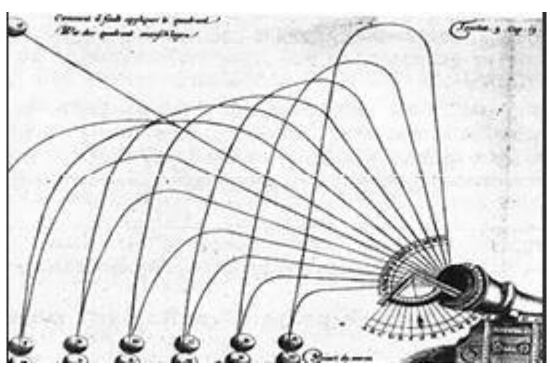
Lanzamiento de Proyectiles

Breve historia

El hombre conocía las trayectorias de los proyectiles desde el principio de los tiempos, pues sus primeras necesidades era la alimentación y necesitaba cazar, actividad que hacia lanzando objetos a los animales.

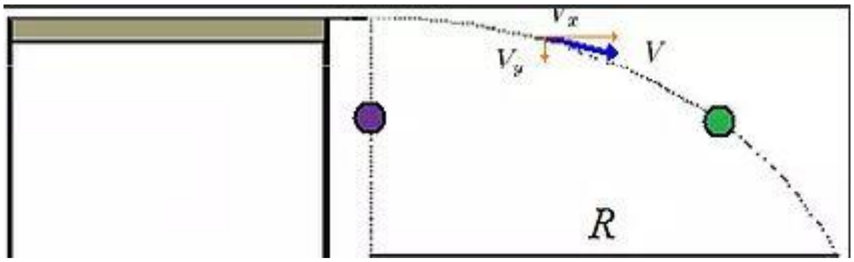
El movimiento fue estudiado desde la antigüedad, por lo que se le encuentra en los libros más antiguos de balística con el objetivo de aumentar la precisión en el tiro de un proyectil.



Sobre el movimiento de los proyectiles en la superficie terrestre, Aristóteles (384 a.c. en Estagira, Macedonia – 322 a.c. en Calcis Eubea, Grecia) sostenía que “una piedra permanece en reposo o se mueve en línea recta hacia el centro de la tierra a menos que se vea sometida a una fuerza exterior”.

Pero fue sólo hasta cuando Galileo Galilei (15 de Febrero 1564 in Pisa - 8 de Enero de 1642 in Arcetri, cerca a Florencia) Florencia) explicó explicó las leyes que rigen los movimientos, que se fundaron las bases de su conocimiento.
El movimiento parabólico observado en la Figura lo analizó Galileo como una superposición de dos

componentes: Una era la tendencia natural de los cuerpos a mantener su velocidad (Ley de inercia) y por lo tanto el cuerpo mantenía su desplazamiento horizontal después de abandonar el borde de la mesa y la otra componente era la caída libre.desplazamiento horizontal después de abandonar el borde de la mesa y la otra componente era la caída libre.



Ambos movimientos se superponen simultáneamente y dan origen al movimiento parabólico (la curva que describe la primera pelota es una parábola). Convirtiéndose así Galileo en el primer hombre en describir la trayectoria de un cuerpo en caída libre en dos dimensiones.

Galileo fue el primero que dio una descripción moderna y cualitativa del movimiento de proyectiles dando las bases para su conocimiento y demostró que la trayectoria de cualquier proyectil es una parábola.

A partir de estos análisis se establece lo que hoy se denomina " Principio de Superposición“ o “Principio de independencia de movimientos”; es decir, un movimiento se puede considerar formado por otros dos (o más) que actúan simultáneamente pero que para efectos de estudio, puede suponerse que primero ocurre uno, y luego (aunque durante el mismo tiempo), el otro.

Por esta razón, la parábola que describe un objeto lanzado al aire se puede estudiar como la combinación de **un movimiento uniforme rectilíneo horizontal** a la altura de la salida y otro **vertical uniformemente acelerado**.

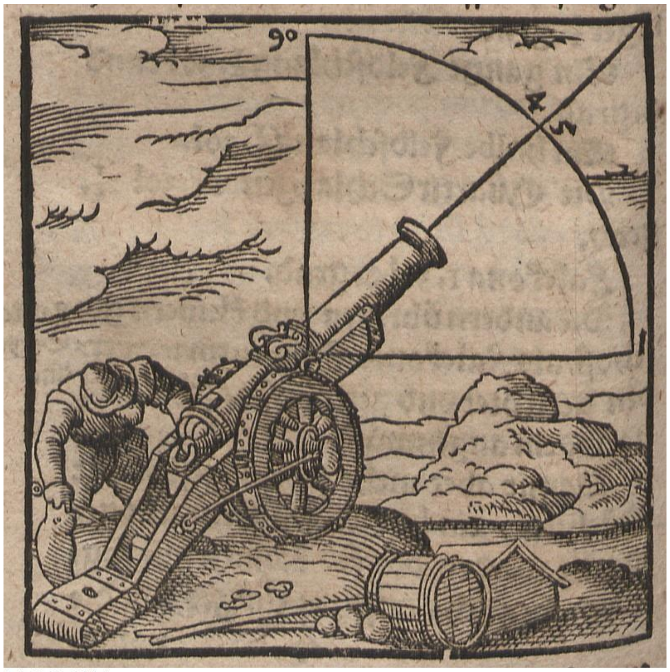
Que es un proyectil

Un **proyectil** es cualquier objeto lanzado en el espacio por la acción de una fuerza. Aunque un balón arrojado es también un proyectil técnicamente, el término se refiere generalmente a un arma. Para los detalles matemáticos referentes a la trayectoria de un proyectil, véase ecuaciones de movimiento.

Balones de fútbol o pelotas de tenis podrían considerarse proyectiles, pero el término suele estar referido a armas. Flechas, dardos o lanzas son armas lanzadas usando la fuerza mecánica aplicada por otro objeto. Otras armas utilizan la fuerza del aire comprimido para disparar. Pistolas, fusiles y demás utilizan la fuerza expansiva de los gases liberados por ciertas reacciones químicas. Por lo general los proyectiles son de metal y ese recubrimiento les permite penetrar con facilidad en su objetivo.

Hay proyectiles pensados para no ser letales, que suelen ser de materiales no muy densos, como (goma, plástico, etc.).

La balística analiza la trayectoria del proyectil, las fuerzas que actúan sobre el proyectil y el impacto que tiene el proyectil en el objetivo.



Quelle: Deutsche Fotothek

Tipos de proyectiles

Flechas, dardos, lanzas y otras armas similares son impulsadas solamente por fuerzas mecánicas aplicadas por otro objeto, por ejemplo: **una catapulta, una resortera, una honda**, un arco además del lanzamiento sin uso de una herramienta.

Otras armas usan la compresión o expansión de gases para propulsar un proyectil.

Los cañones de riel utilizan campos electromagnéticos para proporcionar una aceleración constante a lo largo del dispositivo. Incrementando enormemente la velocidad del proyectil.

Cerbatanas y armas de aire usan gas comprimido, mientras que el resto de las armas de fuego utilizan los gases en expansión generados por reacciones químicas

Algunos proyectiles se propulsan a sí mismos durante el vuelo mediante el uso de un motor cohete o un *jet*. En terminología militar**, un cohete es no-guiado mientras que un misil es guiado**. Nótese los dos sentidos de «cohete» (cohete arma y motor cohete): **un ICBM es un misil que usa motores cohete**.

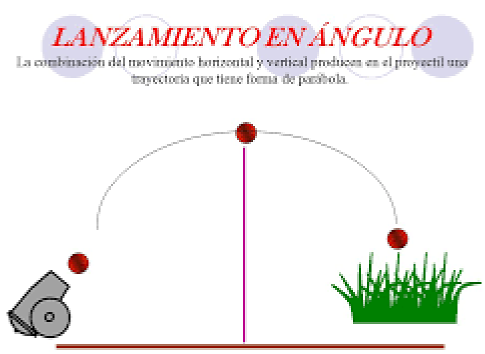
Trayectoria de un proyectil

La **trayectoria balística** es la trayectoria de vuelo que sigue un proyectil sometido únicamente a su propia inercia y a las fuerzas inherentes al medio en el que se desplaza, principalmente la fuerza gravitatoria.

La ciencia que estudia los fenómenos balísticos en general se denomina balística. La **balistica exterior** estudia la trayectoria balística bajo diversas condiciones.

Cuando sobre el proyectil tan solo actúa la gravedad, la trayectoria balística es una parábola. Sin embargo, la presencia de otras fuerzas, tales como la resistencia aerodinámica (atmósfera), la fuerza de sustentación, la fuerza de Coriolis (efecto de la rotación terrestre), etc. hace que la trayectoria real sea algo diferente de una parábola.

Algunos proyectiles autopropulsados se denominan balísticos haciendo hincapié que no existe propulsión nada más que en la fase inicial de lanzamiento ('fase caliente'). Un ejemplo de ello son los misiles balísticos que en su fase de caída carecen de autopropulsión.



Análisis Físico del Movimiento de proyectiles

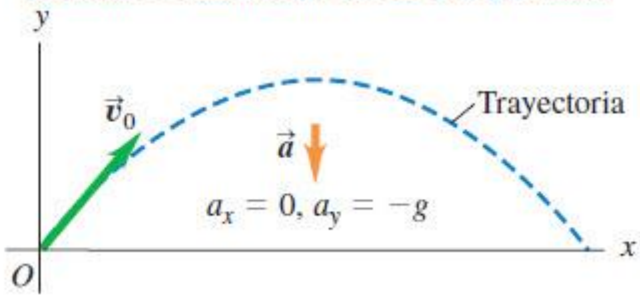
Un **proyectil** es cualquier cuerpo que recibe una velocidad inicial y luego sigue una trayectoria determinada totalmente por los efectos de la aceleración gravitacional y la resistencia del aire. Una pelota bateada, un balón lanzado, un paquete soltado desde un avión y una bala disparada de un rifle son todos proyectiles, un cohete también se considera cuando no es autopropulsado o cuando siendo autopropulsado se le acaba el combustible. El camino que sigue un proyectil es su **trayectoria**.

Para analizar este tipo de movimiento tan común, partiremos de un modelo idealizado que representa el proyectil como una partícula con aceleración (debida a la gravedad) constante tanto en magnitud como en dirección. Despreciaremos los efectos de la resistencia del aire, así como la curvatura y rotación terrestres. Como todos los modelos, este tiene limitaciones. La curvatura de la Tierra debe considerarse en el vuelo de misiles de largo alcance; en tanto que la resistencia del aire es de importancia vital para un paracaidista. No obstante, podemos aprender mucho analizando este modelo sencillo. En este documento, la frase “movimiento de proyectil” implicara que se desprecia la resistencia del aire.

El movimiento de un proyectil siempre está limitado a un plano vertical determinado por la dirección de la velocidad inicial. La razón es que la aceleración debida a la gravedad es exclusivamente vertical; la gravedad no puede mover un proyectil lateralmente. Por lo tanto, este movimiento es *bidimensional*. Llamaremos al plano de movimiento, el plano de coordenadas *xy*, con el eje *x* horizontal y el eje *y* vertical hacia arriba.

La trayectoria de un proyectil.

- Un proyectil se mueve en un plano vertical que contiene el vector de velocidad inicial $\vec{v}_0$.
- Su trayectoria depende sólo de $\vec{v}_0$ y de la aceleración hacia abajo debida a la gravedad.



La clave del análisis del movimiento de proyectiles es que podemos tratar por separado las coordenadas *x* y *y*. La componente *x* de la aceleración es cero, y la componente *y* es constante e igual a -*g*. (Por definición, *g* siempre es positiva, pero por las direcciones de coordenadas elegidas, *ay* es negativa.) Así, *podemos analizar el movimiento de un proyectil como una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante.*

Podemos expresar todas las relaciones vectoriales de posición, velocidad y aceleración del proyectil, con ecuaciones independientes para las componentes horizontales y verticales.
La componentes de ā son

. Las componentes de $\vec{a}$ son

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g \quad \text{(movimiento de proyectil, sin resistencia del aire)} \qquad (3.14)$$

Dado que las aceleraciones *x* y *y* son constantes, podemos usar las ecuaciones del movimiento directamente

Por ejemplo, suponga que en $t = 0$ la partícula está en el punto (x_0, y_0) y que en este tiempo sus componentes de velocidad tienen los valores iniciales v_{0x} y v_{0y}. Las componentes de la aceleración son $a_x = 0$, $a_y = -g$. Considerando primero el movimiento x, sustituimos 0 por a_x en las ecuaciones (2.8) y (2.12). Obtenemos

$$v_x = v_{0x} \tag{3.15}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t \tag{3.16}$$

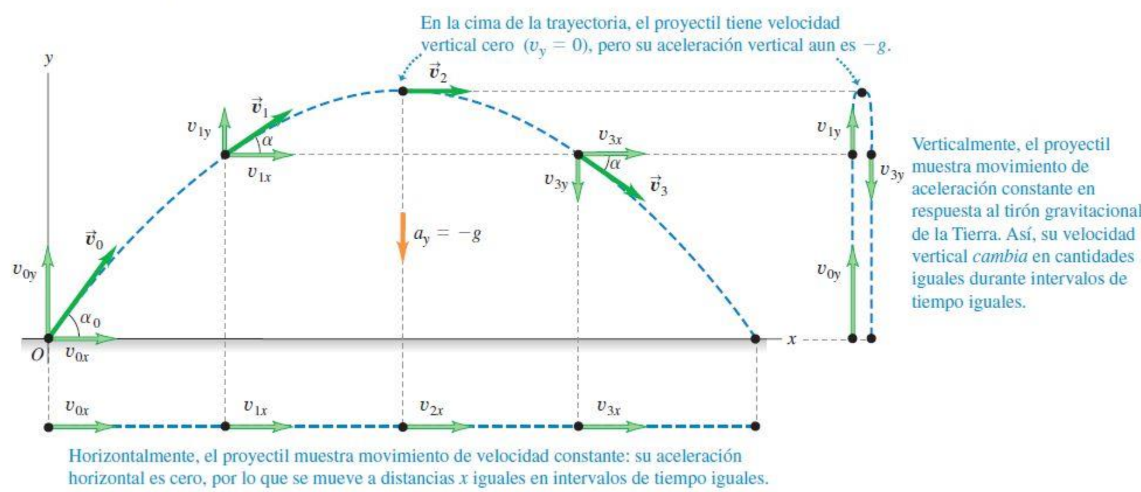
Para el movimiento y, sustituimos y por x, v_y por v_x, v_{0y} por v_{0x} y $a_y = -g$ por a_x:

$$v_y = v_{0y} - gt \tag{3.17}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.18}$$

Por lo general lo más sencillo es tomar la posición inicial en t = 0 como origen;
Así $x_0 = y_0 = 0$
Este punto puede ser la posición del proyectil cuando sale de la fuente de movimiento, como cuando un cohete sale de la rampa de lanzamiento.

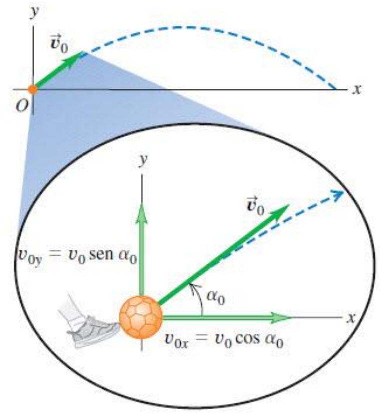
3.17 Si se desprecia la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil es una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante.



También podemos representar la velocidad inicial $\vec{v}_0$ con su magnitud v_0 (la rapidez inicial) y su ángulo α_0 con el eje $+x$ (como se nuestra en la figura 3.18). En términos de estas cantidades, las componentes v_{0x} y v_{0y} de la velocidad inicial son

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 \qquad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 \tag{3.19}$$

Usando estas relaciones en las ecuaciones (3.15) a (3.18) y haciendo $x_0 = y_0 = 0$, tenemos



$$x = (v_0 \cos\alpha_0)t \qquad \text{(movimiento de proyectil)} \tag{3.20}$$

$$y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{(movimiento de proyectil)} \tag{3.21}$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha_0 \qquad \text{(movimiento de proyectil)} \tag{3.22}$$

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 - gt \qquad \text{(movimiento de proyectil)} \tag{3.23}$$

Estas ecuaciones describen la posición y velocidad del proyectil de la figura 3.17 en cualquier instante t.

Podemos obtener mucha información de estas ecuaciones. Por ejemplo, en cualquier instante, la distancia r del proyectil al origen (la magnitud del vector de posición $\vec{r}$) está dada por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.24}$$

La rapidez del proyectil (la magnitud de su velocidad) en cualquier instante es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{3.25}$$

La *dirección* de la velocidad, en términos del ángulo α que forma con el eje $+x$ (véase la figura 3.17), está dada por

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \tag{3.26}$$

El vector de velocidad $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria en todos los puntos.

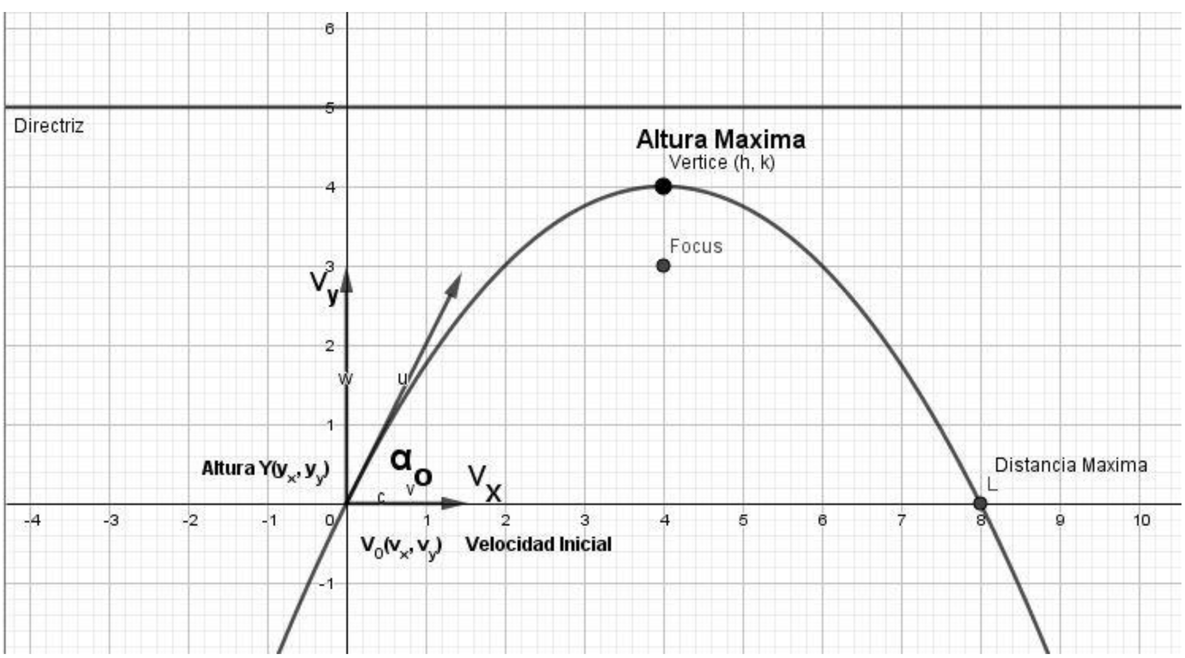
Podemos deducir una ecuación para la forma de la trayectoria en términos de x y y eliminando t. De las ecuaciones (3.20) y (3.21), que suponen $x_0 = y_0 = 0$, obtenemos $t = x/(v_0 \cos\alpha_0)$

Suponiendo que se inicia en el origen del eje de coordenadas en el punto (x_0, y_0) y $x_0 = 0$
Esto es para simular el hecho de que se puede variar la altura pero el sitio de lanzamiento es fijo,.
La fórmula de la trayectoria es

$$y = y_0 + (tan\ \alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2\ cos^2\alpha_0}x^2 \qquad (3.27)$$

Requerimiento

A fin de analizar la trayectoria se requiere determinar**: la distancia máxima alcanzada, la altura máxima y el tiempo de vuelo del proyectil** dado: **un Angulo de tiro inicial, una velocidad inicial de lanzamiento y una altura inicial de lanzamiento.**



Análisis Matemático del Movimiento de proyectiles

Dada la formula indicada en 3.27

$$y = y_0 + (tan\ \alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2\ cos^2\alpha_0}x^2$$

Si decimos que

$$v_x = v_0 cos\alpha \quad y \quad v_y = v_0 sen\alpha$$

Queda en esta forma:

$$y = y_0 + (tan\ \alpha_0)x - \frac{g}{2v_x^2}x^2$$

Se puede observar que la formula tiene una forma

$$ax^2 + bx^2 + cy + d$$

Lo cual indica que es una parábola.

Sabiendo que en una parábola de la forma general anterior se convierte en canónica con

$$h = -\frac{b}{2a}$$

$$k = -\frac{b^2}{4a} + c$$

$$p = \frac{1}{4a}$$

Donde:

a = $-\frac{g}{2v_x^2}$

b = $(tan\ \alpha_0)$

d = y_0

Esto indica que la formula cumple con la patrón de una parábola.

Esto nos lleva a determinar:

Vertice V(h, k)

h= $(v_x \ * \ v_y)/g$

k = $\frac{v_y^2}{2g} + y_o$

p = $-\frac{v_x^2}{2g}$

Como el parámetro p en la ecuación es negativa la parábola abre hacia abajo.

El hecho de que la parábola abre hacia abajo indica que el valor de la ordenada del foco k es un máximo y por lo tanto es la altura máxima alcanzada.

El tiempo de vuelo se obtiene cuando la parábola toca el eje x, es decir y= 0, lo cual equivale a encontrar las raíces de la parábola de la trayectoria, para ello usamos la ecuación de la distancia en función del tiempo descrita en 3.18.

Las raíces son:

$$r_{1,2} = \frac{v_y \ \pm \ \sqrt{v_y^2 \ + 2gy_o}}{g}$$

El tiempo de vuelo es la raíz r positiva

Si sustituimos el tiempo de vuelo en la fórmula 3.18 encontramos la distancia máxima recorrida, es decir la distancia hasta alcanzar el eje x

$$Y_{max} = \ y_0 + v_y t_{vuelo} - \frac{1}{2} g t_{vuelo}^2$$

Modelo de lanzamiento del proyectil

El modelo de trayectoria de un proyectil se realizó revisando los recursos de GeoGebra en la red.

También se revisaron los aspectos teóricos del análisis de trayectorias de vuelo en la red.

1 hecho en geogebra con recursos de la página web

2. se emplean las formulas descritas

La fórmula que se emplea para la determinación de la trayectoria es la que se indicó en 3.18

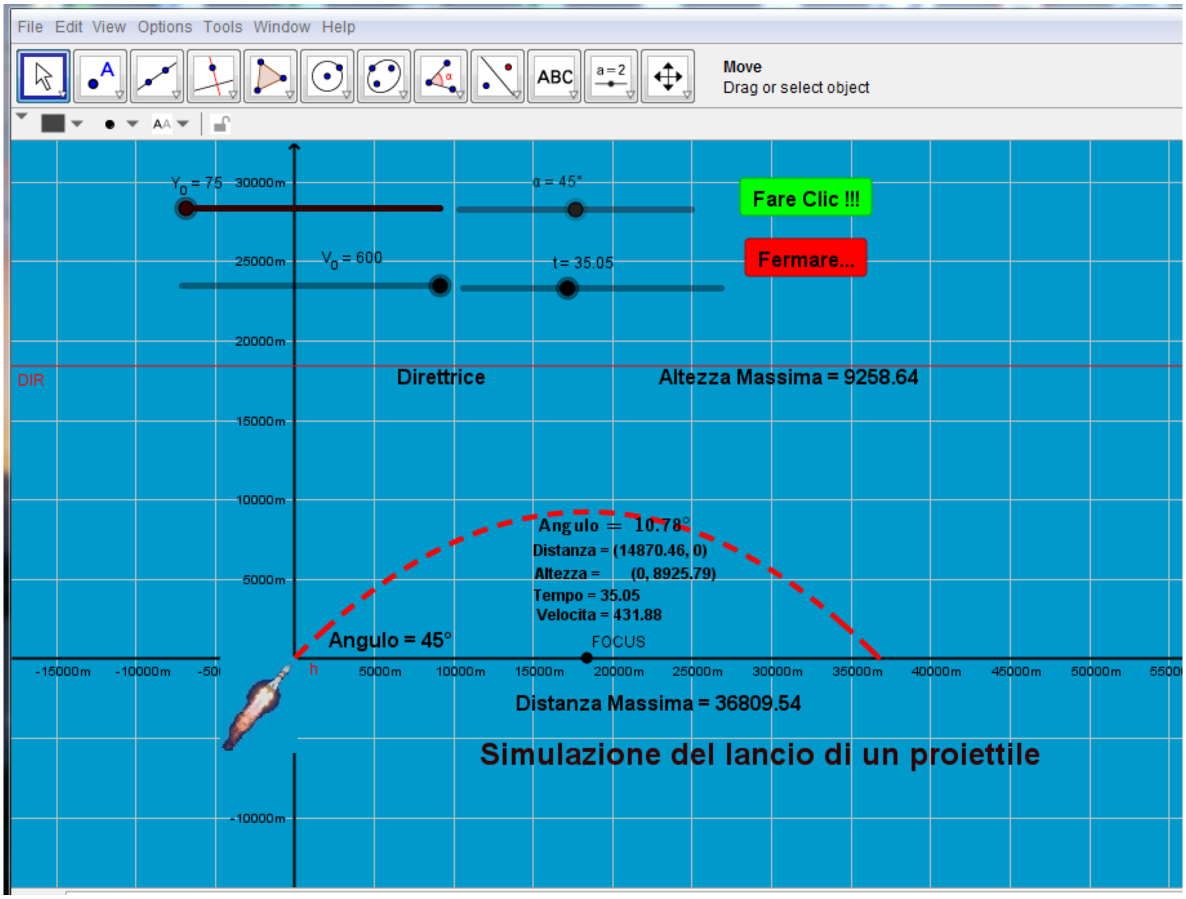
$$y = y_0 + (tan\ \alpha_0)x - \frac{g}{2v_x^2}x^2$$

El tiempo de vuelo máximo se hace con:

$$t_{vuelo} = \frac{v_y + \sqrt{v_y^2 + 2gy_o}}{g}$$

Altura máxima alcanzada Y_{max}:
sustituyendo el tiempo de vuelo entre dos en la fórmula 3.18

$$Y_{max} = y_0 + v_y t_{vuelo} - \frac{1}{2}g t_{vuelo}^2$$



Conclusiones

1. La máxima trayectoria se logra cuando el ángulo de disparo es 45 grados
2. Se muestran todas las variaciones de parámetros ángulo de tiro, velocidad inicial y altura inicial.
3. Los ángulos de salida y llegada son iguales (siempre que la altura de salida y de llegada sean iguales).
4. Para lograr la mayor distancia fijado el ángulo el factor más importante es la velocidad inicial.
5. Se puede analizar el movimiento en vertical independientemente del horizontal.
6. El tiempo que tarda en alcanzar su altura máxima es el mismo tiempo que tarda en recorrer la mitad de su distancia horizontal, es decir, el tiempo total necesario para alcanzar la distancia horizontal máxima es el doble del tiempo empleado en alcanzar su altura máxima. (Tmax = Tvuelo/2)
7.

Bibliografia

1. Matematica 5to ano Hoffman
2. Fisica Universitaria Sears Zemansky
3. Recursos Wikipedia

Anexos

Formulas del vértice de la parábola

Dado $$y = y_0 + \tan(\alpha)\,\mathrm{x} - \frac{g}{2v_0^2}x \qquad (1)$$

Donde $v_x = v_0 \cos\alpha \quad v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha \quad \tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$

Si los vértices de una parábola son:

$$h = -\frac{b}{2a} \;\; y \;\; k = -\frac{b^2}{4a} + c \qquad (2)$$

De la formula (1) se obtiene:

$$a = -\frac{g}{2v_x^2} \quad b = \tan\alpha \quad c = y_0$$

Sustituyendo a, b y c en las formulas h y k de (2) se obtiene:

$$\boldsymbol{h = \frac{v_x * v_y}{g} \quad y \quad k = \frac{v_y^2}{2g}}$$

Convertir de la forma general a la forma canóniga

Forma cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ (1)

Forma general $ax^2 + bx + cy + d = 0$ (2)

Forma canóniga $4p(y-k) = (x-h)^2$ (3)

Desarrollando e igualando (2) y (3) se obtiene:

$$\frac{x^2}{4p} - \frac{h}{2p}x + h - y + k$$

De aquí:

$\mathrm{a} = \frac{1}{4\mathrm{p}}$ (4) despejando p, $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4a}}$ (5)

$b = -\frac{h}{2p}$ $\quad$ *sustituyendo p en* (5) $\quad$ $\boldsymbol{h} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}$ (6)

Plugging in $x = -\dfrac{b}{2a}, y = k$

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ \Rightarrow k &= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\ \Rightarrow k &= a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c \\ \Rightarrow k &= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\ \Rightarrow k &= -\frac{b^2}{4a} + c \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{k} = -\frac{\boldsymbol{b}^2}{\boldsymbol{4a}} + \boldsymbol{c}$$

Calculo de las raíces de la fórmula de la altura

Dada la formula

$$y = y_0 + v_y \mathrm{t} - \frac{1}{2} g t^2$$

Se aplica la resolvente para el cálculo de raíces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tomando

$$a = -\frac{1}{2} g \qquad b = v_y \qquad c = y_0$$

$$\boldsymbol{x_{1,2}} = \frac{-\boldsymbol{v_y} \pm \sqrt{\boldsymbol{v_y^2} - \boldsymbol{4}(-\frac{1}{2} g)\boldsymbol{y_0}}}{\boldsymbol{2}(-\frac{1}{2} g)}$$

Se obtiene

$$\boldsymbol{x_{1,2}} = \frac{\boldsymbol{v_y} \mp \sqrt{\boldsymbol{v_y^2} + \boldsymbol{2 g y_0}}}{\boldsymbol{g}}$$

Transformación de la fórmula de la distancia a una formula dependiendo de x

Dados:

$y = y_0 + v_y \mathrm{t} - \frac{1}{2} g t^2 \;\; (1) \;\; y \quad x = \; v_x t \; (2)$

$v_x = \; v_0 \cos\alpha \qquad v_y = \; v_0 \operatorname{sen}\alpha$

Se quiere transformar la función en una que dependa de x, para ello se despeja t en (2) y se sustituye en (1)

$$t = \frac{x}{v_x}$$

Quedando

$$y = y_0 + \frac{v_y}{v_x}\mathrm{x} - \frac{1}{2} g (\frac{x}{v_x})^2$$

$$y = y_0 + \frac{v_y}{v_x}\mathrm{x} - \frac{g}{2 v_x^2} x^2$$

Sustituyendo $\frac{v_y}{v_x}$ por tan(α)

Queda

$$\boldsymbol{y = y_0 + \tan(\alpha)\, x - \frac{g}{2 v_0^2} x^2}$$