Limiet van rijen en reeksen

www.karelappeltans.be

June 30, 2024

Contents

1 Het begrip rij

1.1 Voorbeelden

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...
- 2, 5, 8, 11, 14, 17, ...
- 3, 9, 27, 81, ...
- 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,$\frac{1}{5}$,...
- 8, 17, -13, 22,...
- 0, $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{15}{16}$,...
- 2, 4, 8, 16,...
- 2, 4, 8, 16,...
- 2, 3, 5, 7, 11,...
- 24,-12,6,-3,...

1.2 algemene notaties

1.3 expliciet versus recursief voorschrift bij willekeurige rijen

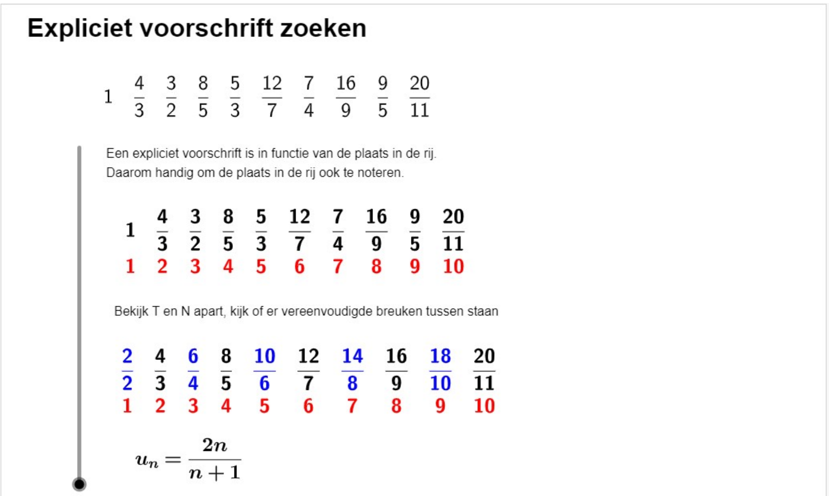


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/b9dwqbfj

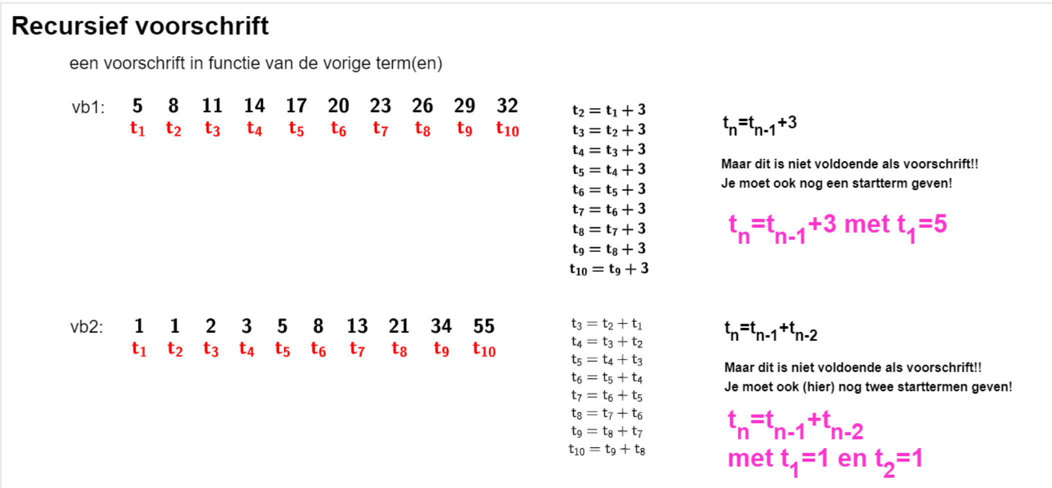


Figure 2: https://www.geogebra.org/m/b9dwqbfj

1.4 RR en MR

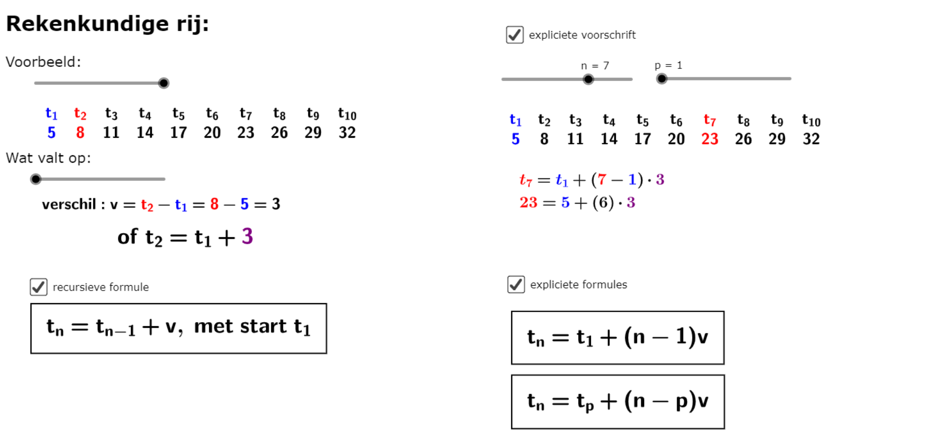


Figure 3: https://www.geogebra.org/m/utbsf4p6

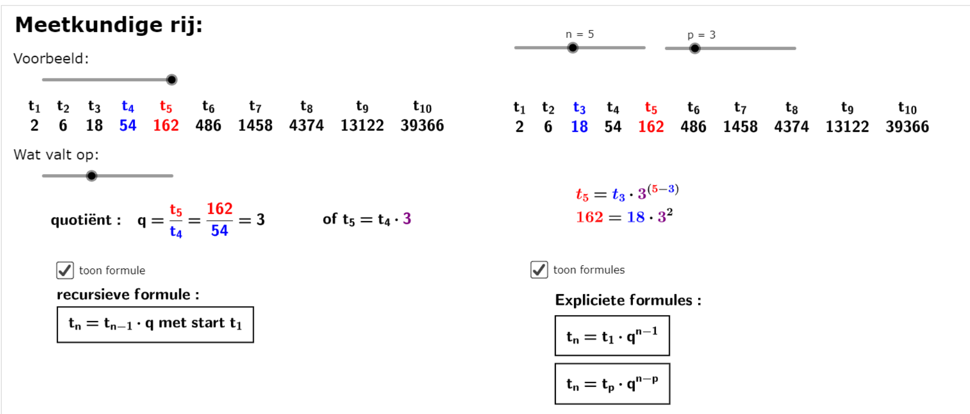


Figure 4: https://www.geogebra.org/m/fbuwskxk

1.5 Oefeningen

1. Geef voor de volgende rijen telkens de twee eerstvolgende termen. Bepaal, indien mogelijk, een recursief en expliciet voorschrift

- 4, 7, 10, 13, ...
- -2, 6, -18, 54, ...
- $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, ...
- $\sqrt{3}$, $-\sqrt{6}$, $2\sqrt{3}$,$-2\sqrt{6}$,..
- $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{17}$,...
- $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, $\frac{5}{4}$,...
- 2, 1, $\frac{8}{9}$, 1, $\frac{32}{25}$,...

2. Bereken de eerste 3 volgende termen van de rijen gedefinieerd door onderstaand recursief voorschrift:

   (a) De rij van Göbel: $x_0 = 1$ en $x_n = \frac{1+x_0^2+x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2}{n}$

   (b) De rij van Somos: $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ en $x_n = \frac{x_{n-1}\cdot x_{n-4}+x_{n-2}\cdot x_{n-3}}{x_{n-5}}$

3. Los op:

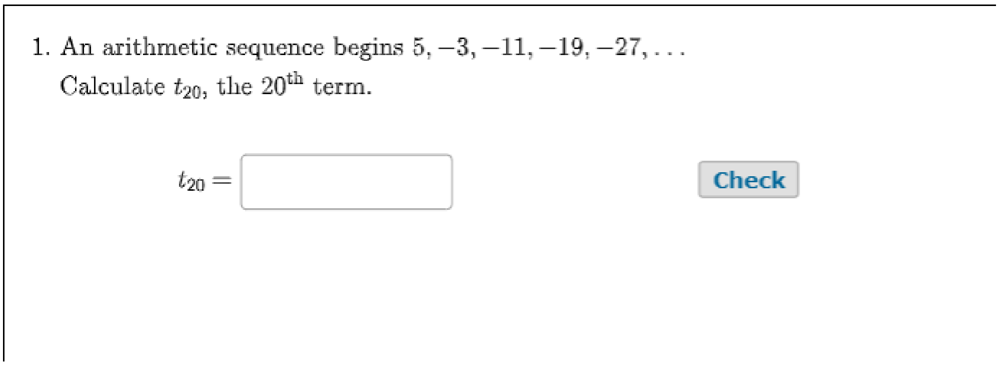


Figure 5: https://www.geogebra.org/m/utbsf4p6

4. Los op:

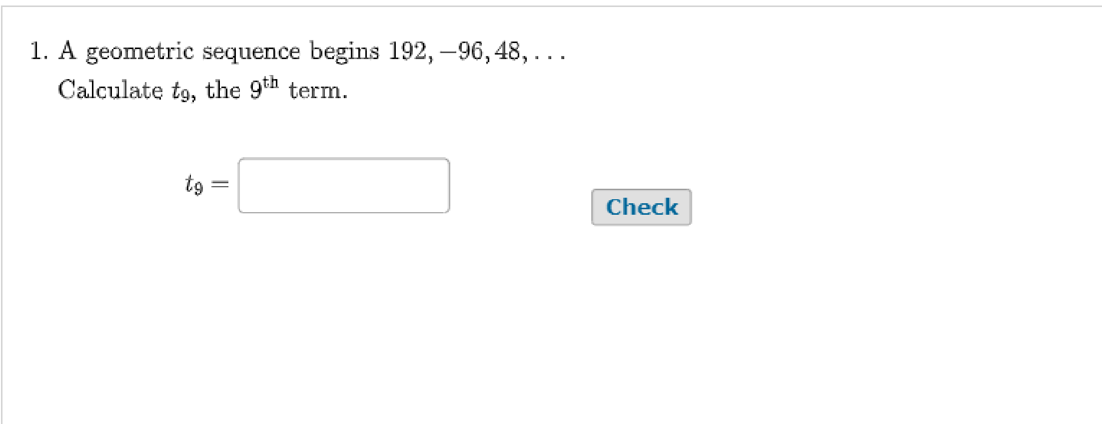


Figure 6: https://www.geogebra.org/m/fbuwskxk

5. in een RR is de derde term gelijk aan -3 en de zesde term gelijk aan -15. Bepaal het verschil en de eerste term.

6. De termen van de rij u_n voldoen aan $u_1 = \frac{1}{3}$ en $3u_{n+1} - 6u_n - 1 = 0$

   (a) Toon aan dat de rij $u_n + \frac{1}{3}$ een MR is

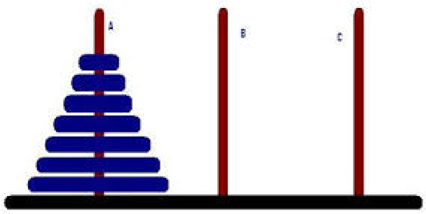
   (b) Bepaal een expliciet voorschrift van deze MR

7. Gegeven is de RR $u_n : 3, 1, -1, \ldots$ en de MR $v_n : 32, 16, 8, \ldots$. Bepaal een expliciet voorschrift van de rij $w_n = u_n + v_n$. (A: $w_n = 5 - 2n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}$

8. De 2de, 8ste en 44ste term van een RR (met $u_1 = 1$ en v positief) vormen een MR. Bepaal de waarde van v. (antw. $v = 5$)

9. De 3de term van een MR is $\frac{81}{64}$ en de 5de term $\frac{729}{1024}$. Bepaal de 1ste term en het quotiënt.

10. Torens van Hanoi



Geef een expliciet en een recursief voorschrift voor het aantal stappen

11. rij 2, 4, 8, 16, 31, ...

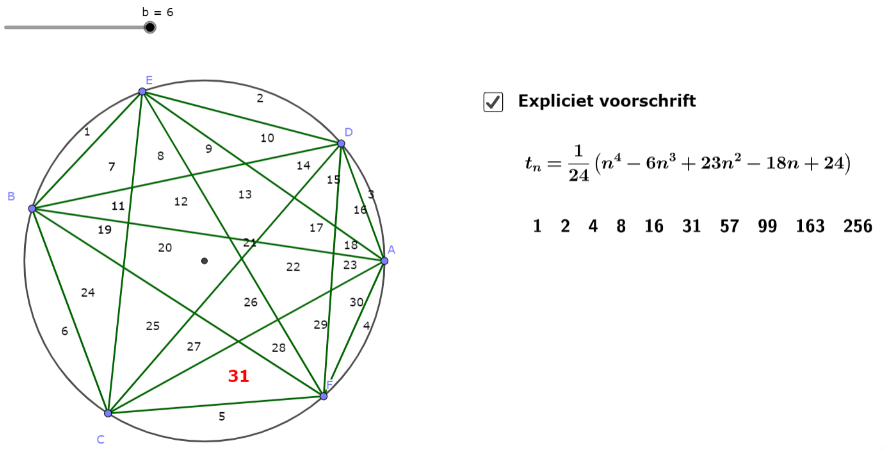


Figure 7: https://www.geogebra.org/m/dggkrssv

2 Limiet van een rij met expliciet voorschrift

2.1 eindige limiet

2.1.1 m.b.v. definitie

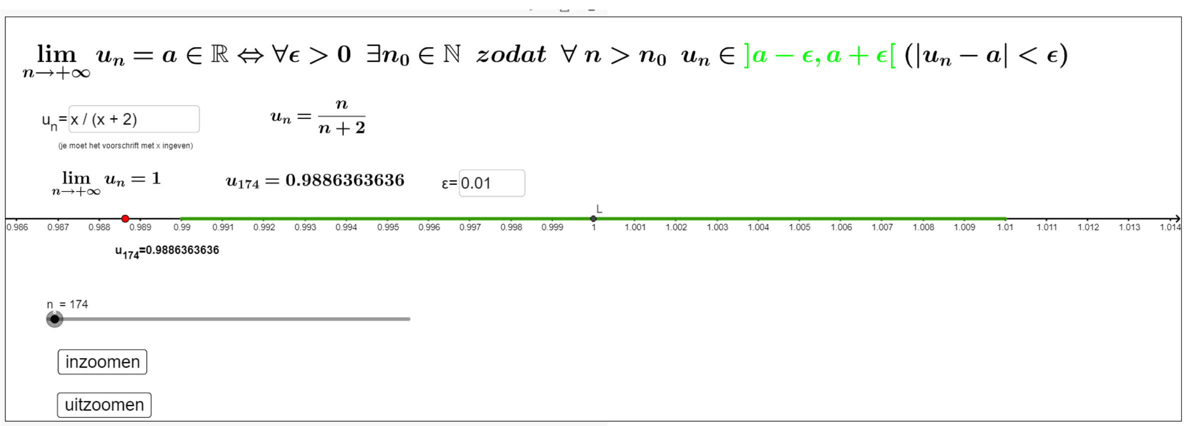


Figure 8: https://www.geogebra.org/m/ESeUy7pn

Oefeningen

1. $t_n : 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...$
2. $t_n = \frac{2n+100}{n}$
3. $t_n = \frac{-3n+4}{n+2}$
4. $t_n = 3 - (\frac{1}{2})^n$
5. $t_n = \frac{6n+500}{-2n+156}$
6. $t_n = \frac{2n+8000}{n}$ Is $\lim_{n\to\infty} t_n = 3$?

2.1.2 m.b.v. rekenregels

Stelling 1:

Als $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ en $\lim_{n\to\infty} v_n = l'$ dan

1. $\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = l + l'$
2. $\lim_{n\to\infty} u_n.v_n = l.l'$
3. $\lim_{n\to\infty} k.u_n = k.l$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{l'}$ als $v_n \neq 0$ en $l' \neq 0$

Bewijs van 1.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall \frac{\epsilon}{2} > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}_0 \quad zodat \quad \forall n > n_1 \quad u_n \in]l - \epsilon, l + \epsilon[\quad of \quad l - \frac{\epsilon}{2} < u_n < l + \frac{\epsilon}{2}$$
$$\lim_{n\to\infty} v_n = l' \Leftrightarrow \forall \frac{\epsilon}{2} > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}_0 \quad zodat \quad \forall n > n_2 \quad v_n \in]l' - \epsilon, l' + \epsilon[\quad of \quad l' - \frac{\epsilon}{2} < v_n < l' + \frac{\epsilon}{2}$$

Neem nu $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ dan geldt voor alle $n > n_0$:

$$l + l' - \epsilon < u_n + v_n < l + l' < l + l' + \epsilon$$

Wat de definitie is van $\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = l + l'$

Stelling 2:

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$, $p \in Q_0^+$

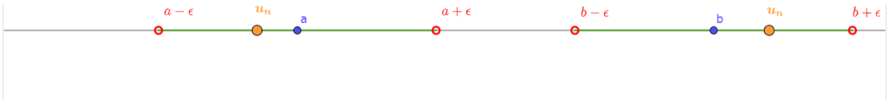
Toepassen:

$\lim_{n\to\infty} \frac{4n-3}{2n+1}$

Oefeningen

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n}{5n^4-n^2}$
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{2\sqrt{n}+11}$

Stelling 3:Een eindige limiet van een rij is uniek



TB: De eindige limiet van een rij is uniek

Bewijs uit het ongerijmde

Veronderstel dat er toch twee limieten bestaan:

$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \text{ en } \lim_{n\to+\infty} u_n = b$

De definitie van limiet geeft dan:

$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \text{ zodat } \forall\, n > n_1 \text{ geldt}: \; a-\epsilon < u_n < a+\epsilon$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = b \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \text{ zodat } \forall\, n > n_2 \text{ geldt}: \; b-\epsilon < u_n < b+\epsilon$

$\text{Kies nu}: \epsilon < \frac{|b-a|}{2}$ Dit is de dus minder dan de helft van de afstand tusen a en b

Het moet gelden voor alle $\epsilon > 0$, dus ook voor deze waarde, deze keuze heeft als gevolg dat er geen overlap in de omgevingenis

$\text{Kies nu}: n_0 = max\{n_1, n_2\}, \text{ dan geldt } \forall\, n > n_0$ **dat u_n in beide intervallen moet liggen**

Dat kan niet: Een getal kan maar op één plaats op de getallenas liggen.
Dus de veronderstelling is fout.. Dus er bestaat maar één limiet

Figure 9: https://www.geogebra.org/m/ESeUy7pn

2.2 oneindige limiet

2.2.1 m.b.v. definitie

voorbeelden

1. $\lim_{n\to\infty} n^2$
2. $\lim_{n\to\infty} -3n+5$
3. $\lim_{n\to\infty} 4^n$

Definitie

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall r > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \quad zodat \quad \forall n > n_0 \quad u_n > r$$
$$\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall r > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \quad zodat \quad \forall n > n_0 \quad u_n < -r$$

2.2.2 m.b.v. rekenregels

som: $u_n + v_n$

$\lim_{n\to\infty} u_n$ \ $\lim_{n\to\infty} v_n$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	/
$-\infty$	/	$-\infty$
l	$+\infty$	$-\infty$

product: $u_n.v_n$

$\lim_{n\to\infty} u_n$ \ $\lim_{n\to\infty} v_n$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	/	/
$l,,l>0$	$+\infty$	$-\infty$
$l,l<0$	-∞	$+\infty$

omgekeerde: $\frac{1}{u_n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{u_n}$
$+\infty$	0
$-\infty$	0
$l, l \neq 0$	$\frac{1}{l}$
0_+	$+\infty$
0_-	$-\infty$

quotient $\frac{u_n}{v_n}$

		$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$				
		$+\infty$	$-\infty$	0_+	0_-	$l', l' \neq 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$+\infty$	/	/	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
	$-\infty$	/	/	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
	0	0	0	/	/	0
	$l, l > 0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{l}{l'}$
	$l, l < 0$	0	0	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{l}{l'}$

oefeningen

1. Bewijs: $+\infty + \infty = +\infty$
2. Verklaar $(+\infty) + (-\infty)$ is een onbepaalde vorm
3. Verklaar $\frac{+\infty}{-\infty}$ is een onbepaalde vorm
4. Toon aan m.b.v. de rekenregels
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 - n = +\infty$
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3+5n-7}{2n^3+1} = \frac{3}{2}$
5. Bereken m.b.v. de rekenregels:
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^5 - n^4 + n^7$
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$

3 limiet van een rij met lineair recursief voorschrift

3.1 grafisch en algebraïsche oplossing

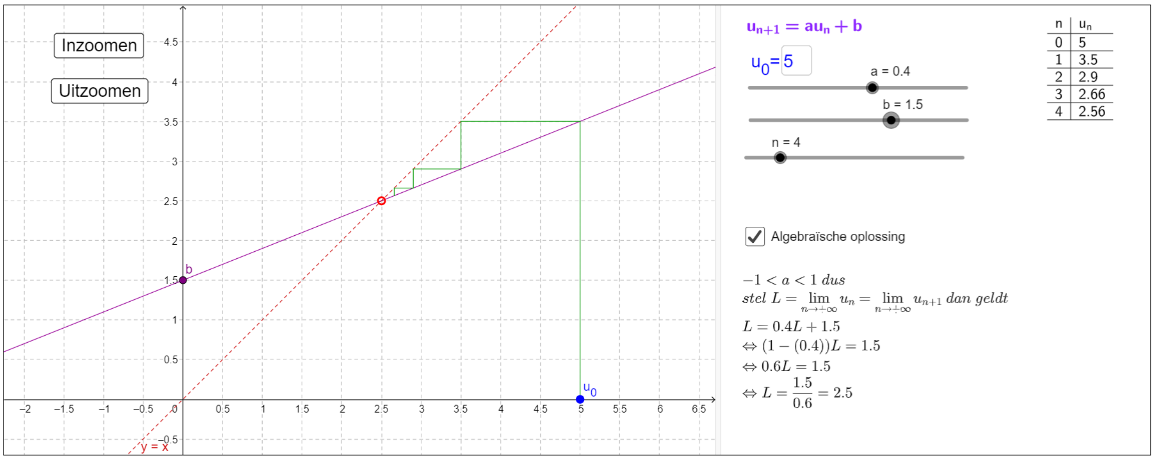


Figure 10: https://www.geogebra.org/m/rxceuztj

3.2 oefeningen

1. LV Appeltans Boomteelt heeft een perceel bomen. Elk jaar wordt 20% gerooid en worden er 1000 nieuwe boompjes gepland. Het eerste jaar worden er 4000 boompjes gepland. Op lange termijn bekeken,hoeveel bomen bevinden zich er op het perceel?

2. Mijn schoonvader gaat op consultatie bij dr. Bart Appeltans voor een ontstoken galblaas. Er moet onmiddellijk met medicatie begonnen worden: eerst een dosis van 50 mg en vervolgens elke drie uur een dosis van 25 mg. Het lichaam zal dit medicament ook afbreken: elke drie uur wordt 40% afgebroken. Het medicament is pas effectief als op lange termijn meer dan 60 mg. in het lichaam aanwezig blijft.

   (a) Zal de voorgeschreven dosis volstaan?

   (b) Welke begindosis moet er minimaal voorgeschreven worden om de 60 mg- grens te halen?

   (c) Welke hoeveelheid moet er minimaal om de drie uur gegeven worden om de 60 mg- grens te halen?

   (d) Wat is het maximale afbraak-% om de 60 mg- grens te behouden?

3. Sinds enkele jaren mag er van president Poetin geen Limburgs fruit meer ingevoerd worden in Rusland. Belorta fruitveilingen en zijn CEO, P.Appeltans, hebben echter een smokkelroute opgezet. In een pakhuis wordt al het fruit verzameld. Helaas wordt per dag 60% onderschept door de Russische douane. Hoeveel ton fruit bevat op termijn het pakhuis, als elke dag 1500 kg vertrekt en de eerste lading niet onderschept wordt. Geef een grafische en algebraïsche oplossing.

4. Gegeven is volgende rij met recursief voorschrift $u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$ met $u_1 = 0$ en $u_2 = 1$

   (a) Geef de eerste 4 termen van deze rij.

   (b) Geef een recursief voorschrift van de vorm $u_{n+1} = a \cdot u_n + b$ voor deze rij.

   (c) Bepaal grafisch en algebraísch de limiet van deze rij.

5. Het aantal vragen op FAQ-site kan gemodelleerd worden door $u_{n+1} = 0.9u_n + 1.3$ met u_n het aantal vragen op maand n (per 100). De eerste maand worden er 300 vragen gesteld. Toon m.b.v. volledige inductie aan dat deze rij ook kan voorgesteld worden door het expliciet voorschrift $u_n = 13 - \frac{100}{9}(0.9)^n$

6. Een watervolume van $2200m^3$ wordt verdeeld over twee bassins A en B. Via een pompsysteem wordt elke dag 10% van A naar B gepompt en 15% van B naar A. Bij de start van het systeem bevindt zich 800 l in bassin A en 1400 l in bassin B
   (a) Toon aan dat de hoeveelheid water in bassin A in functie van het aantal dagen gegeven wordt door $a_n = \frac{3}{4}a_{n-1} + 330$
   (b) Bepaal grafisch en algebraísch de uiteindelijke hoeveelheid water in bassin A en B
7. Bepaal de limiet van de recursieve rij $u_{n+1} = p \cdot u_n + q$ als $u_0 = 12, u_1 = 15$ en $u_2 = 16$

4 Algemene technieken

4.1 insluitstelling

Beschouw drie rijen s_n, y_n en z_n. Veronderstel dat er een $k \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat

$$x_n \leq y_n \leq z_n \; voor \; alle \; n \geq k.$$

Veronderstel bovendien dat x_n en z_n een limiet hebben en dat beide limieten gelijk zijn. Dan heeft ook de "middelste" rij y_n een limiet en bovendien is

$$\lim_{x\to\infty} x_n = \lim_{x\to\infty} y_n = \lim_{x\to\infty} z_n$$

oefeningen

1. Bereken $\lim_{n\to\infty} \frac{sin(n)}{n}$
2. Bereken $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$
3. Bereken $\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sin(n)}{2n-\cos(n)}$

4.2 stijgende en dalende rijen

Beschouw een stijgende rij x_n. Dan heeft deze rij altijd een limiet. Bovendien is deze limiet eindig als en slechts als de rij naar boven begrensd is (d.w.z. als er een $M \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat $x_n \leq M$ voor alle $n \in \mathbb{N}$

Oefening

Formuleer nu de tweelingversie van deze stelling voor dalende rijen.

5 Limiet van een reeks

5.1 Sommatieteken

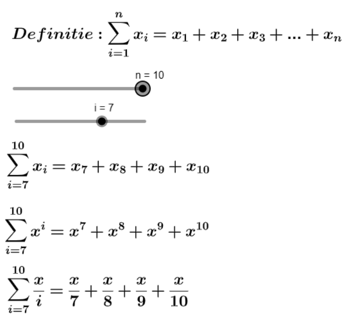


Figure 11: https://www.geogebra.org/m/BbA7YSm8

5.2 Som van een Rekenkundige en Meetkundige rij

5.2.1 Som RR

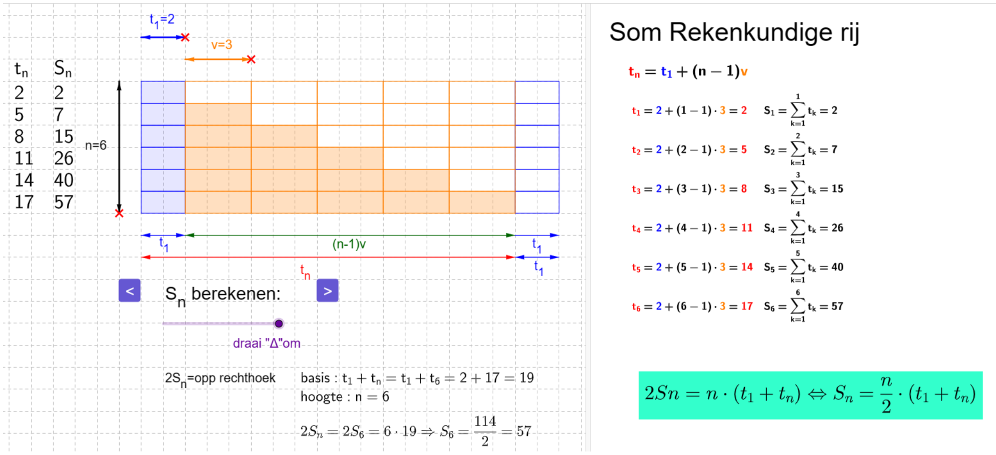


Figure 12: https://www.geogebra.org/m/nrmmbu9u

5.2.2 Som MR

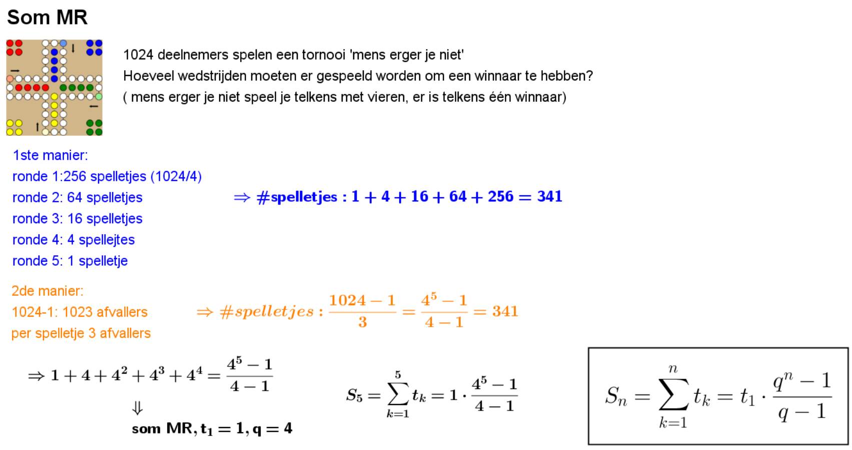


Figure 13: https://www.geogebra.org/m/nrmmbu9u

5.3 Kan een reeks convergeren?

5.3.1 RR

Figure 14: https://www.geogebra.org/m/bsergwde

5.3.2 MR

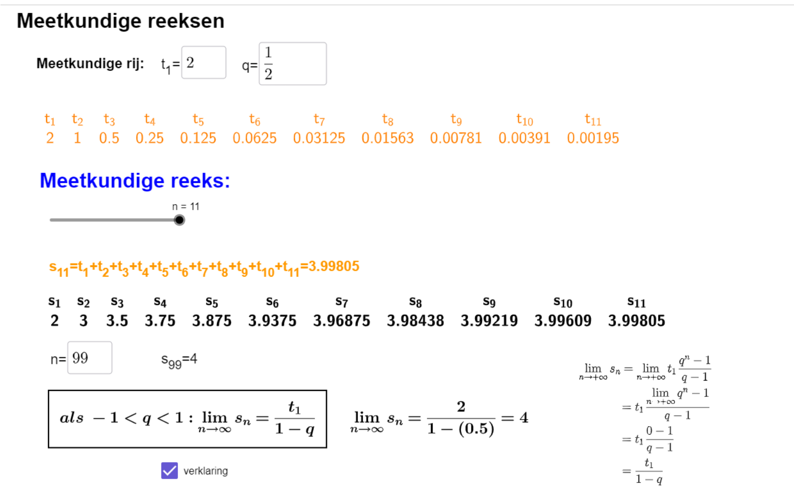
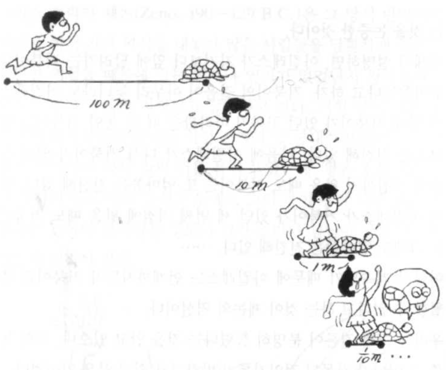
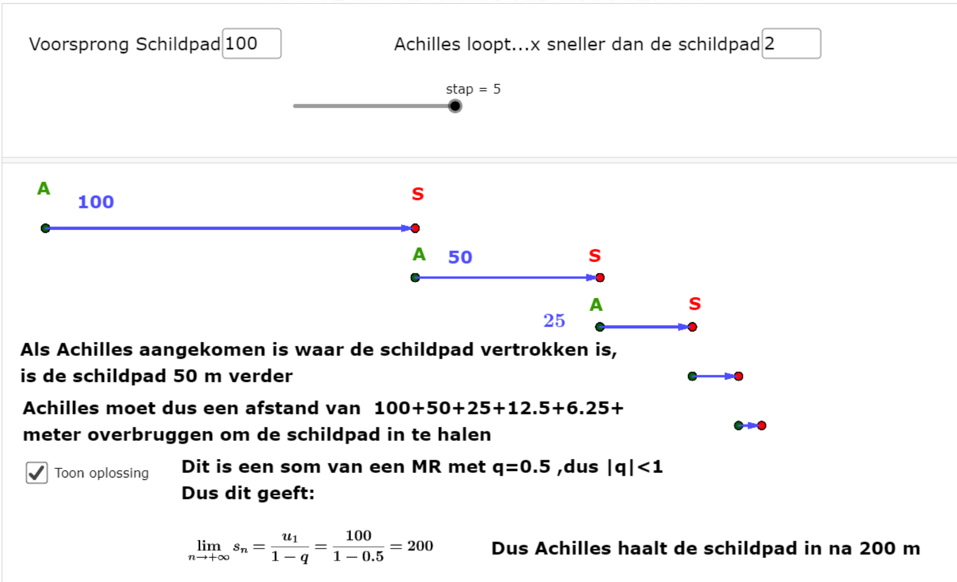


Figure 15: https://www.geogebra.org/m/bsergwde

5.4 paradox van Zeno





[https://www.geogebra.org/m/parg6hhn]https://www.geogebra.org/m/parg6hhn

5.5 oefeningen

1. Schrijf de volgende sommen voluit

   (a) $\sum_{l=3}^{4} l^2$

   (b) $\sum_{k=1}^{3} x_k^k$

2. Schrijf volgende sommen m.b.v. het sommatieteken

   (a) $\frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}$

   (b) $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

   (c) $\sin x + \cos 2x + \sin 3x + \cos 4x + \sin 5x + \cos 6x$

3. Schrijf de volgende oneindige sommen m.b.v. het sommatieteken

   (a) $\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$

   (b) $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$

4. Bereken volgende sommen:

   (a) $\sum_{i=0}^{5} 2i^2$

   (b) $\sum_{k=1}^{3} 2k - 1$

(c) $\sum_{j=2}^{4} \sum_{i=1}^{4} i \cdot j$

5. Bereken $\sum_{r=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{r+1}+\sqrt{r}}$. Toon hiervoor eerst aan dat $\frac{1}{\sqrt{r+1}+\sqrt{r}} = \sqrt{r+1} - \sqrt{r}$

6. De algemene term van een RR wordt gegeven door $t_n = 3n + 7$. Bepaal de som van de eerste 50 termen. (A. 4175)

7. Gegeven is een RR met $u_4 = 7$ en $u_9 = 22$. Vanaf welke term zal de som van deze RR meer dan 10000 bedragen? (A. $n = 83$)

8. Neem de rij $u_n = u_{n-1} - 5$ met $u_1 = 2$
   (a) Bepaal het expliciet voorschrift
   (b) Bereken u_{30}
   (c) Bereken S_{10}
   (d) Bepaal n als $S_n = -427$

9. In een spel wordt 800 euro prijzengeld verdeeld over 5 prijzen. De hoofdprijs (eerste prijs) bedraagt 260 euro en het verschil tussen opeenvolgende prijzen is steeds hetzelfde. Hoeveel euro bedraagt de vierde prijs? (A. 110 euro)

10. lineaire versus exponentiële groei:
    (a) Bepaal het voorschrift van een rij die je loon bij slagerij Appeltans in functie van de tijd voorstelt.
    (b) Bepaal het voorschrift van een rij die je loon bij LV Appeltans Boomteelt in functie van de tijd voorstelt.
    (c) Bepaal de totale hoeveelheid vakantiegeld die je gaat ontvangen bij beide firma's als je er zes jaar zou blijven werken.

11. Gegeven is een MR met $t_3 = 144$ en $t_6 = 486$. Vanaf welke term zal de som van deze MR meer dan 8.10^{18} bedragen? (A. $n = 96$)

12. In een RR geldt dat $t_1 = 7$ en $t_2 = 11$. Toon aan dat de som van de eerste 35 termen gelijk is aan de som van de volgende 15 termen.

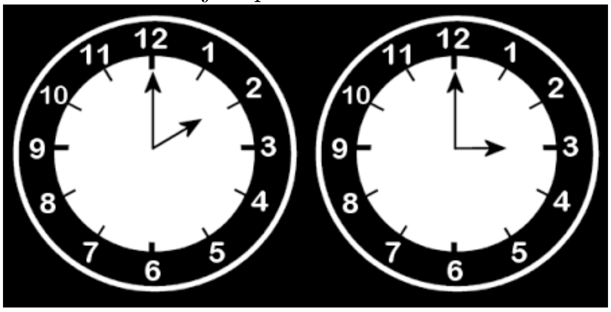
13. Een grote theaterzaal heeft 18 zitplaatsen op de 1ste rij, 31 zitplaatsen op de 2de rij, 44 op de 3de rij. De laatste rij 746 plaatsen
    (a) Bepaal het aantal rijen van deze immens grote theaterzaal
    (b) Bepaal het totaal aantal zitplaatsen

14. Bekijk onderstaande figuren, gebouwd met vierkante tegels

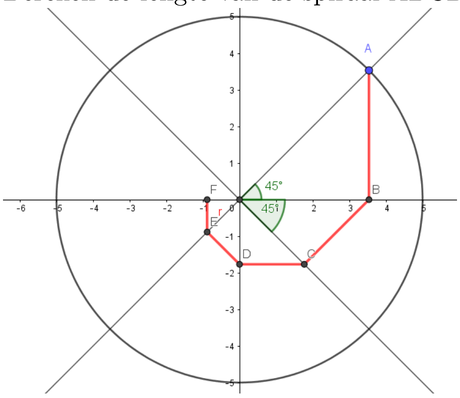
    (a) Hoeveel tegels zijn er nodig voor de 4de en 5de figuur?
    (b) Hoeveel tegels zijn er nodig voor de n-de figuur?
    (c) Is er een figuur die met exact 593 tegels gemaakt kan worden? Verklaar jullie antwoord.
    (d) Hoeveel tegels zijn er in totaal nodig voor de eerste 57 figuren?

15. paradox van Zeno: Na hoeveel meter zal Achilles de schildpad inhalen bij een voorsprong van 400 meter en als Achilles 8 keer sneller loopt?

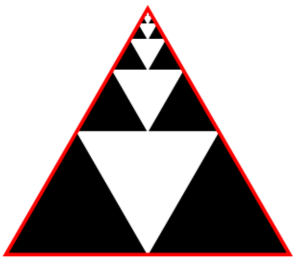
16. Geef het exacte tijdstip tussen twee en drie uur waarop de grote wijzer de kleine wijzer inhaalt



17. Bereken de lengte van de spiraal ABCDEF... als dit patroon zich blijft herhalen:



18. Bereken de totale oppervlakte van alle zwarte driehoeken samen als de grote driehoek oppervlakte 1 heeft. (A. $\frac{2}{3}$)

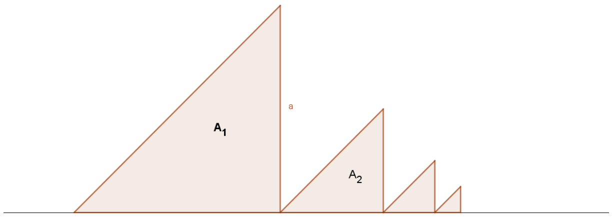


19. Een zijde van een gelijkzijdige driehoek is 12 cm. Als je de middens van de zijden met elkaar verbindt, verkrijg je een ingeschreven gelijkzijdige driehoek. In deze driehoek verbind je weer de middens van de zijden met elkaar. Dit geeft een volgende ingeschreven gelijkzijdige driehoek. En zo doe je maar verder zonder ophouden.

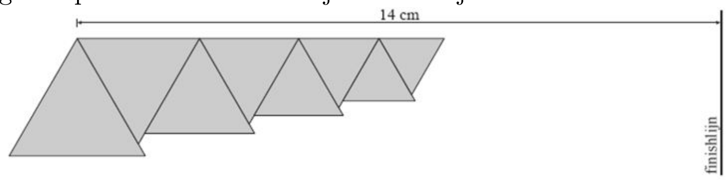
    (a) Bepaal de som van de omtrekken van alle driehoeken (A. 72 cm.)

    (b) Bepaal de som van de oppervlakte van alle driehoeken (A. $48\sqrt{3}cm^2$)

20. Je begint met een driehoek A_1. Deze is rechthoekig en gelijkbenig; de gelijke benen hebben lengte a. Tegen A_1 komt driehoek A_2: deze heeft dezelfde vorm als A_1, maar zijn afmetingen zijn maar de helft. Op dezelfde manier heeft A_3 zijden die maar half zo lang zijn als die van A_2, enz.... Dit wordt doorgetrokken tot in het oneindige. Er ontstaat een soort zaagtandfiguur. Bereken de totale oppervlakte van deze figuur. $\left(A.\frac{2a^2}{3}\right)$



21. We maken een figuur die uit oneindig veel gelijkzijdige driehoeken bestaat. We beginnen met een gelijkzijdige driehoek met zijde 3. Rechtsboven plakken we er een gelijkzijdige driehoek aan met zijde 2,7 cm, dan eentje met zijde2,43 Enz. Na elke keer plakken komt de figuur dichter bij de finishlijn. We plakken oneindig vaak. Onderzoek m.b.v. een berekening of deze figuur op den duur de finishlijn overschrijdt.



22. Een rij vierkanten

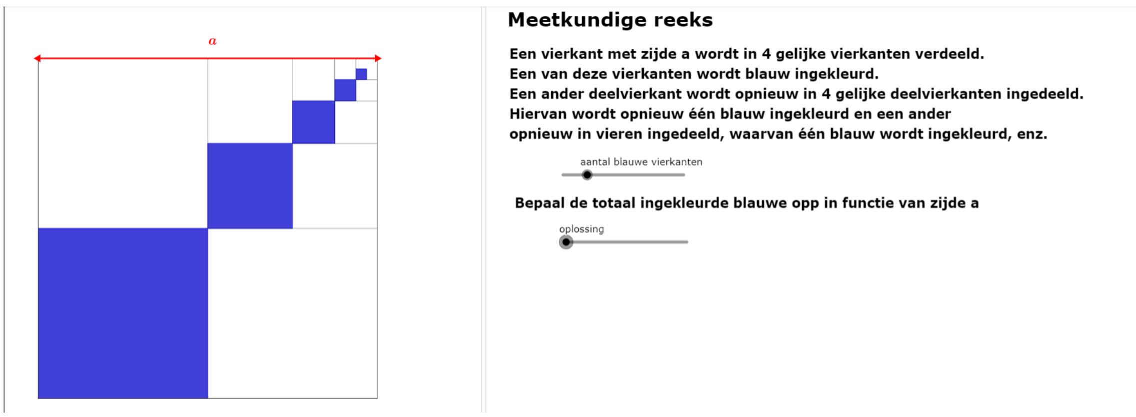


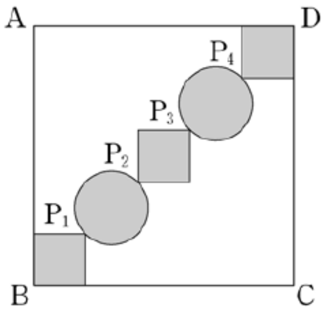
Figure 16: https://www.geogebra.org/m/parg6hhn

23. Als $-\pi < x < \pi$ voor welke waarde(n) van x geldt dan dat $1 + |\cos x| + \cos^2 x + |\cos^3 x| + \ldots = 2$

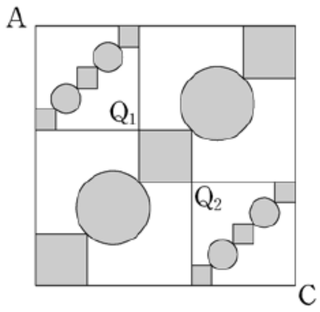
24. Toon aan: als $x > 0$ dan $\frac{1}{x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^3} \cdots$

25. Een oefening uit een examen van Zuid-Korea: Bepaal de totale oppervlakte van alle gekleurde vierkanten en cirkels, als het patroon zoals te zien bij R_2 en R_3 zich steeds blijft herhalen. Het vierkant ABCD heeft een zijde van 5 cm.

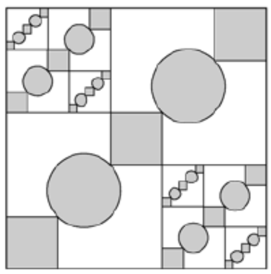
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2



$\cdots$

R_3 $\cdots$

① $\frac{24}{17}(\pi+3)$ ② $\frac{25}{17}(\pi+3)$ ③ $\frac{26}{17}(\pi+3)$

④ $\frac{24}{17}(2\pi+1)$ ⑤ $\frac{25}{17}(2\pi+1)$

26. Schrijf 0,26262626... als een breuk
27. Schrijf 1,1333333... als een breuk
28. Hoeveel oplossingen voor x met $-90° < x < 90°$ heeft volgende oneindige som: $\frac{1}{\tan(x)} + \frac{1}{\tan^2(x)} + \frac{1}{\tan^3(x)} + \cdots$

6 taken

1. RR en MR
2. Limiet van een rij