Escuela de Ciencias de la Educación, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad ICESI	Hoja de trabajo No. 3	Temas: EDO LINEALES
Metodología: Actividad matemática. Explorar, formular preguntas, conjeturar y validar.	Recursos: Lápiz, papel, GeoGebra, Recursos Educativos Abiertos (REA).	Fecha: Semana 8. ____________ Ana María Velásquez G

ENFOQUE DE COMPETENCIAS
¿Cómo pongo en juego los conocimientos que he adquirido?
¿Qué problemas puedo resolver con esos conocimientos?

INSTRUCCIONES.
Atienda la presentación preliminar del profesor, que le dará pautas para desarrollar el plan de trabajo.

MOTIVACIÓN.

La mayoría de los problemas que se resuelven con *Matemáticas aplicadas* se aproximan inicialmente con un modelo lineal del tipo $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$**,** para el cual se cuenta con resultados teóricos estructurados, que facilitan la comprensión del problema y los primeros acercamientos a las posibles soluciones. Este tipo de modelo tiene la ventaja adicional, muy relevante hoy en día, de facilitar implementaciones computacionales altamente eficientes. Ya en la práctica, atendiendo a los comportamientos reales de los fenómenos estudiados, el modelo se corrige introduciendo los posibles *factores de error*, que también son estudiados desde diferentes perspectivas teóricas, y admiten experimentaciones numéricas que, en la actualidad, arrojan grados de precisión sumamente confiables.

EDO lineales.

1. En el contexto $y = y(x), x \in I$, una EDO lineal de orden n tiene la estructura:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

(Si $g(x) = 0$ se dice que la ecuación es **homogénea**).

a. Describa con sus palabras las características de las ecuaciones lineales.
R/ Son aquellas en las que la variable dependiente y sus derivadas son lineales (es decir no está elevada a otras potencias distintas a 1), además sus soluciones deben ser LI y pueden obtenerse otras soluciones mediante combinaciones lineales de dichas soluciones LI.

b. Revise las EDO de primer orden con las que usted haya trabajado hasta el momento (por lo menos 5 casos concretos) y clasifíquelas como lineales y no lineales.

R/

- y' = -2xy   Lineal
- y' = $\sqrt{x - y}$ No lineal
- y' = $\frac{2y}{1+y^2}$ No lineal
- xy' = 2y   Lineal
- y'=$\sqrt[3]{y}$ No lineal

c. Escriba tres ejemplos de EDO lineales (orden 2, 3 y 4, respectivamente) y tres ejemplos de EDO no lineales explicando, en los últimos casos, dónde falla la linealidad.

Lineal

- $x^2y'' + 2xy' + 3y = \cos x$
- $3xy''' + x^3y'' + e^x y' = 0$
- $\sqrt{5x}\frac{d^4y}{dx^4} + 6x\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + lnx\frac{dy}{dx} = 6x^2$

No lineales

- $x^2(y'')^2 + 2xy' + 3y = \cos(xy^2)$ Falla la linealidad ya que la variable dependiente y una de sus derivadas no son lineales (están elevadas al cuadrado)
- $3xy''' + x^3y'' + e^x y' + y^3 = 0$ Falla la linealidad debido a que la variable dependiente está elevada al cubo.
- $\sqrt{5x}\frac{d^4y}{dx^4} + 6xy^2\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + \ln y\frac{dy}{dx} = 6x^2$ Falla la linealidad debido a que la variable independiente está elevada al cubo y está afectada por un logaritmo natural.

2. Con toda EDO lineal de orden n, de coeficientes reales, se puede asociar un polinomio de grado n:

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + \cdots + a_1 r + a_0$$

que, de acuerdo con el *Teorema Fundamental del Álgebra*, podrá factorizarse en la forma:

$$P(r) = a_n(r - r_1)(r - r_2)(r - r_3) \ldots (r - r_n)$$

donde, en general, $r_j = a + b\boldsymbol{i}$ es una raíz compleja.

a. Construya 4 ejemplos de polinomios (de grado 1, 2, 3 y 4, respectivamente), en la forma factorizada, con raíces reales solamente ($b = 0$).
   i. Asocie, con cada ejemplo, la respectiva EDO lineal homogénea.
   ii. Verifique, en cada ejemplo, que para cada raíz r_j la función $y(x) = e^{r_j x}$ satisface la ecuación respectiva

b. Construya dos ejemplos de polinomios (de grado 2 y 3, respectivamente), en la forma factorizada, combinando raíces reales y raíces con parte imaginaria distinta de cero. Repita los procesos i y ii del ítem anterior.

c. Explique, en sus palabras, por qué es intuitivamente razonable suponer que las funciones exponenciales son soluciones de EDO lineales homogéneas.

3. Con toda EDO lineal de orden n, de coeficientes reales, se puede asociar un *operador* de *dimensión* n:

$$L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + a_{n-2} D^{n-2} + \cdots + a_1 D + a_0$$

donde D es el operador diferencial $\frac{d}{dx}$. Por ejemplo, la EDO $2y'' - y' + 3y = x + 5$ se escribe en *lenguaje de operadores* como $L(y) = x + 5$, con

$$L = 2D^2 - D + 3$$

a. Reescriba en el lenguaje de operadores los ejemplos de EDO lineales que ha construido en los puntos anteriores de esta hoja de trabajo.
   - $y' = -2xy \rightarrow L(y)=0$ con $L=D+2x$
   - $xy' = 2y \rightarrow L(y)=0$ con $L=x\,D-2$
   - $x^2y''+ 2xy'+3y=\cos x \rightarrow L(y)=\cos x$ con $L=x^2 D^2 + 2xD+3$
   - $3xy'''+ x^3y'' + e^x y'=0 \rightarrow L(y)=0$ con $L=3xD^3 + x^3D^2 + e^xD$
   - $\sqrt{5x}\frac{d^4y}{dx^4} + 6x\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + \ln x\frac{dy}{dx} = 6x^2 \rightarrow L(y)= 6x^2$
     con $L=\sqrt{5x}\, D^4 +6x\, D^3 + D^2 + \ln x\, D$
   - $y''' - 3y'' - 4y' +12y=0 \rightarrow L(y)=0$ con $L=D^3 - 3D^2 - 4D+12$
   - $y^{(4)} - y''' - 47y''+45y'+450y=0 \rightarrow L(y)=0$
     con $L= D^4 - D^3 - 47D^2 + 45D + 450$
   - $y'-4y=0 \rightarrow L(y)=0$ con $L=D - 4$
   - $y''-y'-6y=0 \rightarrow L(y)=0$ con $L=D^2 - D - 6$

b. Muestre que el operador $L = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + a_{n-2}D^{n-2} + \cdots + a_1D + a_0$ satisface las propiedades de linealidad que usted aprendió en el estudio de transformaciones lineales en su curso de álgebra lineal.

c. Muestre que el *Núcleo de* L*:* $N_L = \{y\colon L(y) = 0\}$, conjunto de soluciones de la EDO homogénea asociada a L, es un *Subespacio vectorial* del espacio de funciones n veces derivables.

Resolución y formulación de problemas

1. Utilizando propiedades de las potencias de la unidad imaginaria $\boldsymbol{i}$ y combinando adecuadamente las series de Taylor de las funciones e^x, $\cos(x)$ y $sen(x)$, reconstruya el siguiente resultado:
$$e^{ix} = \cos(x) + isen(x).$$

2. Escriba una prueba del siguiente resultado estudiado en álgebra lineal: *La solución general del Sistema de Ecuaciones Lineales no homogéneo* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, *se puede escribir como* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_h} + \boldsymbol{x_p}$, donde $\boldsymbol{x_h}$ es la solución general del sistema homogéneo asociado y $\boldsymbol{x_p}$ es una solución particular del sistema no homogéneo. ¿Usted considera que existe un resultado análogo para el problema no homogéneo en EDO $L(y) = g(x)$? Explique sus consideraciones e intuiciones.

Hoja de Trabajo 3.

2.

a.a) Grado 1

i) $r - 4 = 0$ ⇒ ecuación característica

$r = 4$

$y' - 4y = 0$ ⇒ EDO lineal homogénea asociada.

ii) solución general:

$$y(x) = C_1 e^{4x}$$

$$y'(x) = 4C_1 e^{4x}$$ ⇒ lo reemplazo en la EDO.

$$y' - 4y = 0$$
$$4C_1 e^{4x} - 4(C_1 e^{4x}) = 0$$
$$0 = 0$$ ✓

a.b) Grado 2

i) $(r-3)(r+2) = 0$

$r_1 = 3 \quad r_2 = -2$

$r^2 + 2r - 3r - 6 = 0$

$r^2 - r - 6 = 0$ ⇒ ecuación característica.

EDO lineal homogénea asociada:

$$y'' - y' - 6y = 0$$

ii) sol. general:

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} \\ y'(x) &= 3C_1 e^{3x} - 2C_2 e^{-2x} \\ y''(x) &= 9C_1 e^{3x} + 4C_2 e^{-2x} \end{aligned}\right\}$$ reemplazo en la EDO.

$$y'' - y' - 6y = 0$$
$$9C_1 e^{3x} + 4C_2 e^{-2x} - 3C_1 e^{3x} + 2C_2 e^{-2x} - 6C_1 e^{3x} - 6C_2 e^{-2x} = 0$$
$$\cancel{9C_1 e^{3x}} + \cancel{4C_2 e^{-2x}} - \cancel{9C_1 e^{3x}} - \cancel{4C_2 e^{-2x}} = 0$$
$$0 = 0$$ ✓

a.c). Grado 3

i) $r^3 - 3r^2 - 4r + 12 = 0$ => Polinomio característico.

$(r-3)(r+2)(r-2) = 0$.

$r = 3 \quad r = -2 \quad r = 2$

EDO lineal homogénea asociada:

$$y''' - 3y'' - 4y' + 12y = 0.$$

ii) Sol. general.

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{2x}.$$
$$y'(x) = 3c_1 e^{3x} - 2c_2 e^{-2x} + 2c_3 e^{2x}.$$
$$y''(x) = 9c_1 e^{3x} + 4c_2 e^{-2x} + 4c_3 e^{2x}.$$
$$y'''(x) = 27c_1 e^{3x} - 8c_2 e^{-2x} + 8c_3 e^{2x}.$$

las reemplazo en la EDO.

$y''' - 3y'' - 4y' + 12y = 0.$

$\cancel{27c_1e^{3x}} - \cancel{8c_2e^{-2x}} + \cancel{8c_3e^{2x}} - \cancel{27c_1e^{3x}} - \cancel{12c_2e^{-2x}} - \cancel{12c_3e^{2x}} - \cancel{12c_1e^{3x}}$
$+ \cancel{8c_2e^{-2x}} - \cancel{8c_3e^{2x}} + \cancel{12c_1e^{3x}} + \cancel{12c_2e^{-2x}} + \cancel{12c_3e^{2x}} = 0$

$0 = 0.$ ✓

a.d) Grado 4.

i) $(r-5)^2(r+3)(r+6) = 0. \qquad r = 5 \quad r = -3 \quad r = -6.$

$(r^2 - 10r + 25)(r^2 + 9r + 18)$
$r^4 + 9r^3 + 18r^2 - 10r^3 - 90r^2 - 180r + 25r^2 + 225r + 450 = 0.$
$r^4 - r^3 + 47r^2 + 45r + 450 = 0.$

EDO lineal homogénea asociada:

$$y^{(4)} - y''' - 47y'' + 45y' + 450y = 0.$$

ii) Sol. general.

$$y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x} + c_3 e^{-3x} + c_4 e^{-6x}.$$
$$y'(x) = 5c_1 e^{5x} + 5c_2 x e^{5x} + c_2 e^{5x} - 3c_3 e^{-3x} - 6c_4 e^{-6x}.$$
$$y''(x) = 25c_1 e^{5x} + 25c_2 x e^{5x} + 10c_2 e^{5x} + 9c_3 e^{-3x} + 36c_4 e^{-6x}.$$
$$y'''(x) = 125c_1 e^{5x} + 125c_2 x e^{5x} + 75c_2 e^{5x} - 27c_3 e^{-3x} - 216c_4 e^{-6x}.$$
$$y^{(4)}(x) = 625c_1 e^{5x} + 625c_2 x e^{5x} + 500c_2 e^{5x} + 81c_3 e^{-3x} + 1296c_4 e^{-6x}.$$

Reemplazo $y(x)$ y su derivada en la edo.

$$y^{(4)} - y''' + 43y'' + 135y' + 270y = 0.$$

$$\begin{array}{lllll}
625\,C_1 e^{5x} & + 625\,C_2 x e^{5x} & + 500\,C_2 e^{5x} & + 81\,C_3 e^{-3x} & + 1296\,C_4 e^{-6x} \\
- 125\,C_1 e^{5x} & - 125\,C_2 x e^{5x} & - 75\,C_2 e^{5x} & + 27\,C_3 e^{-3x} & + 216\,C_4 e^{-6x} \\
- 1175\,C_1 e^{5x} & + 1175\,C_2 x e^{5x} & - 470\,C_2 e^{5x} & - 423\,C_3 e^{-3x} & - 1592\,C_4 e^{-6x} \\
+ 225\,C_1 e^{5x} & + 225\,C_2 x e^{5x} & + 45\,C_2 e^{5x} & - 135\,C_3 e^{-3x} & - 270\,C_4 e^{-6x} \\
+ 450\,C_1 e^{5x} & + 450\,C_2 x e^{5x} & + 10\,C_2 e^{5x} & + 450\,C_3 e^{-3x} & + 450\,C_4 e^{-6x} \\
\hline
0 & + 0 & + 0 & + 0 & + 0
\end{array} = 0.$$

b)

- Segundo grado

i) $(r-2+\sqrt{3}i)(r-2-\sqrt{3}i)$ $\qquad r = 2-\sqrt{3}i$, $r = 2+\sqrt{3}i$

$*$ $r^2 - 4r + 7 = 0 \Rightarrow$ ec. característica.

EDO lineal homogénea asociada:

$$y'' - 4y' + 7y = 0$$

ii) solución general

$a = 2 \qquad b = \sqrt{3}$

$$y(x) = e^{2x}(C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{3}x)$$

$\rightarrow$ $y'(x) = 2e^{2x}(C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\operatorname{sen}\sqrt{3}x) + e^{2x}(-\sqrt{3}C_1\operatorname{sen}\sqrt{3}x + \sqrt{3}C_2\cos\sqrt{3}x)$

$$\begin{aligned} y''(x) = {} & 4e^{2x}(C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\operatorname{sen}\sqrt{3}x) + 2e^{2x}(-\sqrt{3}C_1\operatorname{sen}\sqrt{3}x + \sqrt{3}C_2\cos\sqrt{3}x) \\ & + 2e^{2x}(-\sqrt{3}C_1\operatorname{sen}\sqrt{3}x + \sqrt{3}C_2\cos\sqrt{3}x) \\ & + e^{2x}(-3C_1\cos\sqrt{3}x - 3C_2\operatorname{sen}\sqrt{3}x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(x) = {} & 4e^{2x}(C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\operatorname{sen}\sqrt{3}x) + 4e^{2x}(-\sqrt{3}C_1\operatorname{sen}\sqrt{3}x + \\ & \sqrt{3}C_2\cos\sqrt{3}x) + e^{2x}(-3C_1\cos\sqrt{3}x - 3C_2\operatorname{sen}\sqrt{3}x) \end{aligned}$$

se reemplazan $y(x)$ y su derivada en la EDO y al sumar dan 0.

$$y'' - 4y' + 7y = 0.$$

$$\begin{aligned} & 4C_1e^{2x}\cos\sqrt{3}x + 4C_2e^{2x}\operatorname{sen}\sqrt{3}x - 4\sqrt{3}C_1\operatorname{sen}\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}C_2\cos\sqrt{3}x - 3e^{2x}C_1 \\ & \cos\sqrt{3}x - 3C_2e^{2x}\operatorname{sen}\sqrt{3}x - 8C_1e^{2x}\cos\sqrt{3}x - 8C_2e^{2x}\operatorname{sen}\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}C_1 \\ & e^{2x}\operatorname{sen}\sqrt{3}x - 4\sqrt{3}C_2e^{2x}\cos\sqrt{3}x + 7C_1e^{2x}\cos\sqrt{3}x + 7e^{2x}C_2\operatorname{sen}\sqrt{3}x = 0 \end{aligned}$$

$$0 = 0. \checkmark$$

Tercer grado.

$$(r-2)(r+1-2i)(r+1+2i)=0$$
$$(r-2)(r^2+r+\cancel{2ir}+r+1+\cancel{2i}-\cancel{2ir}-\cancel{2i}-4i^2=0$$
$$(r-2)(r^2+2r+5)=0.$$
$$r^3+\cancel{2r^2}+5r-\cancel{2r^2}-4r-10=0.$$
$$r^3+r-10=0. \Rightarrow \text{Ec. característica.}$$

EDO lineal homogénea asociada:

$$y'''+y'-10y=0.$$

ii) Solución general:

$$r=2 \qquad r=-1\pm 2i \Rightarrow a=-1 \quad b=2$$

* $y(x)=c_1e^{2x}+e^{-x}(c_2\cos 2x+c_3\operatorname{sen}2x).$

* $y'(x)=2c_1e^{2x}-e^{-x}(c_2\cos 2x+c_3\operatorname{sen}2x)+e^{-x}(-2c_2\operatorname{sen}2x$
$+2c_3\cos 2x)$

$y''(x)=4c_1e^{2x}+e^{-x}(c_2\cos 2x+c_3\operatorname{sen}2x)-e^{-x}(-2c_2\operatorname{sen}2x+$
$2c_3\cos 2x)+e^{-x}(-2c_2\operatorname{sen}2x+2c_3\cos 2x)$
$+e^{-x}(-4c_2\cos 2x-4c_3\operatorname{sen}2x)$

* $y''(x)=4c_1e^{2x}+e^{-x}(c_2\cos 2x+c_3\operatorname{sen}2x)-2e^{-x}(-2c_2\operatorname{sen}2x+$
$2c_3\cos 2x)+e^{-x}(-4c_2\cos 2x-4c_3\operatorname{sen}2x).$

* $y'''(x)=8c_1e^{2x}-e^{-x}(c_2\cos 2x+c_3\operatorname{sen}2x)+e^{-x}(-2c_2\operatorname{sen}2x+2c_3$
$\cos 2x)+2e^{-x}(-2c_2\operatorname{sen}2x+2c_3\cos 2x)-2e^{-x}(-4c_2\cos 2x$
$-4c_3\operatorname{sen}2x)-e^{-x}(-4c_2\cos 2x-4c_3\operatorname{sen}2x)+e^{-x}(-8c_2$
$\operatorname{sen}2x-8c_3\cos 2x)$

Comprobación: Reemplazo $y(x)$ y su derivadas. en la EDO

$$y'''+y'-10y=0.$$

$8c_1e^{2x}+6c_3e^{-x}\cos 2x-6c_2e^{-x}\operatorname{sen}2x+8c_2e^{-x}\operatorname{sen}2x-8c_3e^{-x}\cos 2x$
$+12c_3e^{-x}\operatorname{sen}2x+12c_2e^{-x}\cos 2x-c_3e^{-x}\operatorname{sen}2x-c_2e^{-x}\cos 2x+$
$2c_1e^{2x}-c_2e^{-x}\cos 2x-c_3e^{-x}\operatorname{sen}2x-2c_2e^{-x}\operatorname{sen}2x+2c_3e^{-x}\cos 2x$
$-10c_1e^{2x}-10c_2e^{-x}\cos 2x-10c_3e^{-x}\operatorname{sen}2x=0.$

$$0=0. \checkmark$$

c) Esto es debido a que e^{rx} nunca es cero, por tanto. al realizar cualquier derivada de e^{rx} se obtendrá un múltiplo constante de e^{rx}.

$$\frac{d^k}{dx^k}(e^{rx}) = r^k e^{rx}$$

Por tanto, al sustituir $y = e^{rx}$ en la solución, cada término será un múltiplo constante de e^{rx} con los coeficientes constantes dependiendo de la raíz (r) y los coeficientes a_k.

3.

b) mostrar que el operador

$L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + a_{n-2} D^{n-2} + \dots + a_1 D + a_0$ satisface las propiedades de linealidad.

1) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$

donde y_1 y y_2 son soluciones de la EDO

$a_n(y_1+y_2)^n + a_{n-1}(y_1+y_2)^{n-1} + \dots + a_1(y_1+y_2)$

Distributiva

$= a_n y_1^n + a_n y_2^n + a_{n-1} y_1^{n-1} + a_{n-1} y_2^{n-1} + \dots + a_1 y_1 + a_1 y_2$

$$= \underbrace{(a_n y_1^n + a_{n-1} y_1^{n-1} + \dots + a_1 y_1)}_{L(y_1)} + \underbrace{(a_n y_2^n + a_{n-1} y_2^{n-1} + \dots + a_1 y_2)}_{L(y_2)}$$

obtenemos entonces que $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$.

2) $L(cy_1) = c\,L(y_1)$ donde $c \Rightarrow$ cte

$a_n(cy_1)^n + a_{n-1}(cy_1)^{n-1} + \dots + a_1(cy_1) + a_0.$

$= c(a_n y_1^n) + c(a_{n-1} y_1^{n-1}) + \dots + c(a_1 y_1) + a_0.$

$$= c\,\underbrace{(a_n y_1^n + a_{n-1} y_1^{n-1} + \dots + a_1 y_1 + a_0)}_{L(y_1)}$$

$= c\,L(y_1)$

Scanned with CamScanner

c) $L: N_L = \{ y : L(y) = 0 \}$ es un subespacio vectorial del espacio funciones n veces derivables.

Propiedad 1: $v_1 + v_2 \in V$

Si $y_1 + y_2 \in N_L \Rightarrow L(y_1) = 0$
$L(y_2) = 0$

Ahora $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$
$L(y_1 + y_2) = 0 + 0.$
$0 = 0$ ✓
↳ confirmamos que $y_1 + y_2 \in N_L$

Propiedad 2 $\alpha y_1 \in N_L.$

$L(\alpha y_1) = \alpha L(y_1)$
$L(\alpha y_1) = \alpha (0)$
$L(\alpha 0) = 0$
$0 = 0.$
↳ se cumple que $\alpha y_1 \in N_L$

Como cumple las propiedades 1 y 2 se confirma que N_L es un subespacio.

Resolución y formulación de problemas

1.

Serie de Taylor.

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots$$

Si sustituimos $t = ix$, y teniendo en cuenta que:
se obtiene:

$i = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$
$i^5 = i$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$$

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \dots$$

$$e^{ix} = \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + -\frac{x^{2n}}{2n!}\right)}_{\cos x} + i\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \frac{-x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)}_{\operatorname{sen} x}$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x}$$

2) Demostrar que:

$x = x_h + x_p \Rightarrow$ solución general de $Ax = b$ (sist. no homogéneo)

donde: $x_h \Rightarrow$ solución de sistema homogéneo asociado.

$$A(x_h) = 0$$

y $x_p \Rightarrow$ solución de sistema no homogéneo.

$$A(x_p) = b$$

$$\Rightarrow A(x_h + x_p) = b$$

$$A(x_h) + A(x_p) = b$$

$$0 + b = b$$

$$b = b$$

↳ concluimos que $x_h + x_p$ es solución del sistema no homogéneo $Ax = b$.

De forma análoga, existe un resultado para el problema no homogéneo en EDO $L(y) = g(x)$

$$L(y) = g(x)$$

$$L(y_c + y_p) = g(x)$$

$$L(y_c) + L(y_p) = g(x)$$

$$0 + g(x) = g(x)$$

$$g(x) = g(x) \checkmark$$

$\begin{cases} L(y_c) = 0 \Rightarrow \text{sol. de sist. homogéneo} \\ L(y_p) = g(x) \Rightarrow \text{sol. particular del sistema no homogéneo.} \end{cases}$

↳ concluimos que $L(y_c + y_p)$ es solución del sistema no homogéneo. $L(y) = g(x)$.