Pisagor ve Sayılar

Uygarlıklar arasında bende en çok hayranlık uyandıran Eski Yunan uygarlığıdır. Matematikte, bilimde, felsefede ve sanatta akıl almaz bir düzeye erişmişlerdir. Ne var ki, İsa'nın doğumunu izleyen birkaç yüzyıl içinde Hıristiyan bağnazlığı bu ilerlemeyi durdurmuştur. Durdurmakla kalmamış, geriye bile götürmüştür. Yunan pagan bilginlerinin yapıtları yakılmış, yokedilmiştir. Araplar ve birkaç Bizanslı aydın olmasaydı, bugüne o günlerden pek bir şey kalmayacaktı. Yunanlılardan ancak bin yıl sonra, Rönesans'la birlikte, yani 15. yüzyılda, Eski Yunan uygarlığının değeri anlaşılmış, ve yapıtları incelenmeye başlanmıştır. Eski Yunanlıların geldikleri düzey öylesine yüksekti ki, matematik ve felsefede ilk önemli atılım Rönesans'tan da sonra, René Descartes (1596–1650) ile gerçekleştirilmiştir.

René Descartes

Yunan uygarlığının Yunan uygarlığı olabilmesinin nedenleri kısmen açıklanabilir. İklim ve doğa koşullarından, ticaret ve ulaşım gibi denizin sağladığı olanaklardan, Mısır ve Sümer uygarlıklarının etkisinden, köleliğe ve sömürüye dayanan ekonomik ve toplumsal dizgeden (sistemden) sözedilebilir. Bütün bunların elbet Yunan uygarlığının oluşmasına önemli katkıları olmuştur. Gene de uygarlığın ulaştığı o şaşılası düzeyi açıklamakta bence yetersiz kalıyor bu etkenler. Eski Yunanlıların eriştiği düzey bir tansık (mucize) gibi geliyor.

İÖ 6'ncı yüzyılda yaşamış olan Pisagor'u (Pythagoras'ı) konu etmek istiyorum. Matematikte kanıt kavramını ilk kez Pisagor'un bulduğu sanılıyor. Daha önce de olabilir, ama kesinlikle daha sonra değil[1].

Belit (aksiyom) olmadan, yani doğruluğu kabul edilmiş önermeler olmadan teorem kanıtlanmaz. Nasıl hiçten bir şey varolmazsa, belitsiz de teorem varolamaz. O zamanlar belit, kanıtlanamayan ve kanıtlanmasına da gerek duyulmayan, yani "doğruluğundan" kuşku duyulmayan önerme (ya da tümce) anlamına gelirdi. Bu doğruluğu önceden kabul edilmiş belitler dışında her önerme ancak kanıtlanabildiğinde doğru kabul edilirdi[2].

İnsanlık ve bilim tarihinde "belit" kavramı bir devrimdir hiç kuşkusuz. Eski Yunanlılar, doğruluğu su götürmez bu kanıtlanamayan gerçekleri hangi nedenle kâğıda geçirmek zorunluğunu duymuşlardır? Bilmiyorum.

Pisagor yalnız matematikçi değildi, aynı zamanda bir filozoftu. Bir bakıma peygamberdi de. Pisagorculuk bir din olarak yayıldı ta başından beri. Bakla yememek gibi nedenini anlayamadığımız kuralları bile vardı. Ruhla bedeni birbirinden ayırır, ruhların bedenden bedene geçebileceğine inanırdı Pisagorcular.

---

1 Her ne denli Tales, Pisagor'dan önce yaşamış ve adıyla anılan bir teoremi varsa da, Tales'in adıyla anılan bu teoremi kanıtlamadığı, Öklid'in İÖ 3'üncü yüzyılda kanıtlandığı oldukça yaygın bir kanı.

2 Kimi Batı aydını, son onyıllarda, Yunan uygarlığının öyle sanıldığı gibi yüksek düzeye ulaşmadığını, Yunanlıların bilgilerinin daha önceden Sümerliler ve Mısırlılar tarafından bilindiğini kanıtlama yarışına girmiş gibi görünüyor. Bilgiler daha önce elde edilmiş olabilir. Ama bilime yaklaşım ve bakış açısı bilgiden de önemlidir. Bilimde kanıt kavramından daha önemli bir başka kavram yoktur. Bilimin özünde "nasıl" ve "neden" soruları yatar. Bu sorular da büyük ölçüde kanıt yaparak yanıtlanır.

Pisagor'un kurduğu okul, yani düşünce ekolü, yüzyıllar boyunca matematiği, bilimi, felsefeyi ve sanatı etkilemiştir. Pisagor müzikte bile kuramsal yenilikler yapmıştır.

Pisagor ve Pisagorcular "her şey sayıdır" derlerdi. Yani her şeyi sayılarla, daha doğrusu 1, 2, 3 gibi doğal sayılarla açıklayabileceklerini sanırlardı. Sayı ise cebir demektir. Pisagorculara göre geometriyle cebir arasında bir ayrım yoktu. 17. yüzyılın ilk yarısında René Descartes, Analitik Geometri'yi bularak cebirle geometri arasında bir ilişki kurmuştur: Geometrik bir problem cebirsel yöntemle çözülebilir. Ancak Descartes'la Pisagor arasında çok önemli bir ayrım vardır. Descartes geometriyle cebiri birbirinden ayırıyordu. Bu yüzden bu iki kuram arasında bir ilişki kurmayı düşünebilmiştir. Oysa Pisagor ve Pisagorcular için böyle bir ayrım sözkonusu değildi. Descartes'ın yapmak istediğini düşünemezler, buna gereksinim duymazlardı.

$\sqrt{2}$'nin kesirli bir sayı olmadığı anlaşıldığında Pisagorculuk büyük bir darbe yiyip zayıflamıştı.

$\sqrt{2}$'nin kesirli bir sayı olmadığının kanıtının çok güzel olduğu söylenir. Çoğu popüler matematik kitabında 'güzel kanıt'a örnek olarak verilir. Kanıtlayalım: Diyelim $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı. Bir çelişki elde edeceğiz ve böylece $\sqrt{2}$'nin kesirli bir sayı olmadığı anlaşılacak. $\sqrt{2}$ sayısını a/b olarak yazalım. Burada a ve b, 1, 2, 3 gibi doğal sayılar. Ayrıca a ve b sayılarının ortak bölenlerinin olmadığını varsayalım. Gerektiğinde sadeleştirebileceğimizden bu varsayımı yapabiliriz. Demek ki $\sqrt{2}= a/b$ eşitliğini kabul ediyoruz. Her iki tarafı da b ile çarpıp

$$b\sqrt{2} = a$$

eşitliğini bulalım. Şimdi her iki tarafın da karesini alalım:

$$2b^2 = a^2 \qquad (1)$$

Bu son eşitliğin solundaki sayı, yani $2b^2$, çift bir sayı. Demek ki sağdaki a^2 de çift bir sayı. a^2 çiftse, a da çift olmak zorunda. Yani a, 2'ye bölünebiliyor. $a_1 = a/2$ olsun. Dolayısıyla $2a_1 = a$.

(1) eşitliğinde a yerine $2a_1$ koyalım: $2b^2 = a^2 = (2a_1)^2 = 4a_1{}^2$ elde ederiz. Sadeleştirirsek, $b^2 = 2a_1{}^2$ eşitliği çıkar. Bu kez de b^2'nin çift olduğunu bulduk. Demek ki b de çift. Yani b, 2'ye bölünüyor. Yukarda a'nın da 2'ye bölündüğünü kanıtlamıştık. Demek ki 2, hem a'yı hem de b'yi bölüyor. Ama bu sayıların ortak bölenlerinin olmadığını varsaymıştık daha başlangıçta... Bir çelişki elde ettik. Demek ki $\sqrt{2}$kesirli bir sayı değilmiş.

Bu kanıt gerçekten güzel midir? Benim kişisel görüşüm "eh! şöyle böyle"dir. Güzel bir kanıtta şaşırtıcı bir öğe ararım. O öğeyi bu kanıtta bulamıyorum.

Bu kanıtın benzerini tam kare olmayan her n tamsayısı için yapabilirsiniz: Eğer n tamsayısı bir tam kare değilse, $\sqrt{n}$ kesirli bir sayı değildir.

Yukardaki olgudan her şeyin tamsayı olmadığı, Pisagorcuların haksız oldukları çıkar. Ama sayı olan öylesine çok şey var ki, Pisagor'un haklı çıkmasına ramak kalmış.

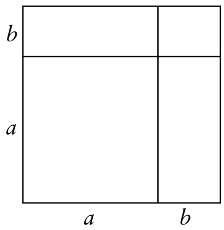
Aşağıda dört teorem kanıtlayacağız. Bunlardan ilk üçü sayılarla geometrinin nasıl sıkı bir ilişkide olduklarını gösterecek. Dördüncüsünde ise ünlü Pisagor teoreminin çarpıcı bir kanıtını vereceğiz.

1. Eğer a ve b iki pozitif sayı ise, $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ dir.

Bu eşitliği bilmeyip, $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ yazan çok öğrenci vardır. Sanırım $2(a + b) = 2a + 2b$ eşitliğinden geliyor bu yanılgı.

Doktora yıllarımda yerel bir üniversitede ders veriyordum. Öğrencilerimin hem ekonomik ve toplumsal koşulları hem de bilgi düzeyi çok düşüktü. $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ eşitliğini bir türlü öğretemiyordum. Derste anlatınca anlamış gibi başlarını sallıyorlar, ödeve, sınava gelince $(a+b)^2 = a^2+b^2$ yazıyorlar. Ne yapsam boşuna... Bir türlü gerçek eşitliği kafalarına sokamıyorum. Ne yapacağımı bilmez bir durumdayken, bir dergide aşağıdaki kanıtı gördüm.

Bir kenarı $a+b$ olan bir kare çizelim. Bu karenin alanı $(a+b)^2$ dir. Bu karenin alanını başka türlü hesaplayacağız. Aşağıdaki gibi kareyi dörde bölelim.



Ve hemen hesaplayalım:
Sol alt dörtgenin alanı = a^2
Sol üst dörtgenin alanı = ab
Sağ alt dörtgenin alanı = ab
Sağ üst dörtgenin alanı = b^2

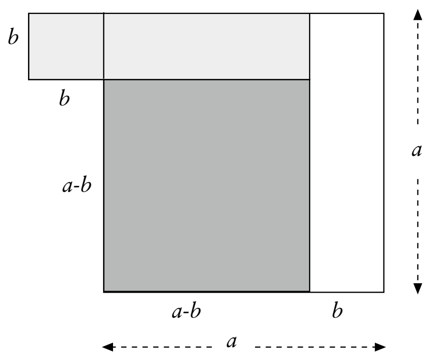
Tüm karenin alanını bulmak için bu dört alanı toplayalım. $a^2 + 2ab + b^2$ buluruz.

Demek ki $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ imiş.

Bu kanıtı gördükten sonra öğrencilerin hepsi olmasa bile birkaçı $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ eşitliğini öğrendi.

Kanıtımız yalnızca pozitif sayılar için geçerli, ama aynı eşitlik pozitif ya da negatif, her sayı için geçerlidir.

2. Buna benzer bir kanıtla $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ eşitliğini de gösterebiliriz.



Yukardaki şekilde koyu gri renkli karenin alanını iki türlü hesaplayacağız. Koyu gri renkli karenin her kenarı $a - b$ olduğundan, bu karenin alanı $(a - b)^2$ dir. Bunu aklımızda tutalım. Aynı karenin alanını bir başka türlü hesaplayacağız.

Bütün şekil iki kareden oluşmaktadır: soldaki küçük kare ve sağdaki büyük kare. Bu karelerin alanları sırasıyla b^2 ve a^2 dir. Demek ki bütün şeklin alanı $a^2 + b^2$ dir. Koyu gri renkli karenin alanını bulmak için, bu büyük alandan açık gri ve beyaz dikdörtgenlerin alanını çıkaralım. Yani, $a^2 + b^2$ den iki kez ab'yi çıkaralım (çünkü her iki dikdörtgenin de alanı ab'dir.) Demek ki koyu gri renkli karenin alanı aynı zamanda, $a^2 + b^2 - 2ab$'ymiş. Demek ki, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ eşitliği doğruymuş.

3. n pozitif bir tamsayı olsun. 1'den $2n$'ye kadar olan tek sayıların toplamı n^2'dir.

Örnek:

$$1^2 = 1$$
$$2^2 = 1+3$$
$$3^2 = 1+3+5$$
$$4^2 = 1+3+5+7$$
$$5^2 = 1+3+5+7+9$$

Ne ilginç değil mi? Peşpeşe gelen tek sayıları toplayarak bir kare elde ediyoruz. Pisagorcular durup dururken mistisizme kaymamışlar, sayılardan büyülenmemişler... Çocukluğumda 1 + 2 + 3 + 4 = 10 eşitliğini gizemli bulurdum. Sonradan, büyüyünce, ne yazık ki o gizem kayboldu.

Her sayıyı bir kareyle gösterelim. Aşağıda 1'i ve karesini görüyorsunuz:

1

1'den sonra gelen tek sayı 3. 1 ile 3'ü toplamak için, 1 kareyle 3 kareyi toplayalım, yukardaki kareye 3 kare daha ekleyelim:

3	2
1	1

Gördüğümüz gibi 1 kareyi ve 3 kareyi toplayarak bir kenarı 2 olan bir kare elde ettik. Yani $1+3 = 2^2$.

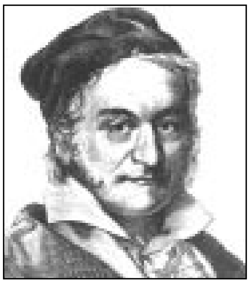
3'ten sonra gelen tek sayı 5. Yandaki şekil 1+3'ü gösteriyor. Bu şeklin iki yanına 5 küçük kare daha ekleyelim:

Böylece 1+3+5 elde ettik. Yukardaki şekilde de görüldüğü gibi bir kenarı 3 olan büyük bir kare elde ettik. Yani 1+3+5 = 3^2. Bunu böylece sürdürebiliriz.

Gel de Pisagor'a hak verme!

5	4	3
3	2	2
1	1	1

3. Gauss'un (1777–1855) ilkokul öğretmeni sınıftan çıkmak istemiş. Çocukların boş durmamaları için de "zor" bir soru sormuş: "1'den 100'e kadar olan sayıların toplamı kaçtır?" Çocukların bu 100 sayıyı altalta yazıp toplamalarını bekliyor... Ne insafsız bir öğretmen! Öğretmen daha sınıftan dışarı adımını atmamış ki, küçük Gauss oturduğu yerden,



Carl Friedrich Gauss

– 5050, diye bağırmış.

Öğretmen donakalmış kapının eşiğinde. Olacak iş değil! Küçük Gauss hesapta kuvvetli, kuvvetli olmasına ama, gene de... Oysa küçük Gauss'un bir formülü var. İşte formül:

n pozitif bir tamsayıysa, 1'den n'ye kadar olan tamsayıların toplamı $n(n+1)/2$'dir. Yani,

$$1+2+3+\ldots + (n-1) + n = n(n+1)/2$$

Öğretmenin sorduğu soruda $n = 100$. Gauss yukardaki formülü uygulayıp, $100\times101/2 = 5050$ bulmuş.

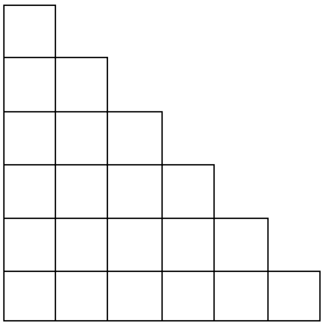
Küçük Gauss'un bulduğu bu formülü kanıtlayacağız. Geometriyle...

Her k tamsayısını, $1 \times k$ boyutlu bir dikdörtgen olarak gösterelim. Örneğin, 4 tamsayısını yandaki gibi bir dikdörtgen olarak göstereceğiz.

Şimdi,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

sayısını bu dikdörtgenleri üstüste koyarak gösterelim. Örneğin, $n = 6$ ise, aşağıdaki şekli elde ederiz. Bulmak istediğimiz sayı bu

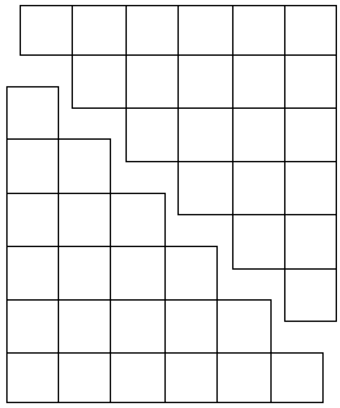


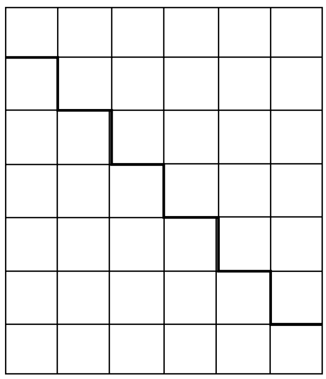
garip üçgendeki kare sayısıdır. Bu üçgendeki kare sayısını bulmak kolay olmayabilir, ama bu üçgenden iki tane alırsak, kare sayısını daha kolay hesaplayabiliriz. Bu üçgenin bir benzerini tepe taklak edip üstüne koyalım ve iki "üçgen"i birleştirelim (aşağıda, sağdaki şekle bakın.)

Bulmak istediğimiz sayı bu dikdörtgendeki kare sayısının yarısı. Dikdörtgendeki kare sayısını hesaplayalım. Dikdörtgenimizin eni n, yüksekliği $n + 1$ olduğundan, bu dikdörtgende $n(n + 1)$ tane kare vardır. Demek ki üçgende $n(n+1)/2$ tane kare vardır. Dolayısıyla 1'den n'ye kadar olan sayıların toplamı

$$n(n+1)/2$$

dir.





Bilinen bir fıkra vardır. Adam trende. Yanında arkadaşı. Bir koyun sürüsü görüyorlar pencereden. Adam,

– 73 koyun var, diyor.

Öbürü şaşırıyor,

– Nerden biliyorsun? diyor.

– Öyle... diyor bizimki.

İddiaya girip ilk istasyonda iniyorlar. Koyunları saydıklarında gerçekten 73 koyun çıkıyor. Bir sonraki trene biniyorlar. Gene aynı sahne, bir koyun sürüsü...

– 95 koyun var.

– Amma attın ha! diyor öbürü.

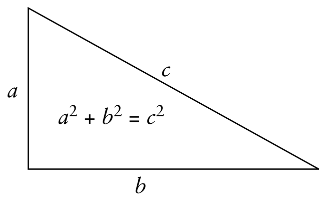
Gene iddiaya giriyorlar, gene trenden iniyorlar, gene bizimki haklı çıkıyor. Bir sonraki trende de aynı sahne olunca ve bir kez daha bizimki haklı çıkınca öbürü soruyor,

– Yahu nasıl biliyorsun?

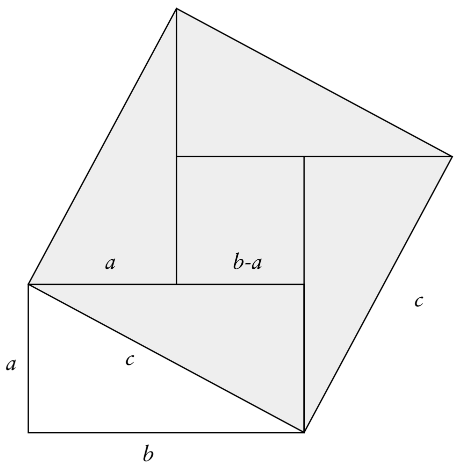
– Çok kolay, ayaklarını sayıp dörde bölüyorum.

İşte bizim yaptığımız da biraz buna benziyor. Bir sayıyı hesaplamak için o sayıyı önce ikiyle çarptık.

4. Şimdi ünlü Pisagor teoremine gelelim. Buna "Eşek Teoremi" de denir. Pisagor teoremi der ki: Bir dikücgenin dik açısının kenarlarının uzunluklarının karelerinin toplamı öbür kenarın uzunluğunun karesine eşittir. Aynı teorem yukardaki şekilde resimlendirilmiştir.



Bu teoremi kanıtlayacağız şimdi. Uzunluğu c olan kenara bir kare inşa edelim



Yamuk duran karenin bir kenarının uzunluğu c'dir, demek ki alanı c^2'dir. Şimdi aynı alanı başka türlü hesaplayacağız. Karede dört üçgen var ve her birinin alanı ilk üçgenimizin alanına eşit, yani her üçgenin alanı $ab/2$. Bu dört üçgen dışında, yamuk karenin içinde bir de küçük kare var. Bu küçük karenin her kenarı $b - a$ olduğundan alanı $(b - a)^2$'dir. Demek ki her kenarının uzunluğu c olan karenin alanı bu alanların toplamına eşittir:

Dört üçgenin alanı $= 4 \times ab/2 = 2ab$

Küçük karenin alanı $= (b-a)^2 = b^2 - 2ab + a^2$

Toplam alan $= a^2 + b^2$

Dolayısıyla $c^2 = a^2 + b^2$ eşitliği geçerlidir[4].

Bir gün bir arkadaşım, "Matematikçi olduğum için o denli mutluyum ki... Bu güzellikleri anlayabiliyorum," demişti. Matematik gerçekten güzeldir.

Cahit Arf hocamız da, "güzellik insanda sonsuzluk duygusu uyandırandır," demişti bir gün. Ben hak veriyorum hocamıza.

4 Kaynakça [28]'de daha bunun gibi birçok geometrik kanıt vardır.