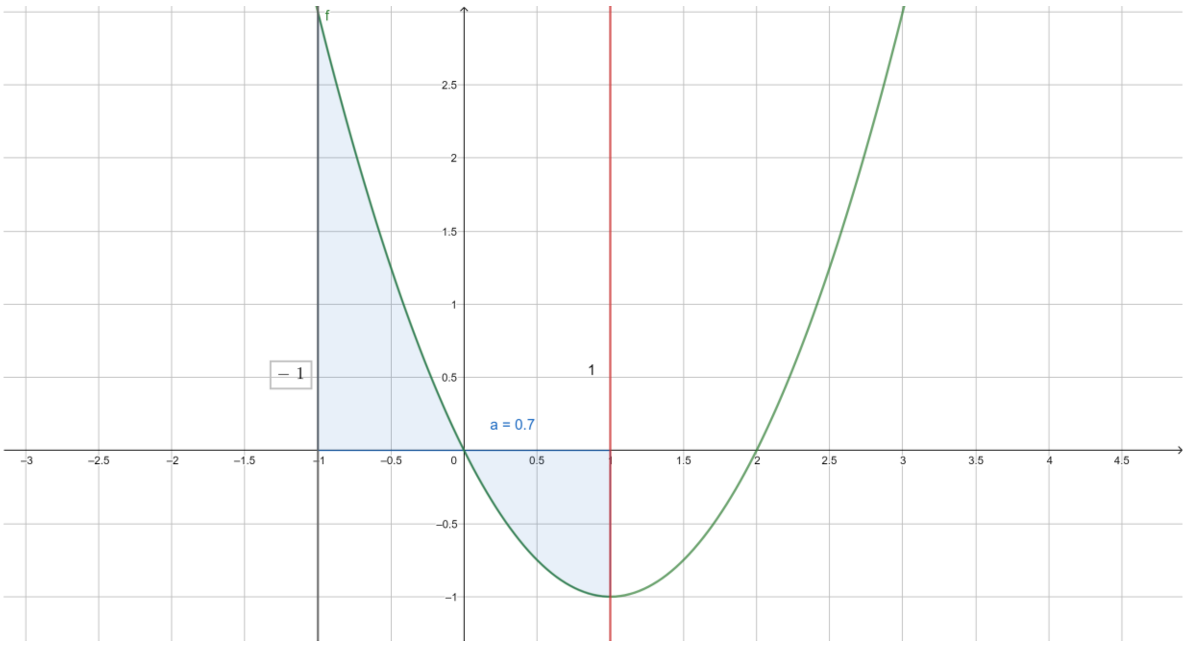
1. Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de cada función

a. $f(x) = x(x-2)$ y las rectas verticales dadas por $x^2 = 1$

Solución: como se delimita por las rectas verticales $x^2 = 1$ entonces $x = 1$ y $x = -1$, ahora bien la gráfica de la función seria



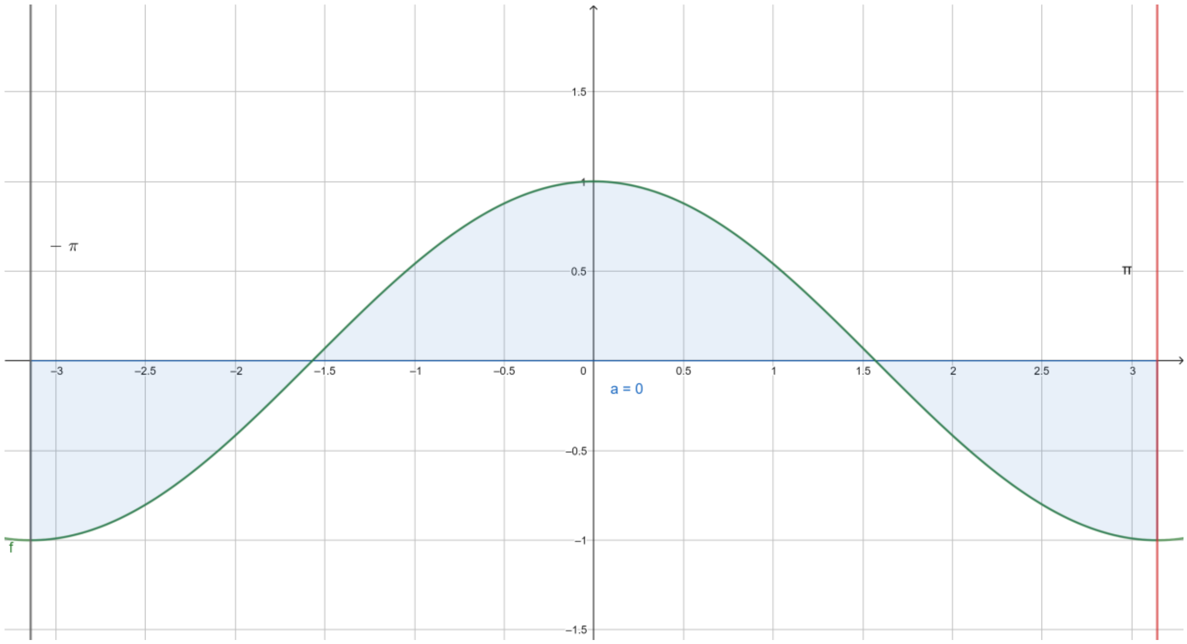
Con lo cual calculamos la integral

$$\int_{-1}^{1} x^2 - 2x\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - 1 - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{2}{3} = 0.6666$$

b. $f(x) = \cos(x)$ y las rectas verticales dadas por $x = \pm\pi$

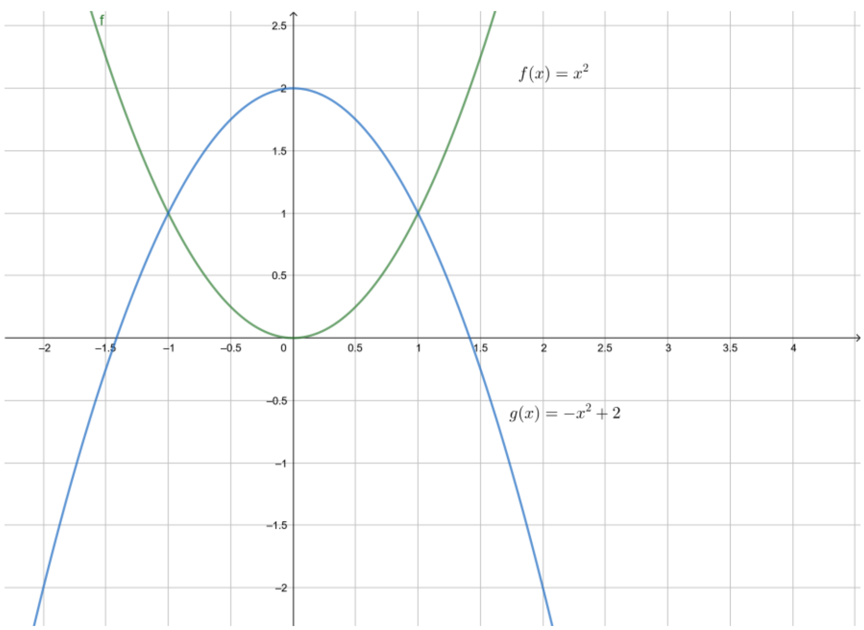
Solución: Nuestro límites son entonces $\pm\pi$ por lo tanto la integral definida es

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\, dx = sen(x)\,|_{-\pi}^{\pi} = sen(\pi) - sen(-\pi) = 0 - 0 = 0$$



c. $f(x) = x^2$ y la función dada por $g(x) = -x^2 + 2$.

Miremos la grafica



Miremos primero la intersección de $g(x)$ con el eje x, para esto igualamos a cero

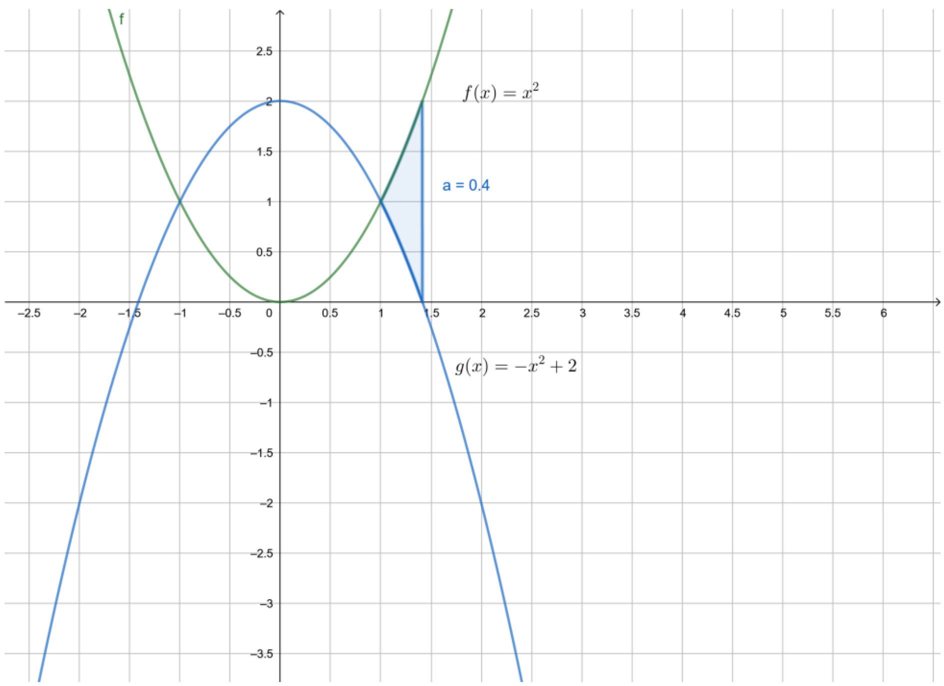
$$g(x) = 0$$

$$-x^2 + 2 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

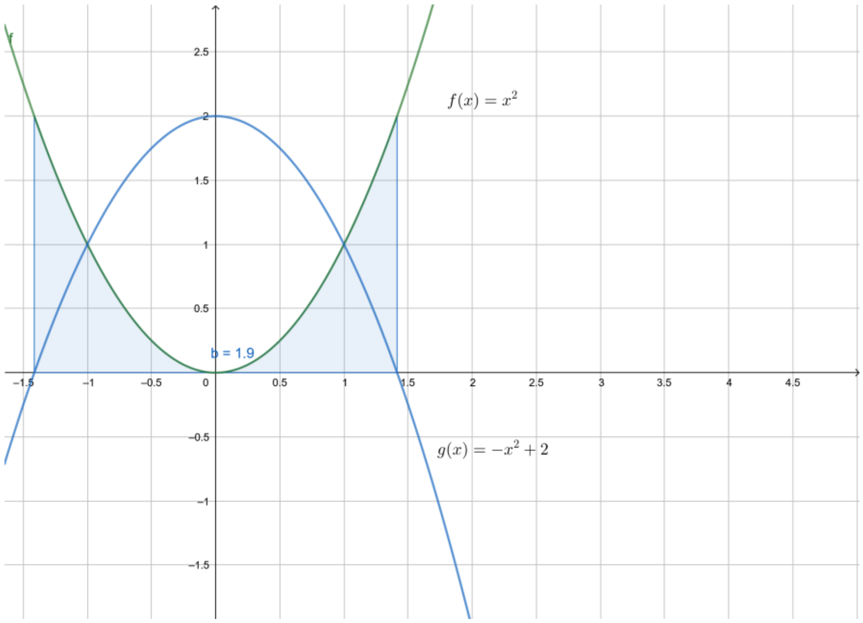
Ahora bien los puntos de corte con la función $f(x)$ es -1 y 1, nótese que buscamos el área que me genera la función $f(x)$ delimitada por $g(x)$, en este caso no una diferencia entre funciones, por lo tanto teniendo en cuenta los puntos de corte de la función $g(x)$ con el eje x, calculamos las siguientes dos integrales

$$\int_1^{\sqrt{2}} f(x) - g(x)dx = \int_1^{\sqrt{2}} 2x^2 - 2 = \left(\frac{2x^3}{3} - 2x\right)_1^{\sqrt{2}} \approx 0.39 \approx 0.4$$



Y la integral de f(x)

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(x)dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^2 = \left(\frac{x^3}{3}\right)_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \approx 1.88 \approx 1.9$$



Luego hacemos la resta de las dos áreas con el fin de encontrar el área bajo la función $f(x)$ delimitada por $g(x)$

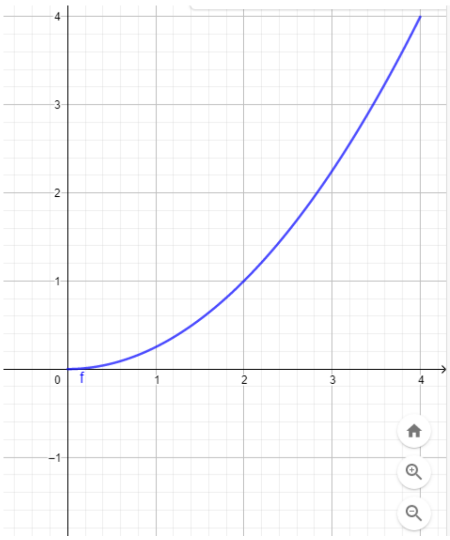
$$1.9 - 0.4 = 1.5$$

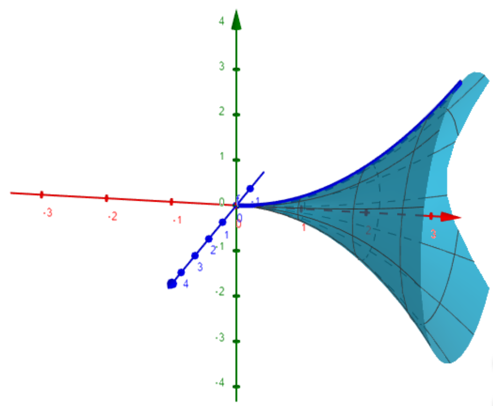
2. Calcular el volumen del sólido que se genera al girar cada función sobre el eje y las rectas dadas.

a. $y = \frac{x^2}{4}$ con las rectas dadas por: x = 0 y x = 4. Sobre el eje x

Usando el método de discos tenemos que hallar la siguiente integral

$$V = \int_0^4 \pi y^2 dx = \int_0^4 \pi \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 dx = \int_0^4 \frac{\pi x^4}{16} \approx \frac{\pi}{16}\left(\frac{x^5}{5}\right)_0^4 \approx 40.212$$

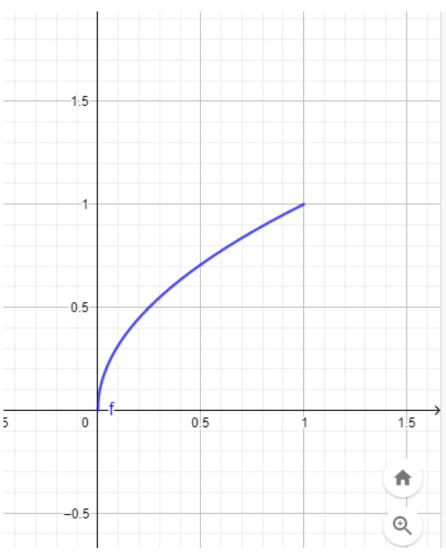


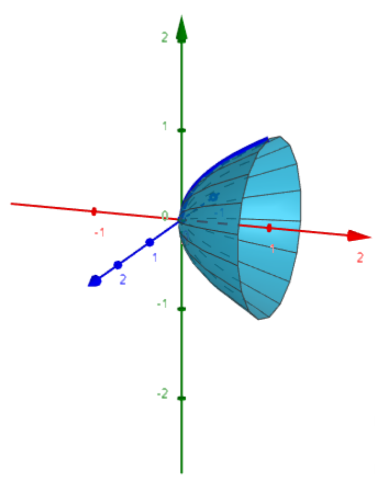


b. $y = \sqrt{x}$ con las rectas dadas por: x = 0 y x = 1. Sobre el eje x

Usando el método de discos tenemos que hallar la siguiente integral

$$V = \int_0^1 \pi y^2 dx = \int_0^1 \pi x dx = \left(\frac{\pi x^2}{2}\right)_0^1 = \frac{\pi}{2}$$





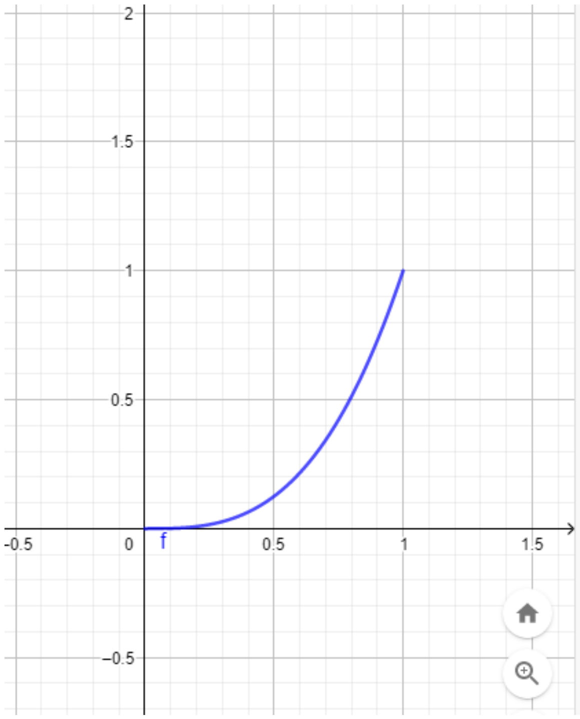
c. $y = x^3$ con x=0 y y=8. Sobre el eje y.

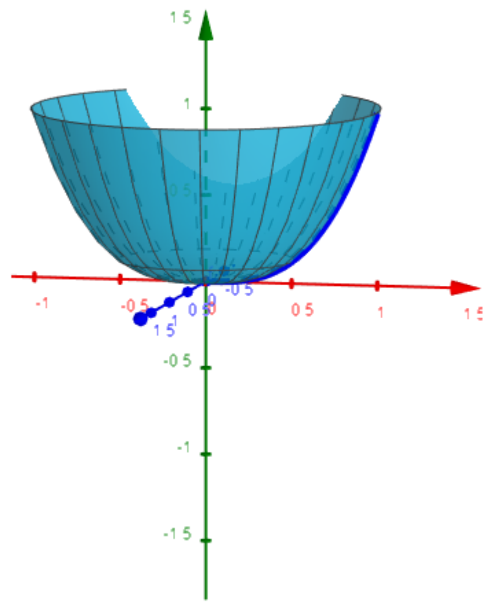
Solución: despejemos x primero

$$x = \sqrt[3]{y}$$

Como el sólido gira alrededor de y, la integral a calcular es

$$V = \int_0^8 \pi x^2 dx = \int_0^8 \pi\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy = \int_0^8 \pi y^{2/3} dy = \left(\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}}\right)_0^8 = \frac{96\pi}{5} \approx 60.319$$





3. En el siguiente problema, utilizar el concepto de integral definida para calcular el trabajo pedido.

a. Un cuerpo es impulsado por fuerza $f(x) = 3x^2 + 4x$, donde las fuerza está dada en Newton y las distancias en metros. Calcular el trabajo necesario para trasladar el objeto una distancia de 10m.

Solución: La fórmula del trabajo viene dada por

$$W = \int_a^b f(x)dx$$

Donde a y b son las posiciones iniciales y finales respectivamente, como queremos desplazar el objeto 10 metros tenemos entonces que a = 0 y b = 10, así se tiene

$$W = \int_0^{10} f(x)dx = \int_0^{10} 3x^2 + 4x = \left(\frac{3x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right)_0^{10}$$

$$(10)^3 + 2(10^2) = 1200$$