Sección 3.2

19. $x^3 y^{(3)} - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$ con el pvi

$$y(1) = 6$$
$$y'(1) = 14$$
$$y''(1) = 22$$

en donde sabemos que $y_1 = x$; $y_2 = x^2$; $y_3 = x^3$
son soluciones LI de la ecuación homogenea

$$y(x) = Ax + Bx^2 + Cx^3$$

pero tenemos que el pvi

$$y(1) = 6$$
$$y'(1) = 14$$
$$y''(1) = 22$$

$$\Rightarrow y(x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 \rightarrow A + B + C = 6$$
$$y'(x) = A + 2Bx + 3Cx^2 \rightarrow A + 2B + 3C = 14$$
$$y''(x) = 2B + 6Cx \rightarrow 2B + 6C = 22$$

$$\Rightarrow \quad A = 1, \quad B = 2, \quad C = 3$$

Solución particular a la EDO de euler de grado tres homogenea es: $y(x) = x + 2x^2 + 3x^3$

23.

$$y'' - 2y' - 3y = 6$$

La solución general de una edo de orden superior no homogenea $y'' - 2y' - 3y = 6$ es

$$y(x) \quad \underbrace{y_c(x)}_{\text{es la solucion general de la edo homogenea asociada}} + \underbrace{y_p(x)}_{\text{una solucion particular de la edo de orden superior no homogenea}}$$

$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - 2$ necesitamos que esta solución general satisfaga el pvi

$$y(0) = 3$$
$$y'(0) = 11$$

$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - 2 \rightarrow y(0) = 3 \rightarrow c_1 + c_2 - 2 = 3$

$y'(x) = -c_1 e^{-x} + 3c_2 e^{3x} \rightarrow y'(0) = 11 \rightarrow -c_1 + 3c_2 = 11$

$$
\begin{aligned}
c_1 + c_2 &= 5 \\
-c_1 + 3c_2 &= 11 \\
\hline
4c_2 &= 16 \\
c_2 &= 4
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ reemplazo en primera ecuación

$c_1 + 4 = 5$

$c_1 = 1$

$\Rightarrow$ La solución general al PVI de la ecuación NO homogenea

$y'' - 2y' - 3y = 6$ es $y(x) = e^{-x} + 4e^{3x} - 2$

31.

a. $y'' + py' + qy = 0$ (1)

admitirá una solución $y = y(x)$ en un intervalo I, si tenemos el PVI en el punto $x = a \in I$; entonces (1) puede analizarse como una ecuación que satisface para $\forall x \in I$:

$$y''(x) + py'(x)\, qy(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

Si $x = a \in I$: $y''(a) + py'(a) + qy(a) = 0$ (2)

Sin embargo esta ecuación relaciona las tres cantidades $y(a)$, $y'(a)$ y $y''(a)$ pues p, q son coeficientes constantes

$\rightarrow$ de las tres cantidades $y(a)$, $y'(a)$ y $y''(a)$ la ecuación (2) asegura que $y''(a)$ se expresa en términos de las otras dos

$$y''(a) = -py'(a) - qy(a)$$

b. $y'' - 2y' - 5y = 0$ suponiendo que esta solución existe $y(x)$ que satisface

$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ y $y''(0) = c$

$\rightarrow$ en $x = 0$ $y(0)$ debe cumplir lo requerido por la ec:

$$
\begin{aligned}
y''(0) - 2y'(0) - 5y(0) &= 0 \\
y''(0) &= 2y'(0) + 5y(0) \\
c &= 2(0) + 5(1) = 5
\end{aligned}
$$

Entonces el PVI $y(0) = 1$

$y'(0) = 0$

$y''(0) = c$

Solo se podrá satisfacer por la solución $y(x)$ si y solo si $c = 5$

36. Sea $y_1(x)$ una solución conocida de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, que significa que $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$ (A)

Ahora suponemos que la segunda solución a la ecuación diferencial tiene la forma $y_2 = v(x)y_1$ donde $v(x) \neq$ constante ya que y_1 y y_2 se asumen L.I.

reemplazando: $y_2 = v(x)y_1$

$$y_2' = v'(x)y_1 + v(x)y_1'$$

$$y_2'' = v''y_1 + v'y_1' + v'y_1' + vy_1'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$$

en la ecuación $y'' + p(x) + q(x)y = 0$, encontramos

$$(v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'') + p(x)(v'y_1 + vy_1') + q(x)(vy_1) = 0$$

$$v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' + p(x)v'y_1 + p(x)vy_1' + q(x)vy_1 = 0$$

reagrupamos algunos terminos

$$v''y_1 + 2v'y_1' + p(x)v'y_1 + vy_1'' + p(x)vy_1' + q(x)vy_1 = 0$$

$$v''y_1 + 2v'y_1' + p(x)v'y_1 + v\underbrace{(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)}_{\text{cero debido a (A)}} = 0$$

Entonces $v''y_1 + 2v'y_1' + p(x)v'y_1 = 0$

ahora bien, ya que $y_1(x) \neq 0$ dividimos cada termino por y_1

$$v'' + \frac{2y_1'}{y_1}v' + p(x)v' = 0$$

$$v'' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p(x)\right)v' = 0 \quad (B)$$

tenemos una ecuación diferencial que permite encontrar $v(x)$ puesto que las funciones y_1 y $p(x)$ son conocidas, y haciendo el cambio de variable $v'(x) = u(x)$ tenemos que $v'' = u'(x)$ por lo cual (B) queda:

$$u'(x) + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p(x)\right)u(x) = 0$$

Siendo una ecuación de variables separables para la variable $v(x)$

$$\frac{dv}{dx} = -\left(\frac{2y_1'}{y_1} + p(x)\right)v$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int -\left(\frac{2y_1'}{y_1} + p(x)\right)dx$$

$$\ln v = -2\ln y_1 - \int p(x)\,dx$$

$$v = e^{-2\ln y_1 - \int p(x)dx} = e^{\ln y_1^{-2}} \cdot e^{-\int p(x)\,dx}$$

$$v(x) = y_1^{-2} e^{-\int p(x)dx}$$

$$v(x) = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}$$; podemos determinar que

$$v(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} \quad c$$

determinamos que si conocemos una solución y_1 de la ecuación diferencial de segundo orden $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

Así que la segunda solución será

$$y_2(x) = y_1(x)v(x)$$ donde $v(x)$ es dada por c

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,dx}$$

42.

$(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ sabiendo que $y_1(x) = x$ es solución en $(-1,1)$

$$y'' + \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{2}{1-x^2}y = 0$$

Ahora suponiendo que $y_2(x) = v(x)y_1(x) = v(x)\cdot x$ será la segunda solución LI $(v(x) \neq c)$: $y_2'(x) = v'(x)\cdot x + v(x)\cdot 1$

$$y''(x)\cdot x + v'(x)\cdot 1 + v'(x) = v''(x)x + 2v'(x)$$

$$\rightarrow y_2''(x) + \frac{2x}{1-x^2}y_2'(x) = 0$$

$$(v''(x)\cdot x + 2v'(x)) + \frac{2x}{1-x^2}(v'(x)\cdot x + v(x)) - \frac{2}{1-x^2}v(x)\cdot x$$

$$(v''(x)\cdot x + 2v'(x)) + \frac{2x}{1-x^2}(v'(x)\cdot x + v(x)) - \frac{2}{1-x^2}v(x)\cdot x = 0$$

$$xv''(x) + 2v'(x) + \frac{2x^2}{1-x^2}v'(x) + \cancel{\frac{2x\,v(x)}{1-x^2}} - \cancel{\frac{2x\,v(x)}{1-x^2}} = 0$$

$$xv''(x) + \left(2 + \frac{2x^2}{1-x^2}\right)v'(x) = 0$$

$$v''(x) + \left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{1-x^2}\right)v'(x) = 0$$

Ahora hacemos cambio de variable $u(x) = v'(x) \to u'(x) = v''(x)$
y reemplazando esto en la ecuación anterior

$$\frac{du}{dx} + \left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{1-x^2}\right)u = 0$$

$$\frac{du}{dx} = -\left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{1-x^2}\right)u$$

$$\frac{du}{u} = -\left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{1-x^2}\right)dx$$

$$\int \frac{du}{u} = \int -\left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{1-x^2}\right)dx$$

$\ln u = -2\ln|x| + \ln|1-x^2|$

$\ln u = \ln|x|^{-2} + \ln|1-x^2| = \ln|x^{-2}(1-x^2)|$ y como $-1 < x < 1$

$\ln u = \ln(x^{-2}(1-x^2))$

$e^{\ln u} = e^{\ln(x^{-2}(1-x^2))} \to u(x) = x^{-2}(1-x^2) = x^{-2}-1$

pero $v'(x) = x^{-2}-1$

$v(x) = \int x^{-2} - 1\,dx$

$v(x) = -x^{-1} - x$

$\to y_2(x) = v(x)\cdot x = (-x^{-1} - x)\cdot x = -1 - x^2$

$y_2(x) = -(1 + x^2)$

Por lo cual la solución general

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

$$y(x) = c_1 x + c_2(-(1+x^2))$$

$$y(x) = c_1 x + c_2(1+x^2)$$