6.9 TEOREMA DE LA PARALELA MEDIA EN UN TRIÁNGULO

Demostración.

TEOREMA 39. Paralela media de un triángulo.

i) El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene por medida su mitad.

ii) Si por el punto medio de un lado de un triángulo se traza una paralela a un lado, dicha paralela biseca al tercer lado.

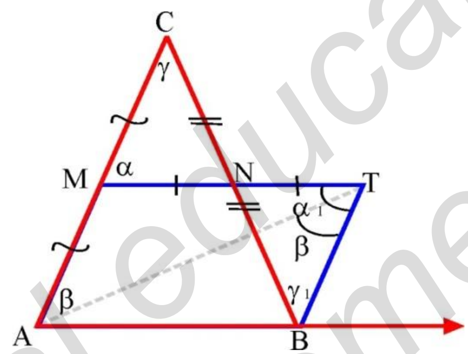

Figura 105.

i) Sean M y N puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ respectivamente.

Demostremos que: $\overline{MN} // \overline{AB}$ y que $MN = \frac{1}{2} AB$.

Prolonguemos $\overline{MN}$ tal que: $\overline{MN} \cong \overline{NT}$.

Los triángulos $M\overset{\Delta}{N}C$ y $T\overset{\Delta}{N}B$ son congruentes por *L-A-L*.

Luego los ángulos:

$$\alpha = \alpha_1 \qquad (1)$$

$$\gamma = \gamma_1 \qquad (2)$$

$$CM = BT \qquad (3)$$

Pero de (1), las rectas $\overleftrightarrow{TB}$ y $\overleftrightarrow{CA}$ son paralelos por hacer ángulos alternos congruentes con la secante $\overleftrightarrow{MT}$.

Determinemos $\overline{AT}$, entonces $\hat{\beta} \cong \hat{\beta}'$ por el teorema recíprocos de los ángulos alternos internos; y por lo tanto $\Delta AMT \cong \Delta TAB$.

En consecuencia:

$$MT = AB \qquad (4)$$

$$M\hat{T}A \cong T\hat{A}B \qquad (5)$$

Y así como N es un punto medio de MT entonces de (4) se concluye que $MN = \frac{1}{2}AB$ y de (5) por el T. $\angle$ A. I. se concluye que $\overline{MN} \,//\, \overline{AB}$.

ii) Sea el triángulo $A\overset{\Delta}{B}C$, M punto medio de $\overline{AC}$. $\overline{MN} \,//\, \overline{AB}$, por N tracemos una paralela a $\overline{AC}$. Tenemos: $M\overset{\Delta}{N}C \cong T\overset{\Delta}{B}N$ ya que: $C\hat{M}N \cong N\hat{T}B$, $A\hat{C}B = B\hat{N}T$ (por correspondientes) y $AM = NT = MC$. Entonces, $CN = NB$.

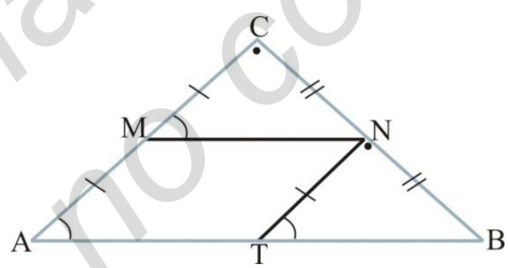

Figura 106.

COROLARIO.
En todo triángulo rectángulo la mediana relativa a la hipotenusa es la mitad de la hipotenusa.

Demostración.

$\overline{AM}$ mediana del triángulo rectángulo $B\overset{\Delta}{A}C$, con ángulo recto $C\hat{A}B$.

Sea D el punto medio de AB, entonces por teorema anterior $\overline{MD} // \overline{CA}$ y por lo tanto $M\hat{D}B$ es recto.

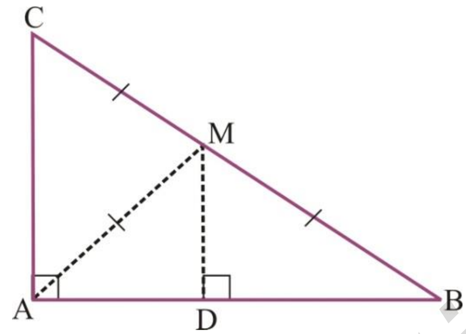

Figura 107.

Luego el triángulo $A\overset{\Delta}{M}B$ es isósceles. $M\hat{A}B \cong M\hat{B}A$. De aquí concluimos que: $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ y como M es punto medio de $\overline{BC}$ se tiene que: $\overline{AM} \cong \overline{BM} \cong \overline{MC}$.

TEOREMA 40.
Si el pie de una mediana de un triángulo equidista de los vértices, el triángulo es rectángulo.

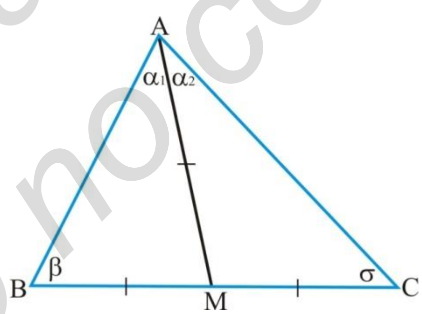

Figura 108.

Demostración.
Sea $\overline{AM}$ la mediana relativa a $\overline{BC}$ y además $\overline{BM} \cong \overline{MC} \cong \overline{AM}$. Demostremos que el ángulo A es recto.

Como $\overline{BM} \cong \overline{AM}$, $A\overset{\Delta}{M}B$ es isósceles y por lo tanto: $\beta = \alpha_1$.

Como $\overline{MC} \cong \overline{AM}$, $A\overset{\Delta}{M}C$ es isósceles y por lo tanto: $\alpha_2 = \gamma$.

Luego: $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta + \gamma = 180 - m(\hat{A})$. Pero $m(\hat{A}) = \alpha_1 + \alpha_2$.

Por tanto: $m(\hat{A}) = 180 - m(\hat{A})$.

$\therefore 2m(A) = 180^\circ$ y $m(\hat{A}) = 90^\circ$.

TEOREMA 41. Relación 30°-60°-90° en un triángulo rectángulo.

Un triángulo rectángulo tiene un ángulo con medida 60° (respectivamente 30°) sí y sólo si uno de los catetos es igual a la mitad de la hipotenusa.

Demostración

Sea $A\overset{\Delta}{B}C$ con $C\hat{A}B$ recto y $m(A\hat{C}B) = 60^\circ$. Ver figura 109.

Designemos por *M* el punto medio de la hipotenusa *BC* y determinemos la mediana $\overline{AM}$, luego $\overline{AM} \cong \overline{MC}$ por el corolario del teorema de la Paralela Media y en el triángulo isósceles *ABC*, $m(M\hat{A}C) = m(A\hat{C}B) = 60^\circ$.

Luego por la suma de los ángulos interiores en el ΔAMC, se tiene que $m(A\hat{M}C) = 60^\circ$, esto equivale a afirmar que este triángulo es equilátero y en consecuencia $\overline{AM} = MC = AC$, concluyéndose que $AC = \frac{1}{2}BC$.

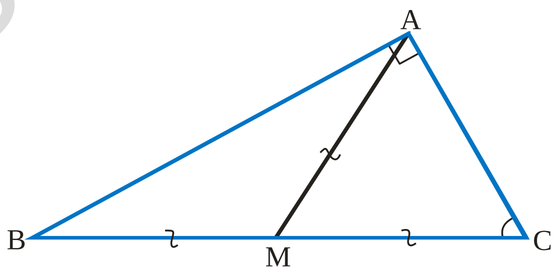

Figura 109.