

Anna Sierpinska
Concordia University -
Department of Mathematics and Statistics

Η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης
Ε(f): Επιστημολογικά εμπόδια
Κ(f): Προβλήματα κατανόησης

Δ. Πόταρη

Αρχικές προϋποθέσεις

- Χ και Υ αντιπροσωπεύουν ΤΟΝ ΚΟΣΜΟ ΤΩΝ ΑΛΛΑΓΩΝ ή ΤΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ ΠΟΥ ΑΛΛΑΖΟΥΝ
- Η f αντιπροσωπεύει ΤΟΝ ΚΟΣΜΟ ΤΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ μεταξύ των αλλαγών ή των αντικειμένων που αλλάζουν ή ΤΟΝ ΚΟΣΜΟ ΤΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ που μετασχηματίζουν τα αντικείμενα σε άλλα αντικείμενα.
- Οι σχέσεις ή διαδικασίες πρέπει να προσδιορίζονται επακριβώς και αυτό αντιπροσωπεύει ΤΟΝ ΚΟΣΜΟ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΩΝ, ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΝΟΜΩΝ

Σε σχέση με την κατανόηση της συνάρτησης - K(f)

- K(f)-1: προσδιορισμός των αλλαγών που παρατηρούνται στον περιβάλλοντα κόσμο ως ένα πρακτικό πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί.
- K(f)-2: προσδιορισμός των κανονικοτήτων των σχέσεων μεταξύ των αλλαγών ως ένα μέσο για να ασχοληθούμε με τις αλλαγές.

Επιστημολογικά εμπόδια- Ε(f)

- Ε(f)-1: (Η φιλοσοφία των μαθηματικών) Τα μαθηματικά δεν ασχολούνται με πρακτικά προβλήματα.
- Ε (f)-2: (Η φιλοσοφία των μαθηματικών) Υπολογιστικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή πινάκων που παρουσιάζουν αριθμητικές σχέσεις δεν είναι αντικείμενο άξιο προς μελέτη στα μαθηματικά.
- Κάθε πράξη κατανόησης προϋποθέτει την υπερπήδηση ενός αντίστοιχου επιστημολογικού εμποδίου

- K(f)-3: Ο προσδιορισμός των ποσοτήτων που αλλάζουν κατά τη μελέτη μεταβολών.
- Με αντίστοιχο επιστημολογικό εμπόδιο:
- E (f)-3: (Ασυνείδητο σχήμα σκέψης) Η θεώρηση των αλλαγών ως φαινόμενα· εστιάζοντας στον τρόπο που τα πράγματα αλλάζουν, αγνοώντας τις αλλαγές αυτές καθαυτές.

- Κ(f)-4: η διάκριση μεταξύ των δυο τρόπων μαθηματικής σκέψης: η μια με όρους γνωστών και άγνωστων ποσοτήτων, η άλλη με όρους μεταβλητών και σταθερών ποσοτήτων.
- Ε(f)-4: (-Ασυνείδητο- σχήμα της σκέψης) Πρέπει να εκμαιευθεί η σκέψη με όρους εξισώσεων κι αγνώστων.

Παράδειγμα για το τελευταίο

- *«δυο εταιρίες ενοικιάζουν φωτοτυπικά μηχανήματα. Η πρώτη χρεώνει 300$ για την τοποθέτηση του μηχανήματος για κάθε μήνα και 0,04 $ για κάθε φωτοτυπία. Η δεύτερη χρεώνει 250$για την τοποθέτηση του μηχανήματος για κάθε μήνα και 0,06 $ για κάθε φωτοτυπία.*
- *1. Για ποιο αριθμό φωτοτυπιών ανά μήνα θα ήταν ίδια η τιμή;*
- *2. Εάν βγάζετε πολλές φωτοτυπίες ποια εταιρία είναι η πιο συμφέρουσα;*

Ασυμμετρία Χ και Υ : Η εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή

- Κ (f)-5: η διάκριση μεταξύ των εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών.
- Παράδειγμα μαθητή που γι αυτόν συναρτήσεις είχαν υπόσταση σε πλαίσιο της αναλυτικής γεωμετρίας·
  - οι καμπύλες δεν αντιπροσώπευαν συγκεκριμένες σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών.
  - οι καμπύλες ήταν αρχικά εκεί και περιγράφονταν από τις σχέσεις που αντιπροσώπευαν τις καμπύλες.
  - Ο τύπος της συνάρτησης επιτρέπει μόνο τον υπολογισμό της μιας συντεταγμένης σε σχέση με την άλλη

Χ και Υ –ποσότητες ή σύνολα σημείων;

- Ε(f)-6: (Μια στάση προς την έννοια του αριθμού) μια ετερογενής αντίληψη του αριθμού.
- Κ(f)-6: Γενίκευση και σύνθεση της έννοιας του αριθμού.
- ανάγκη για να εξαλειφθεί η διάκριση μεταξύ διακριτών αριθμών και συνεχών μεγεθών

- Ε(f)-7: (Μια στάση προς την έννοια του αριθμού) Η Πυθαγόρεια φιλοσοφία του αριθμού: τα πάντα είναι αριθμοί.
- Η διάκριση μεταξύ μεταβλητών που αντιπροσωπεύουν φυσικές έννοιες (*χρόνος, ταχύτητα, θέση)* και αριθμητικών μεταβλητών είναι μια απαραίτητη προϋπόθεση για την κατανόηση της συνάρτησης.
- Κ(f)-7: Διάκριση μεταξύ αριθμού και ποσότητας

- Ε(f)-8: (Ασυνείδητο σχήμα της σκέψης) Οι νόμοι στη Φυσική και οι συναρτήσεις στα μαθηματικά δεν έχουν τίποτα κοινό · ανήκουν σε διαφορετικές περιοχές (θαλάμους) της σκέψης.
- Κ(f)-8: Η σύνθεση των εννοιών των νόμων και της έννοιας της συνάρτησης· ειδικά, η επίγνωση της δυνατής χρήσης των συναρτήσεων για τη μοντελοποίηση σχέσεων μεταξύ φυσικών και άλλων μεγεθών.

Η σχέση της συνάρτησης

- E(f)-9: (Ασυνείδητο σχήμα της σκέψης) Η αναλογία είναι μια προνομιούχα μορφή σχέσης.
- E(f)-10: (Μια πεποίθηση αναφορικά με τις μαθηματικές μεθόδους) Η ισχυρή πεποίθηση της ισχύος των τυπικών πράξεων στις αλγεβρικές εκφράσεις.
- E(f)-11: (Μια αντίληψη για τη συνάρτηση) Μόνο οι σχέσεις που περιγράφονται από αναλυτικούς τύπους αξίζει να ονομαστούν συναρτήσεις.

- Κ(f)-9: Η διάκριση μεταξύ της συνάρτησης και των αναλυτικών εργαλείων που μερικές φορές χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τον κανόνα της.
- παραδείγματα όπου μια συνάρτηση περιγράφεται με δυο διαφορετικούς τύπους (πχ. έναν αναδρομικό και ένα με τη γενική μορφή του ν-οστού όρου).

Η σύνθεση της γενικής έννοιας της συνάρτησης- γιατί είναι τόσο δύσκολη;

- E(f)-12: (Η αντίληψη του ορισμού) Ο ορισμός είναι η περιγραφή ενός αντικειμένου που αλλιώς γίνεται αντιληπτό με τις αισθήσεις ή την ενόραση. Ο ορισμός δεν προσδιορίζει το αντικείμενο· μάλλον το αντικείμενο προσδιορίζει τον ορισμό. Ο ορισμός δεν είναι λογικά δεσμευτικός (binding logically).
- K(f)-10: Η διάκριση μεταξύ μαθηματικών ορισμών και περιγραφές αντικειμένων
- K(f)-11: Η σύνθεση της γενικής αντίληψης της συνάρτησης ως αντικείμενο.
- ***μια πρώϊμη εισαγωγή του ορισμού δεν έχει νόημα· είτε θα αγνοηθεί είτε θα οδηγήσει σε παρανοήσεις.***

Ορισμός της συνάρτησης – αναπαραστάσεις

- K(f)-11: η διάκριση μεταξύ των εννοιών της συνάρτησης και της σχέσης
- Πίνακες τιμών
  - E(f)-13: (Η αντίληψη της συνάρτησης) Οι συναρτήσεις είναι ακολουθίες.
  - K(f)-13: Η διάκριση μεταξύ των εννοιών της συνάρτησης και ακολουθίας.

Γραφικές παραστάσεις

- Ε(f)-14: (Η αντίληψη για τις συντεταγμένες) Οι συντεταγμένες ενός σημείου είναι ευθύγραμμα τμήματα (όχι αριθμοί).
- Κ(f)-14: Η διάκριση μεταξύ των συντεταγμένων του σημείου της καμπύλης και των ευθυγράμμων τμημάτων *ικανοποιώντας μια λειτουργία της συνάρτησης.*
- Ε(f)-15: (Η αντίληψη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ένα γεωμετρικό μοντέλο, η συναρτησιακή σχέση. Δε χρειάζεται να είναι πιστή, μπορεί να περιέχει και σημεία (x,y) στα οποία η συνάρτηση να μην ορίζεται στο x.
- Κ(f)-15: Η διάκριση μεταξύ των διαφορετικών μορφών αναπαράστασης των συναρτήσεων και των ίδιων των συναρτήσεων

διαφορετικοί όροι των ίδιων πραγμάτων

- η τιμή της συνάρτησης (Η συνάρτηση εκχωρεί κάτι σε ένα αριθμό)
- ο όρος της ακολουθίας (η ακολουθία διατάσσει ένα διακριτό σύνολο)
- η εικόνα του σημείου (χαρτογραφεί)
- Στη φυσική (ένας νόμος συσχετίζει δυο ή περισσότερα μεγέθη)

Κ(f)-16: η σύνθεση των διαφορετικών μορφών απεικόνισης των συναρτήσεων, αντιπροσωπεύοντας τις συναρτήσεις και μιλώντας για αυτές.

Οι έννοιες της συνάρτησης και της αιτίας (cause).

- Ε(f)-16: (η αντίληψη της μεταβλητής) Οι αλλαγές στη μεταβλητή είναι αλλαγές στο χρόνο.
- Κ(f)-17: η γενίκευση της έννοιας της μεταβλητής.
- Κ(f)-18: η σύνθεση των ρόλων των εννοιών της συνάρτησης και του σκοπού στην ιστορία της επιστήμης: η επίγνωση του γεγονότος ότι η αναζήτηση συναρτησιακών και αιτιολογικών σχέσεων είναι και οι δυο εκφράσεις της ανθρώπινης προσπάθειας να κατανοήσουν και να εξηγήσουν τις αλλαγές στον κόσμο που τους περιβάλλει.
- Κ(f)-19: η διάκριση μεταξύ των εννοιών των συναρτησιακών και αιτιωδών σχέσεων.

Μερικά συμπεράσματα διδακτικού περιεχομένου

- Αναφορικά με την κινητοποίηση:
  - οι μαθητές πρέπει να ενδιαφέρονται να εξηγήσουν τις αλλαγές, βρίσκοντας κανονικότητες μεταξύ αυτών. Οι συναρτήσεις μπορεί να παρουσιάζονται ως μοντέλα συγκεκριμένων σχέσεων που παρατηρούν.
  - Αλλά πρέπει επίσης να παρουσιάζονται ως εργαλεία αναπαράστασης ενός συστήματος με ένα άλλο (τότε θα μιλούσαμε για αντιστοιχήσεις)

- Αναφορικά με τα εισαγωγικά πλαίσια:
  - οι συναρτήσεις στην αναλυτική μορφή θα πρέπει αρχικά να παρουσιάζονται ως εργαλεία μοντελοποίησης συγκεκριμένων καταστάσεων στην καθημερινή ζωή ή τη φυσική.
  - ***Καλό θα ήταν η παρουσίαση της πραγματικής κατάστασης να μην ήταν ιδεατή, με αποτέλεσμα τη μετατροπή της κατασκευής του μοντέλου σε ένα τυπικό πρόβλημα.***

- Αναφορικά με αναπτυξιακά πλαίσια:
  - μέθοδοι που παρεμβάλλονται στην κατασκευή των πινάκων τιμών βοηθούν στην βαθύτερη κατανόηση της έννοιας.
- Αναφορικά με την ανάπτυξη ενός πιο λεπτομερούς επιπέδου κατανόησης των συναρτήσεων:
  - ***οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να πουν όχι μόνο πώς αλλάζει αλλά και τι αλλάζει.***

- Αναφορικά με προαπαιτούμενες γνώσεις:
  - ***χρειάζεται μια αλγεβρική επίγνωση δομικού επιπέδου. Δεν έχει νόημα η εισαγωγή του γενικού ορισμού της συνάρτησης πριν την ανάπτυξη μιας συγκεκριμένης μαθηματικής κουλτούρας***.
- Αναφορικά με τις αναπαραστάσεις:
  - ένα ευρύ φάσμα παρουσίασης της συνάρτησης,

- Αναφορικά με τους ορισμούς:
  - Οι άτυποι ορισμοί της συνάρτησης, της μορφής του Dirichlet, επαρκούν για την β-θμια εκπαίδευση.
- Αναφορικά με τη διάκριση της έννοιας της συνάρτησης και άλλων γενικών εννοιών :
  - συζητήσεις στην τάξη για ομοιότητες και διαφορές μεταξύ συναρτησιακών και αιτιώδους συνάφειας σχέσεων