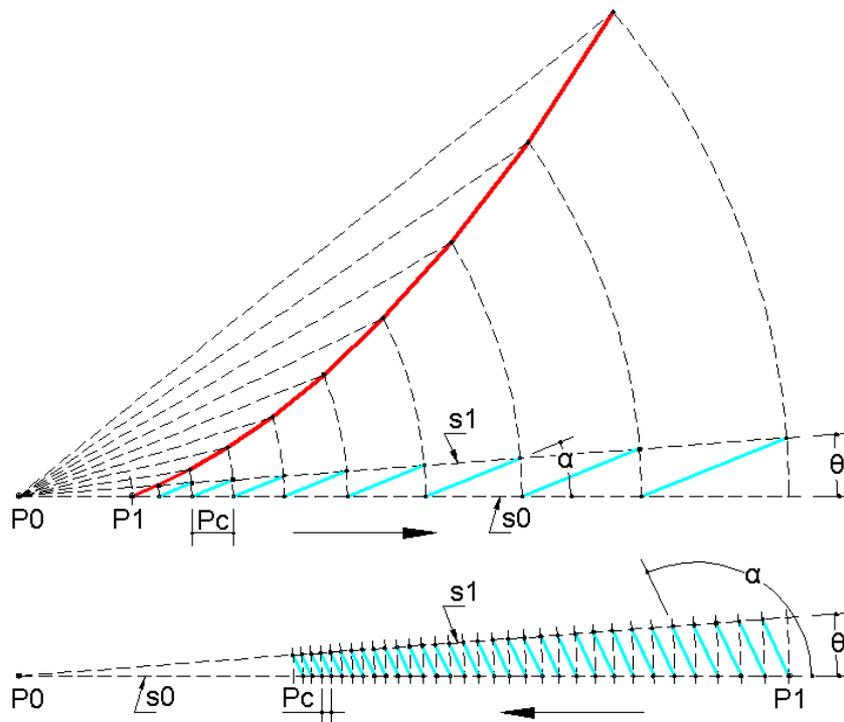
The change of direction is obtained by changing the inclination ( $\alpha$ ) of the segments that make up the basic scheme and consequently the polygonal.

Both the basic scheme (blue) and the polygonal (red) are composed of 36 segments of which the first is in common.

As soon as I manage, I double the number of segments, believing that the polygonal can gain in elegance.

Being a logarithmic polygonal, it meets three requirements that I describe referring to the basic scheme, that is to the blue segments.

- 1) The segments all have the same inclination ( $\alpha$ ).
- 2) The length of the segments is delimited by two other segments (s0) and (s1) with origin in (P0), the first is horizontal and the second forms with the first the angle ( $\theta$ ), the latter is also the constant angular step that delimits all segments of the polygonal.
- 3) The beginning of each segment shares the same center circumference in (P0) with the end point of the previous segment.



The segments of the polygonal (red) are the rotated copy, with center in (P0), of the blue segments, therefore they have the same characteristics, see also instructions for my other activities.

In this new version I added the possibility of varying the angle ( $\theta$ ) from  $5^\circ$  to  $30^\circ$ , I expanded the field of action of the slider that controls the distance between (P1) and (P0) up to 1000, I expanded the field of action of the slider that controls the inclination ( $\alpha$ ) of the segments from  $2.4 \cdot \theta$  to  $180^\circ$  and I have inserted an automatic zoom that can be deactivated.

The automatic zoom keeps the polygonal within the displayed field so I think it has its own usefulness, but it can give the wrong impression that nothing changes when you act on the slider that controls the distance between (P1) and (P0) this is due to the characteristic of the logarithmic spiral of always remaining equal to itself in every stretch of its path.

Try to disable the automatic zoom through the checkbox at the bottom left to touch what is actually happening. To unlock the automatic zoom you must also slightly move one of the first two sliders.

By updating this text, I also made some changes to the activity.

I made available input fields for (R0) and ( $\alpha$ ) even if online at the moment I understand that they do not work correctly for the corners, in case you still use the sliders.

I expanded the field of the angular step ( $\theta$ ) which now starts from  $1^\circ$ .

I put two checkboxes which I called Golden IN and Golden OUT.

Activating one deactivates the other, clicking on the one that is possibly active deactivates it.

When one of the two boxes is active cannot be changed ( $\alpha$ ).

This modification allows you to activate the "golden polygonal spiral" approaching or moving away from (P0) according to the pairs of values of ( $\theta$ ) and ( $\alpha$ ) which keep the polygonal connected to the golden spiral.

With the Golden IN or Golden OUT mode active try to vary the angular step ( $\theta$ ), that if on the one hand increasing the value the polygonal looks less and less like the logarithmic spiral, on the other hand it covers a greater part of the spiral.

I've always thought about it and I'm certainly not the only one, the logarithmic spiral is fascinating to see it chasing the origin becoming smaller and smaller, reaching the point that you can't follow it anymore. Unfortunately to appreciate this it doesn't help a static image I have however saw a nice animated gif under "Golden spiral" on Wikipedia; since the common direction of development turns out to be counterclockwise, I fear that the image used is the usual one of the spiral that moves away from the origin.

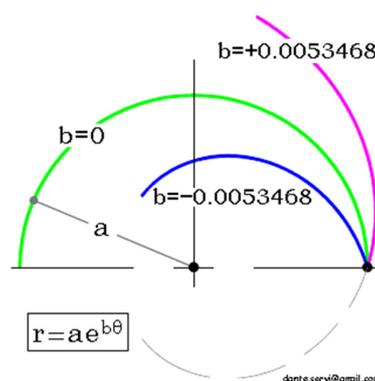
It is true that by observing the design of a logarithmic spiral one can interpret it as he prefers, but when you are realizing it, you cannot fail to notice if he moves away or if he approaches the origin, and this activity of mine leaves no doubt about it.

Every now and then it happens to read that the logarithmic spiral can also be directed towards the origin but I could not find an article that clearly explained how and why, and which equally clearly explained the function of (a) and (b) in the equations of the logarithmic spiral.

Also as regards the definition of inclination of the logarithmic spiral I have not found uniformity and clarity, I have chosen one that I use below.

What I have just written refers to what I could find on the Web, but I have not limited myself to Wikipedia that more than other sources, from which I expected something better, convinced me and helped me.

Since the polygonal spiral made with this activity, different from the logarithmic spiral only in that it does not have a continuous increase of ( $\theta$ ) but an increase that I define in steps (the angular step ( $\theta$ )), I decided that the time to bring back to the logarithmic spiral what I have already described for some time for this polygonal.



I do not pretend to have discovered something new about the logarithmic spiral, it is enough for me to have tried to clarify, having said that I am now going back to the polygonal.

With this activity, which allows you to move the starting point (P1) of the polygonal to or away from the origin (P0), I slide the vertices of the polygonal along an invisible logarithmic spiral. Being by graphic construction (P1) tied to the horizontal segment, it is necessary to imagine that by dragging (P1) it is the logarithmic spiral to rotate while the vertices of the polygonal slide on it.

Changing the inclination ( $\alpha$ ) of the segments or the angular step ( $\theta$ ) changes the reference logarithmic spiral since for each inclination of the logarithmic spiral there is a precise relationship between the angular step ( $\theta$ ) and the step ( $P_c$ ) of the circles that hold connected the segments of the basic scheme.

In golden spiral mode you can see how changing the angular step ( $\theta$ ) automatically changes the inclination ( $\alpha$ ).

For the same existing constraints, fixed the angular step ( $\theta$ ) and the constant inclination ( $\alpha$ ) of the segments of the basic scheme, the step ( $P_c$ ) of the circles is graphically.

Analytically we find the same result with this equation in polar coordinates that I found on Wikipedia  
 $r=a \cdot e^{(b \cdot \theta)}$ .

Where ( $\theta$ ) is the angle with respect to the origin ( $P_0$ ) between two points of the spiral and  $r-a$  is the difference between the distances from the origin ( $P_0$ ) of these two points.

In our case ( $\theta$ ) it is the constant angular step and  $r$  is the step ( $P_c$ ) of the circles, which changes from one segment to another except the case in which it resets as we will see later, or when it becomes equal to ( $R_0$ ) which happens for  $\alpha=180^\circ$ .

For the logarithmic spiral it is known that for  $b=0$  it turns out  $e^{(b \cdot \theta)}=1$  and therefore  $r=a$  that is to the variation of ( $\theta$ ) ( $r$ ) it does not increase and the spiral becomes a circle of radius  $r=a$ .

The logarithmic polygonal spiral is no different, setting  $R_0=a$ , you can find the right ratio between the angular step ( $\theta$ ) and the inclination ( $\alpha$ ) of the segments to intercept this circle with the vertices, also if ( $\theta$ ) is a  $360^\circ$  submultiple generates a regular polygon.

Here is a series of pairs of values of the angular step ( $\theta$ ) and the inclination ( $\alpha$ ) of the segments to obtain this result.

|  $\theta 5^\circ \alpha 92.5^\circ$  |  $\theta 10^\circ \alpha 95^\circ$  |  $\theta 15^\circ \alpha 97.5^\circ$  |  $\theta 20^\circ \alpha 100^\circ$  |  $\theta 24^\circ \alpha 102^\circ$  |  $\theta 30^\circ \alpha 105^\circ$  |

I now want to explain that the inclination ( $\alpha$ ) of the segments cannot be equal to the inclination (in whatever way you call it) of the logarithmic spiral for three reasons.

We have already seen the first by noting that the inclination of the polygonal is the result of the combination of the inclination ( $\alpha$ ) of the segments and the angular step ( $\theta$ ).

I use the latter comparison between the polygonal and the logarithmic spiral to explain the second reason.

For the logarithmic spiral in this particular situation in which it becomes a circumference of radius ( $a$ ), its inclination becomes zero.

Now is the time to remember that for the logarithmic spiral, with reference to any of its points, the inclination is the angle between its tangent and the perpendicular in the same point to the segment that connects it to the origin of the spiral.

By becoming a circumference, always with reference to any point, the tangent and the perpendicular in the same point to the segment that connects it to the center of the circumference coincide and therefore the angle becomes zero.

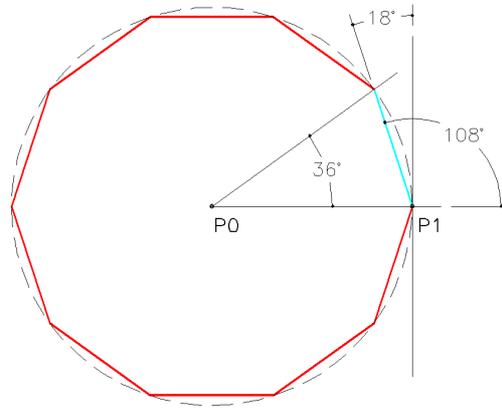
When I defined my method, I found it easier in constructing the basic scheme to refer to the segment ( $s_0$ ) and not its perpendicular to define the inclination ( $\alpha$ ) of the blue segments, so the second reason is a different way of measuring the inclination.

The third reason is that in the basic scheme the inclination of the segments is always measured on the right side of the segment, I do not change sides following the direction of development of the polygonal.

For the logarithmic spiral, according to the definition of inclination that I have chosen and just used, I think I can say that the problem does not exist.

In the following figure for  $(\theta) = 36^\circ$  the inclination  $(\alpha)$  of the segments is  $108^\circ$  while, it would have been  $18^\circ$  if I had adopted the same method used for the logarithmic spiral.

In the pairs of values  $(\theta)$  and  $(\alpha)$  just proposed it can be seen that, the smaller the value of  $(\theta)$  the more  $(\alpha)$  approaches  $90^\circ$  ( $90^\circ$  for the polygonal corresponds to  $0^\circ$  for the spiral), this confirms that the smaller  $(\theta)$  the more the polygonal approaches the logarithmic spiral, as can be seen graphically.



In another activity that you can find at this link <https://www.geogebra.org/m/hddmz9zy>, in which the step  $(Pc)$  of the circles is controlled instead of checking the inclination  $(\alpha)$  of the segments, for  $(Pc)$  constant we obtain a polygonal that intercepts with all its vertices a spiral of Archimedes. To obtain a constant  $(Pc)$ , just set  $(IPc)$  equal to zero.

Returning to the logarithmic polygonal, as already said, the smaller the angular step  $(\theta)$  the more precise but short the section of the covered spiral, evidently for the same number of segments. The more segments you have available, the more you can reduce the angular step and therefore increase the points of contact with a logarithmic spiral.

This activity is only demonstrative, it must not respond to specific needs, however I think it may be interesting for several reasons to compare the value of  $x^*$  with that of  $(R0)$ .

These two values indicate the linear distance from  $(P0)$  of the two ends of the polygonal, not to be confused with the length of the polygonal.

Not to be outdone by the logarithmic spiral or wanted to take away the following whim.

I want to draw the basic scheme of a logarithmic polygonal ending in a point  $(Pf)$  of which I know the polar coordinates with respect to  $(P0)$ .

I don't want to use the equations of the logarithmic spiral to find the inclination  $(\alpha)$  of the segments, therefore I have built an equation to find the first  $(Pc)$  that I call  $(Pc_1)$ , data  $(R0)$   $(Rf)$   $(\theta_f)$ .

Knowing that  $(\theta_f)$  and  $(Rf)$  are the polar coordinates of  $(Pf)$  with respect to  $(P0)$ ,  $(\theta)$  I choose it sub-multiple of  $(\theta_f)$  and if I have no particular interest in  $(R0)$  I choose it at random or convenience, the equation is as follows.

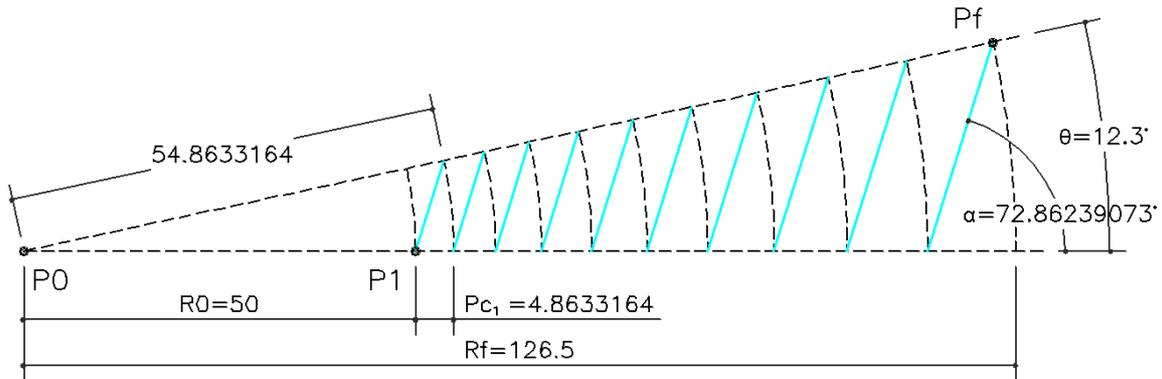
$$Pc_1 = R0 \cdot \sqrt{\frac{Rf}{R0}}^{\frac{\theta_f}{\theta}} - R0$$

Which is equivalent to  $r-a=a \cdot e^{(b \cdot \theta)} - a$  but having to calculate first  $(b)$

Example:  $R0=50$   $Rf=126.5$   $\theta_f=123^\circ$   $\theta=12.3^\circ$

$$Pc_1 = 50 \cdot \frac{123}{12.3} \sqrt{\frac{126.5}{50}} - 50 = 50 \cdot {}^{10}\sqrt{2.53} - 50 = 4.8633164$$

Now knowing (R0) ( $\theta$ ) and ( $Pc_1$ ) I can calculate ( $\alpha$ ), but I can also get it graphically, as I did.



I always start the polygonal logarithmic at 3 o'clock ( $P_0$ ), so I mean the angle ( $\theta_f$ ) referred to this orientation. I say this because ( $\theta_f$ ) with the same ( $R_f$ ) determines the inclination not so much of the segments of the polygonal as of the logarithmic spiral connected to the polygonal.

Varying ( $\theta_f$ ) the inclination of the connected logarithmic spiral also changes, that is the path that can be more or less direct.

In summary, given the polar coordinates ( $\theta_f$ ) and ( $R_f$ ) of the end point ( $P_f$ ) with respect to ( $P_0$ ), I can draw a logarithmic polygonal that ends at this point starting from ( $P_1$ ), this by calculating first ( $Pc_1$ ).

In the example the point ( $P_1$ ) could be in the data, in any case ( $P_1$ ) for my choice it always has polar coordinates:  $0^\circ$ , ( $R_0$ ) as for the basic scheme.

The angular step ( $\theta$ ) must be chosen in order to obtain an integer as a result of ( $\theta_f$ )/( $\theta$ ).

In the example I made the basic scheme for a polygonal that moves away from ( $P_0$ ), but it can also be done in the opposite direction, that is towards ( $P_0$ ).

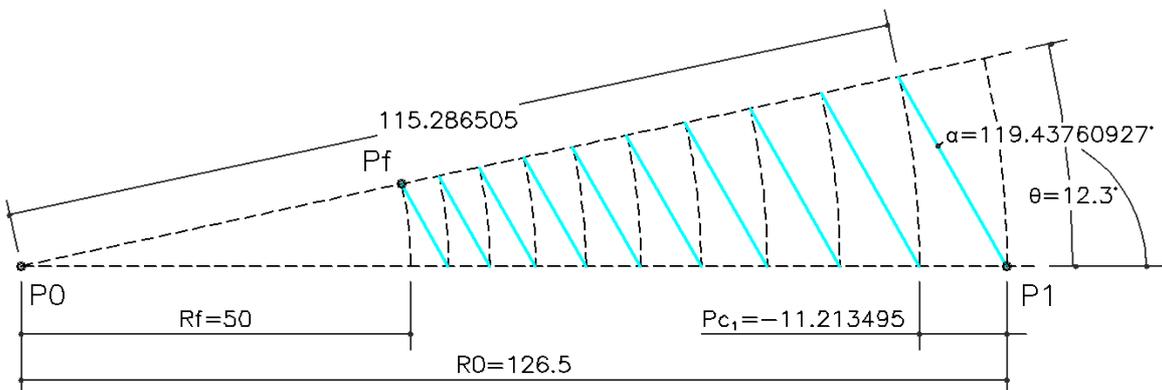
It is only necessary to keep in mind that, as for the basic scheme, the polygonal always develops counterclockwise.

The end point ( $P_f$ ) still has polar coordinates ( $\theta_f$ ), ( $R_f$ ) changes only that ( $R_f$ ) is less than ( $R_0$ ).

As before I have to choose ( $\theta$ ), the equation to calculate ( $Pc_1$ ) is always the same, but the result will be a negative number.

I report below the resulting basic scheme by inverting only the values of ( $R_f$ ) and ( $R_0$ ).

You will notice that the basic scheme is specular with respect to the previous one, so it is also for the two polygonal.



In the activity I entered the value of ( $Pc_1$ ), taking into account that the segments are 36 maybe it can serve to remove some curiosity.

This is the link where you can find all the works I published on GeoGebra.

<https://www.geogebra.org/u/bydante>

To find the articles from which the activities I have published on GeoGebra derive, this is the link

[https://vixra.org/author/dante\\_servi](https://vixra.org/author/dante_servi)