Mit Tandem-Graphen funktionales Denken fördern

Mathe für alle 2018

Michael Marxer

Pädagogische Hochschule Freiburg

Überblick

- Was stellen sich Schüler unter einer Funktion vor?
- Wie kann ich verständlich machen, was an einer Funktion „anders“ ist?
- Wie lässt sich vermitteln, was Funktionen leisten?

Vorstellungen

Frage: Was ist eigentlich eine „Funktion"?

- Antwort in der 8. Klasse:

  „Also, eine Funktion ist zum Beispiel: $y = 3x + 1$"

- Antwort in der 9. Klasse:

  „Also, eine Funktion ist zum Beispiel: $y = x^2 - 2$"

- Antwort eines Abiturienten:

  „Also eine Funktion ist zum Beispiel: $f(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$"

Vorstellungen

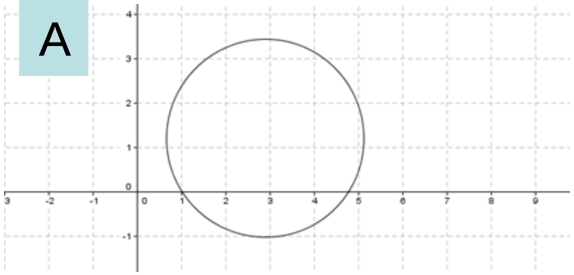
- Antwort eines Lehramtsstudenten im Staatsexamen:

  „Eine Funktion ist eine linkstotale und rechtseindeutige Relation.“

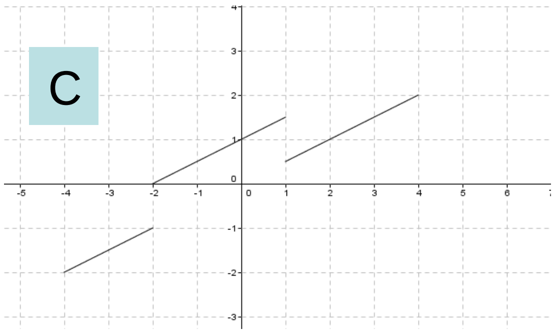
In welchen Fällen handelt es sich um den Graphen einer Funktion?

Welche Antworten auf diese Frage erwarten Sie in einer 9.Klasse?

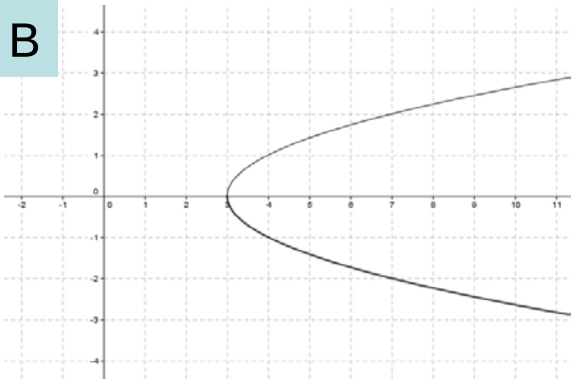
A



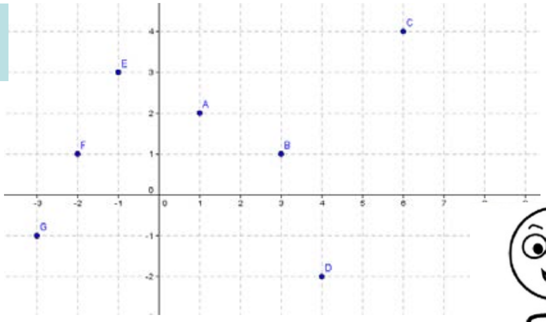
C

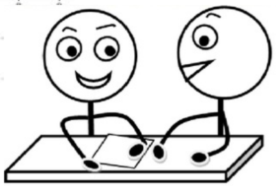


B



D

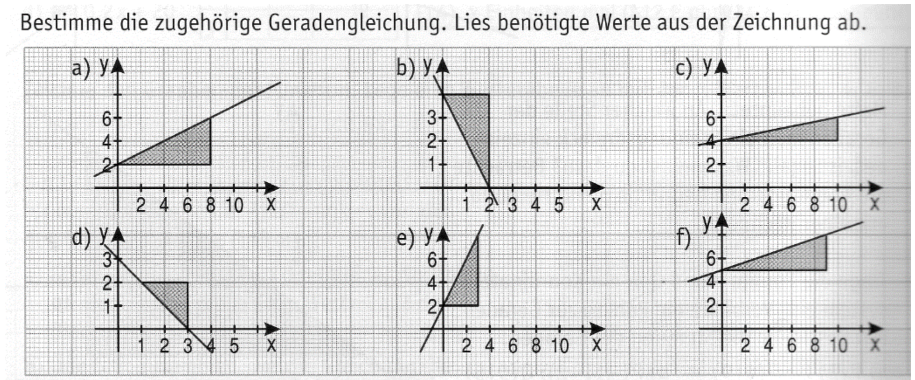




2 Minuten

Viele Schüler sehen im Funktionsgraphen nicht die Darstellung einer Zuordnung, sondern ein geometrisches Objekt.

Beispiel: Schulbuch aus Baden-Württemberg Kl. 7

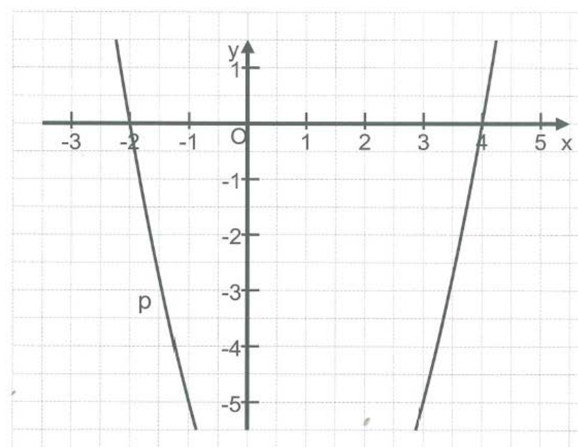

Bestimme die zugehörige Geradengleichung. Lies benötigte Werte aus der Zeichnung ab.

Beispiel: Realschul-Abschlussprüfung Kl. 10, Baden-Württemberg 2014

Das Schaubild zeigt den Ausschnitt einer verschobenen Normalparabel p.

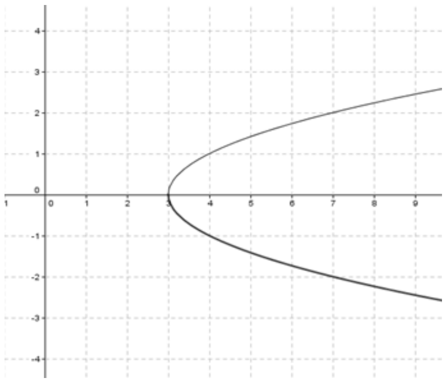
Eine Gerade g geht durch den Punkt R(2,5|-4) und hat die Steigung m = -2.

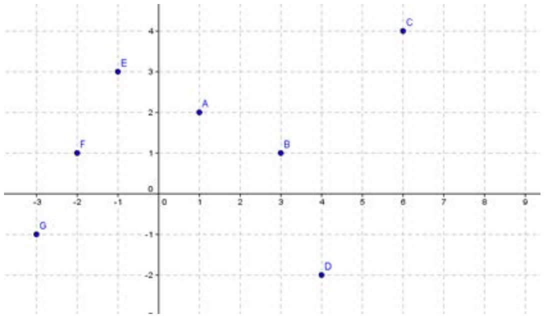
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von p und g.



Wie wird der Graph einer Funktion gesehen?

- Als *Objekt* mit einer charakteristischen Form (Gerade, Parabel, Hyperbel),
- oder als *Punktmenge*, die Zuordnungen ausdrückt?





Unsere Schüler können mit Funktionen umgehen, aber sie wissen nicht, was eine Funktion leistet.

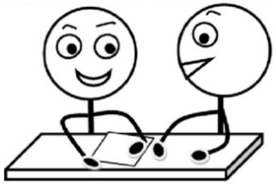
Worauf können wir in der Sekundarstufe aufbauen?
Was ändert sich im Verständnis?

Worin unterscheiden sich die folgenden drei Gleichungen?

(1) $17 + \Delta = 21$

(2) $\heartsuit \cdot (\Delta + \square) = \heartsuit \cdot \Delta + \heartsuit \cdot \square$

(3) $17 + \Delta = \square$



2 Minuten

Worin unterscheiden sich die folgenden drei Gleichungen?

Variable als ...

(1) $17 + \Delta = 21$

(2) $\heartsuit \cdot (\Delta + \square) = \heartsuit \cdot \Delta + \heartsuit \cdot \square$

(3) $17 + \Delta = \square$

Worin unterscheiden sich die folgenden drei Gleichungen?

Variable als ...

(1) $17 + \Delta = 21$

Unbekannte
(Zahl existiert, wurde aber noch nicht gefunden)

(2) $\heartsuit \cdot (\Delta + \square) = \heartsuit \cdot \Delta + \heartsuit \cdot \square$

(3) $17 + \Delta = \square$

Worin unterscheiden sich die folgenden drei Gleichungen?

Variable als ...

(1) $17 + \Delta = 21$

Unbekannte
(Zahl existiert, wurde aber noch nicht gefunden)

(2) $\heartsuit \cdot (\Delta + \square) = \heartsuit \cdot \Delta + \heartsuit \cdot \square$

allgemeine Zahl
(nicht der Wert interessiert, sondern die Gesetzmäßigkeit)

(3) $17 + \Delta = \square$

Worin unterscheiden sich die folgenden drei Gleichungen?

Variable als ...

(1) $17 + \Delta = 21$

Unbekannte
(Zahl existiert, wurde aber noch nicht gefunden)

(2) $♥ \cdot (\Delta + \square) = ♥ \cdot \Delta + ♥ \cdot \square$

allgemeine Zahl
(nicht der Wert interessiert, sondern die Gesetzmäßigkeit)

(3) $17 + \Delta = \square$

Veränderliche
(funktionale Abhängigkeit zwischen den Variablen)

Wie erkennen Schüler, dass es um

Beziehungen

zwischen zwei Größen geht?

Funktionale Beziehungen sind auch in der Grundschule schon Thema

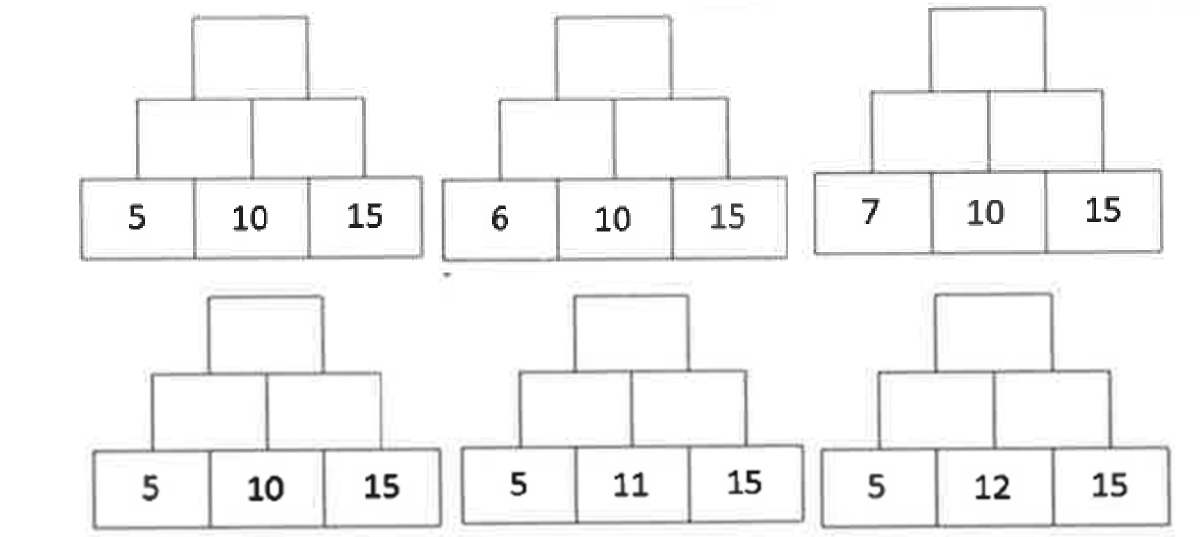
„Was bringen meine Schüler aus der Grundschule mit?“

Strukturierte Päckchen

17 + 5 =	17 + 5 =	17 + 5 =
17 + 7 =	18 + 7 =	15 + 7 =
17 + 9 =	19 + 9 =	13 + 9 =
17 + 11 =	20 + 11 =	11 + 11 =
....	....	....

„Wenn…, dann…“

Funktionale Beziehungen in der Grundschule



Vergleiche die obere und die untere Reihe der Zahlenmauern miteinander.
Welche Unterschiede fallen dir auf?

„Wenn… ‚dann…“

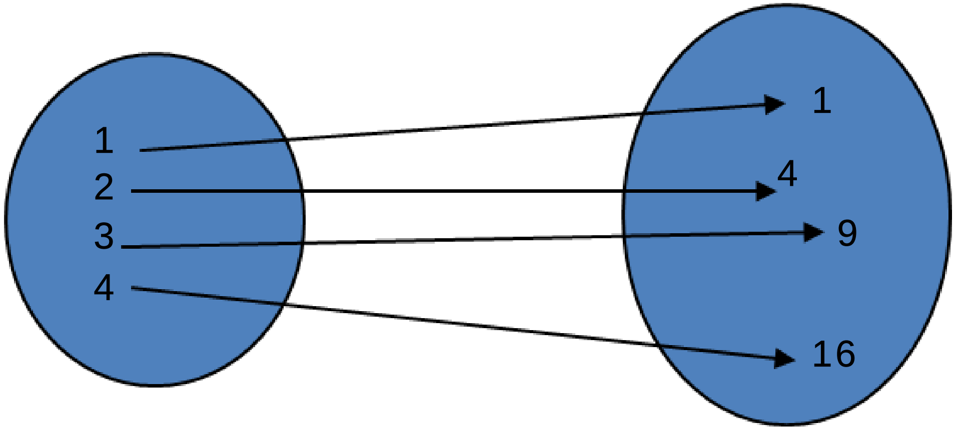
Darstellung von *Beziehungen*

mit einer Tabelle (bereits in der Primarstufe vertraut)

Menge [kg]	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Preis [€]	3	6	9	12	15	18

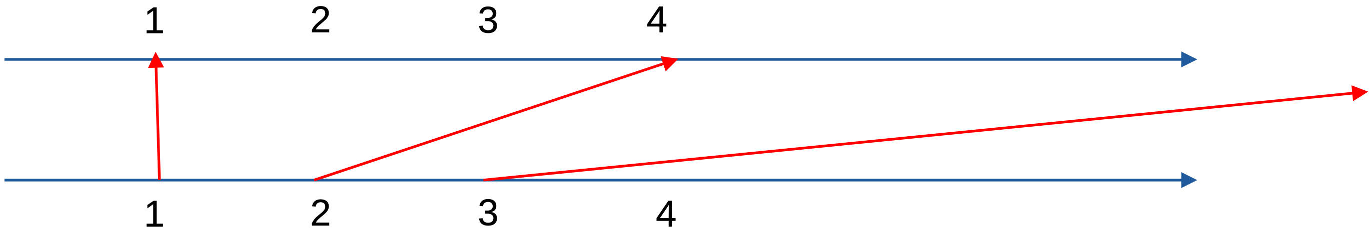
Darstellung von *Beziehungen*

mit einem Pfeilbild



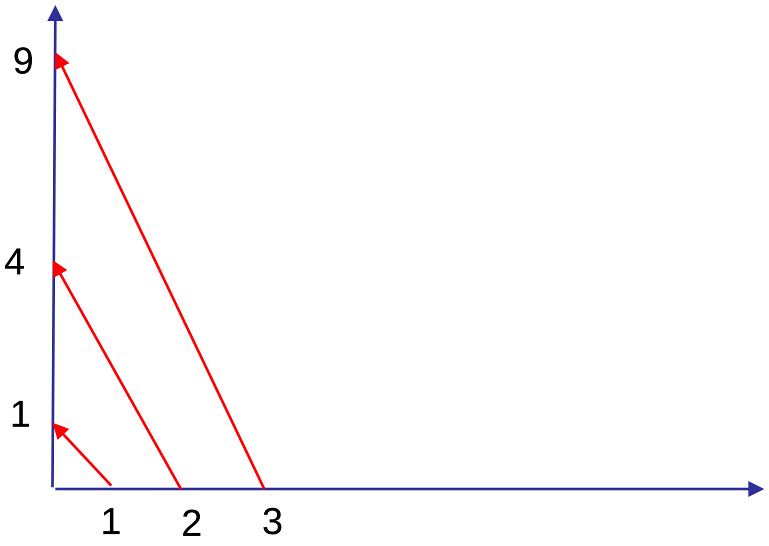
Darstellung von *Beziehungen*

Oder so: mit einem Paar von Zahlenstrahlen

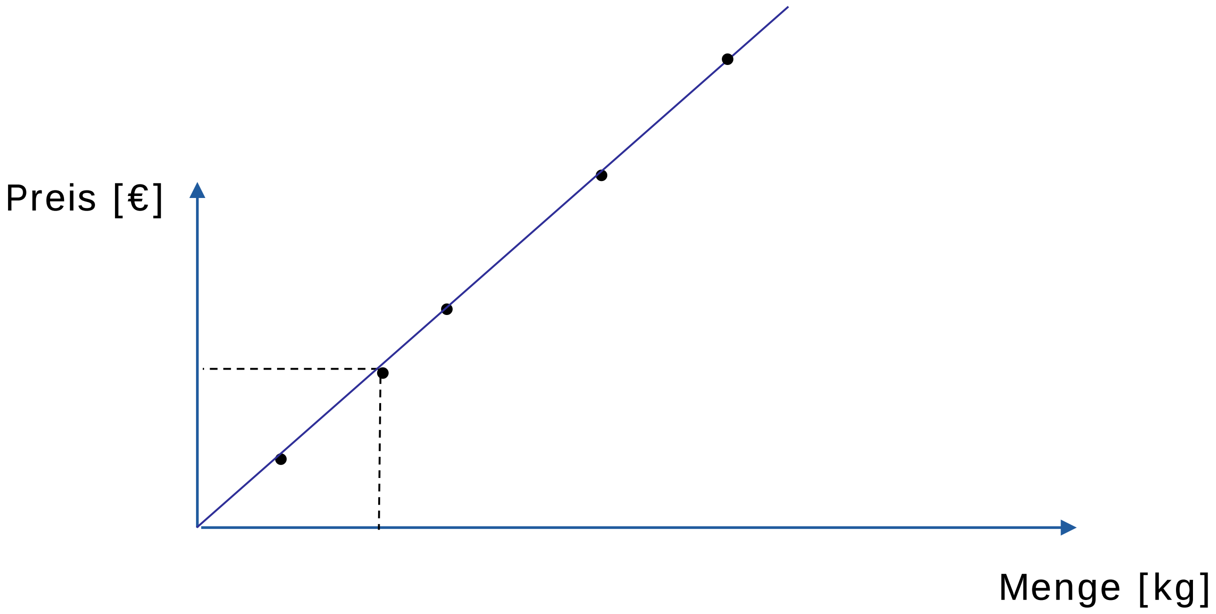


Darstellung von *Beziehungen*

Oder so ?



Darstellung von *Beziehungen* mit einem Punkt!



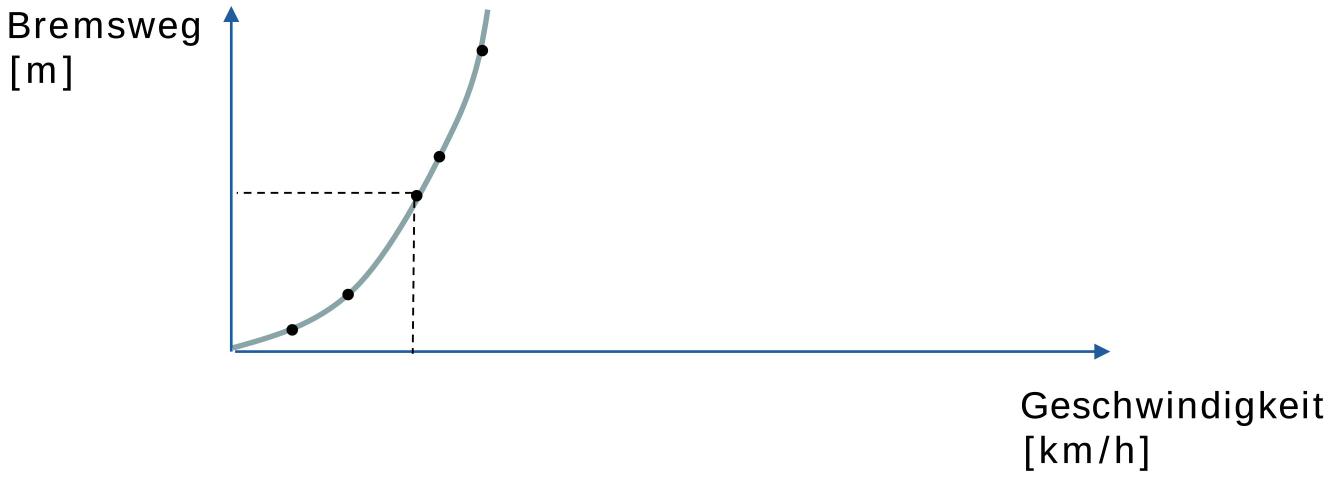
Über die Betrachtung mehrerer Punkte lässt sich (manchmal) eine Regelhaftigkeit der Beziehung erkennen

Gibt es einen Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Länge des Bremswegs?
Und wenn ja, wie kann man den Zusammenhang beschreiben?

Geschwindigkeit [m/sec]	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**
Bremsweg [m]	1	4	9	16	25	36

Darstellung von *Beziehungen*

mit mehreren Punkten!



Über die Betrachtung mehrerer Punkte lässt sich (manchmal) eine Regelhaftigkeit der Beziehung erkennen → Änderungsverhalten

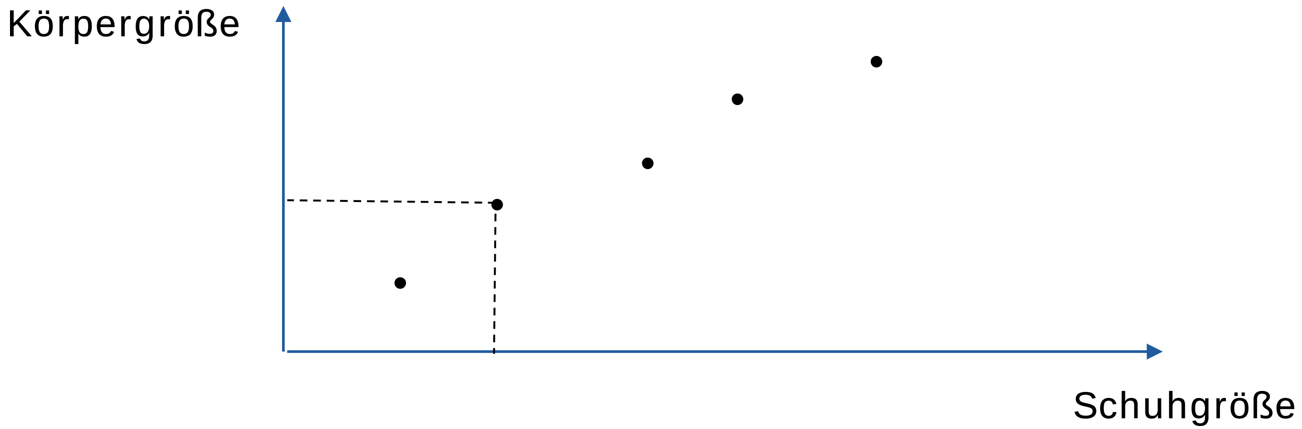
Gibt es einen Zusammenhang zwischen Schuhgröße und Körpergröße?
Und wenn ja, wie kann man den Zusammenhang beschreiben?

Schuhgröße	**37**	**39**	**41**	**43**	**45**
Körpergröße [cm]	160	170	178	188	195

Testreihe mit 5 Personen

Darstellung von *Beziehungen*

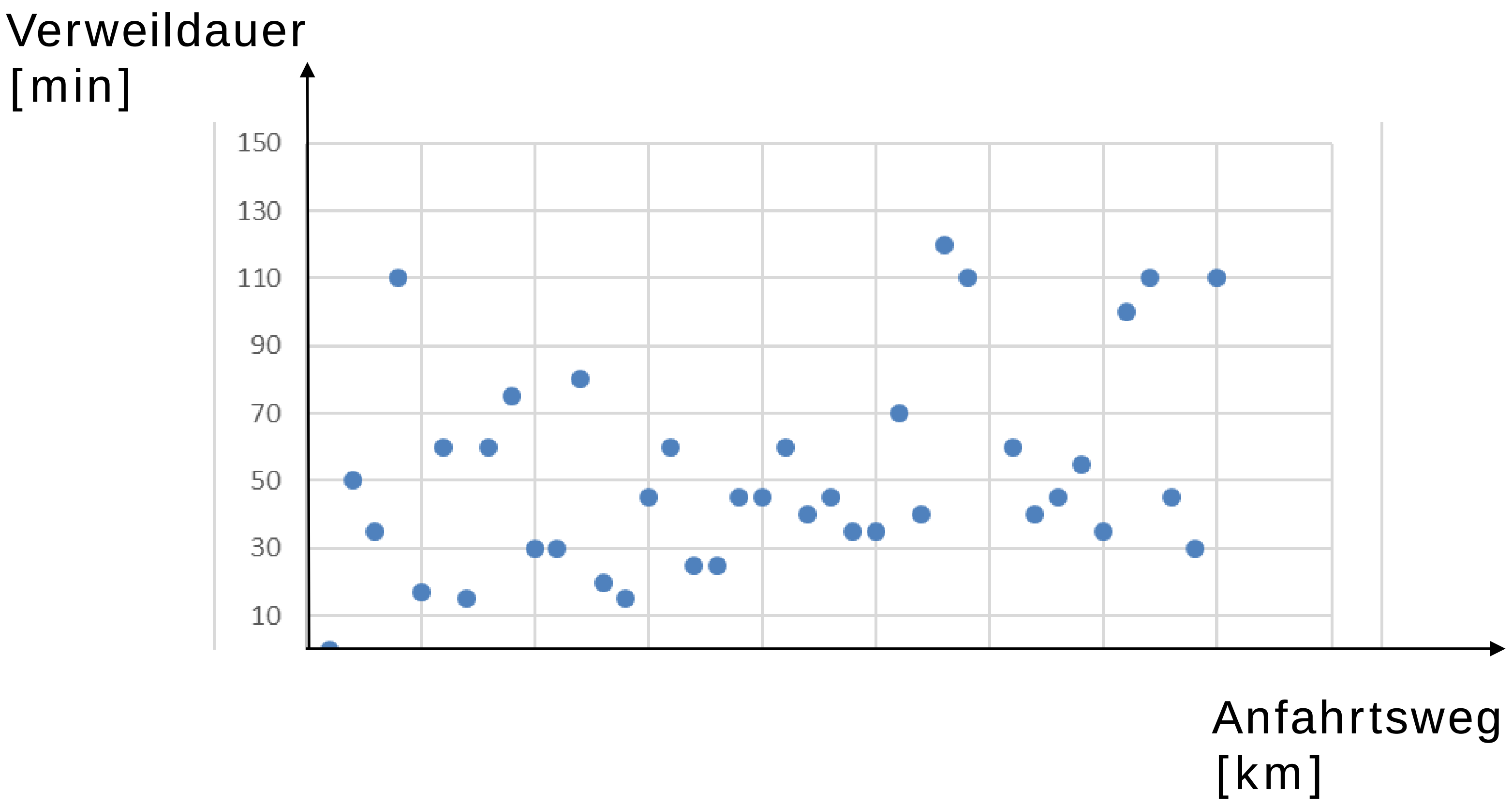
mit mehreren Punkten!



Gibt es bei folgender Beziehung einen Zusammenhang?

- Anfahrtsweg zum Möbelhaus → Verweildauer

Funktionale Beziehungen in der Sekundarstufe



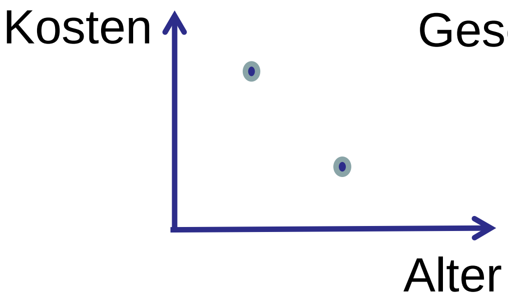
Von der diskreten zur kontinuierlichen Sichtweise:

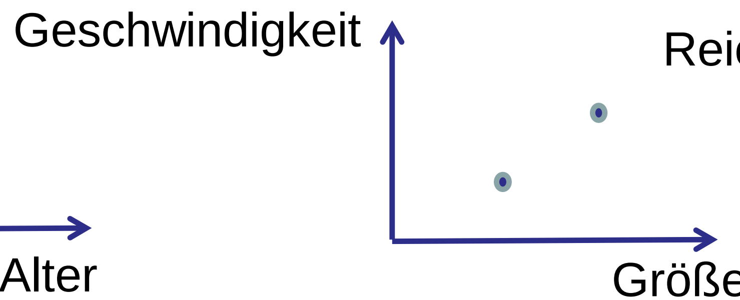
- Zuordnungen erzeugen Punktmengen.
- (Manchmal) ordnen sich diese Punkte in einer charakteristischen Weise an (auf einer Geraden, auf einer Parabel etc.).
- Unter dieser Voraussetzung kann die Zuordnung (ggf. Funktion) algebraisch beschrieben werden
- und können Zwischenpunkte nach bestimmten Regeln ergänzt werden.

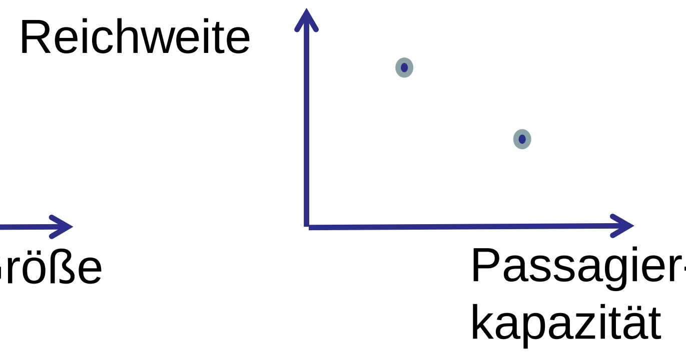
1. Schritt:

Funktionen auf den Punkt gebracht

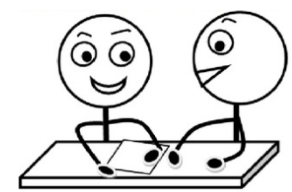
Die Graphen beschreiben zwei Flugzeugtypen A und B







Ordnen Sie jedem Punkt ein Flugzeug zu.



- Das ältere Flugzeug ist billiger.
- Das schnellere Flugzeug ist größer.
- Das größere Flugzeug ist älter.
- Das billigere Flugzeug transportiert weniger Passagiere.

5 Minuten

Swan, 1985 (übersetzt und leicht verändert)

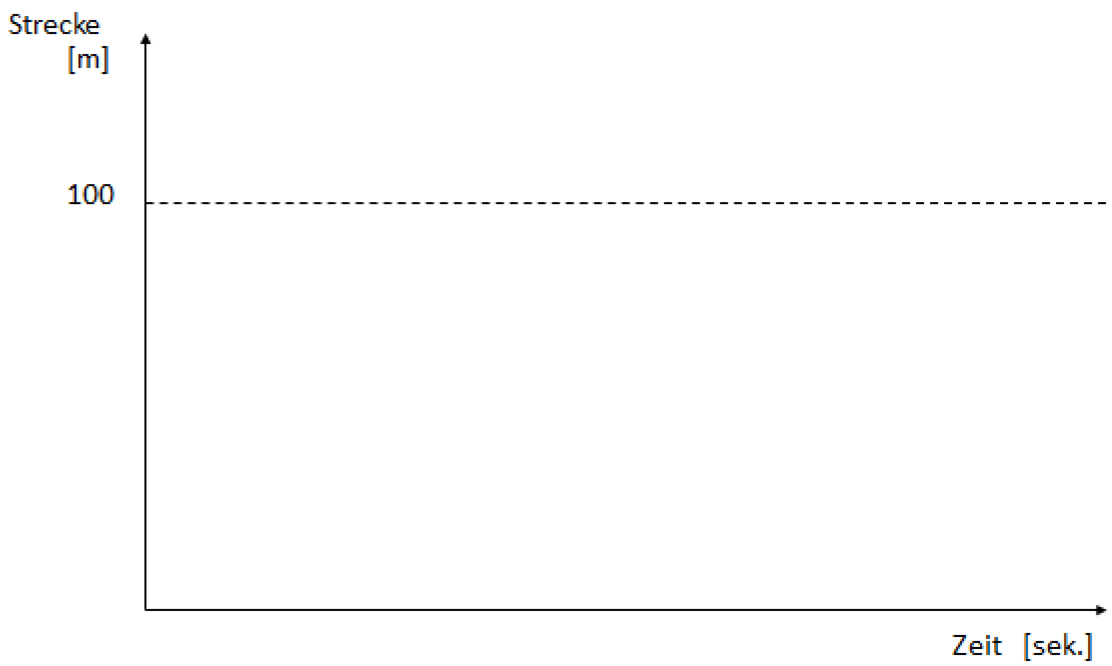
2. Schritt:

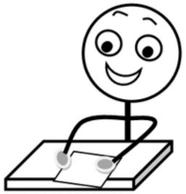
Schaubilder und Graphen ohne Skalierung

Aufgabe

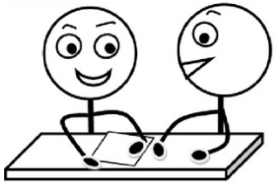
Bei einem 100 m – Sprint stürzt der Läufer auf halber Strecke und bleibt liegen, ein Sanitäter eilt hinzu.

Zeichne für *beide* die Graphen ins *gleiche* Koordinatensystem.





3 Minuten

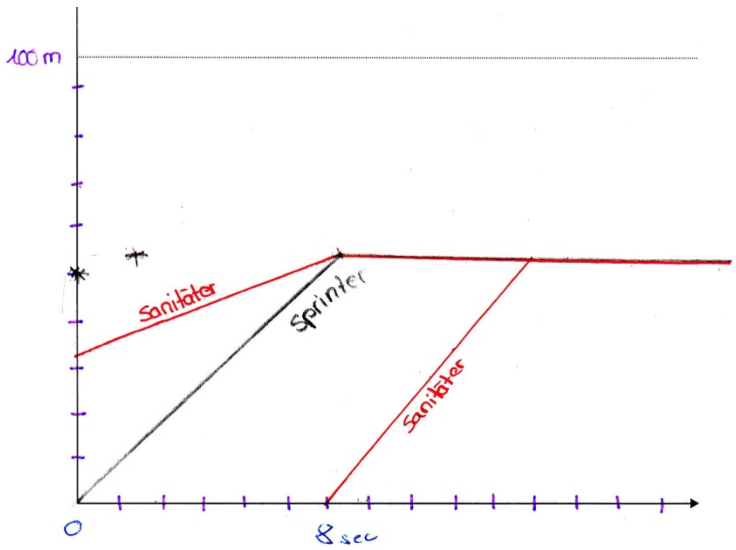


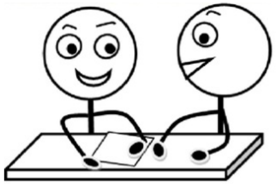
3 Minuten

Aufgabe

Bei einem 100 m – Sprint stürzt der Läufer auf halber Strecke und bleibt liegen, ein Sanitäter eilt hinzu.

Zeichne für *beide* die Graphen ins *gleiche* Koordinatensystem.





3 Minuten

3. Schritt:

Tandem-Graphen

Bei einer Achterbahnfahrt kommen neben dem Aufstieg eine „Schlucht“, ein „Looping“ und eine „Spirale abwärts“ vor.
Denke Dir aus, wie eine solche Fahrt verlaufen könnte.

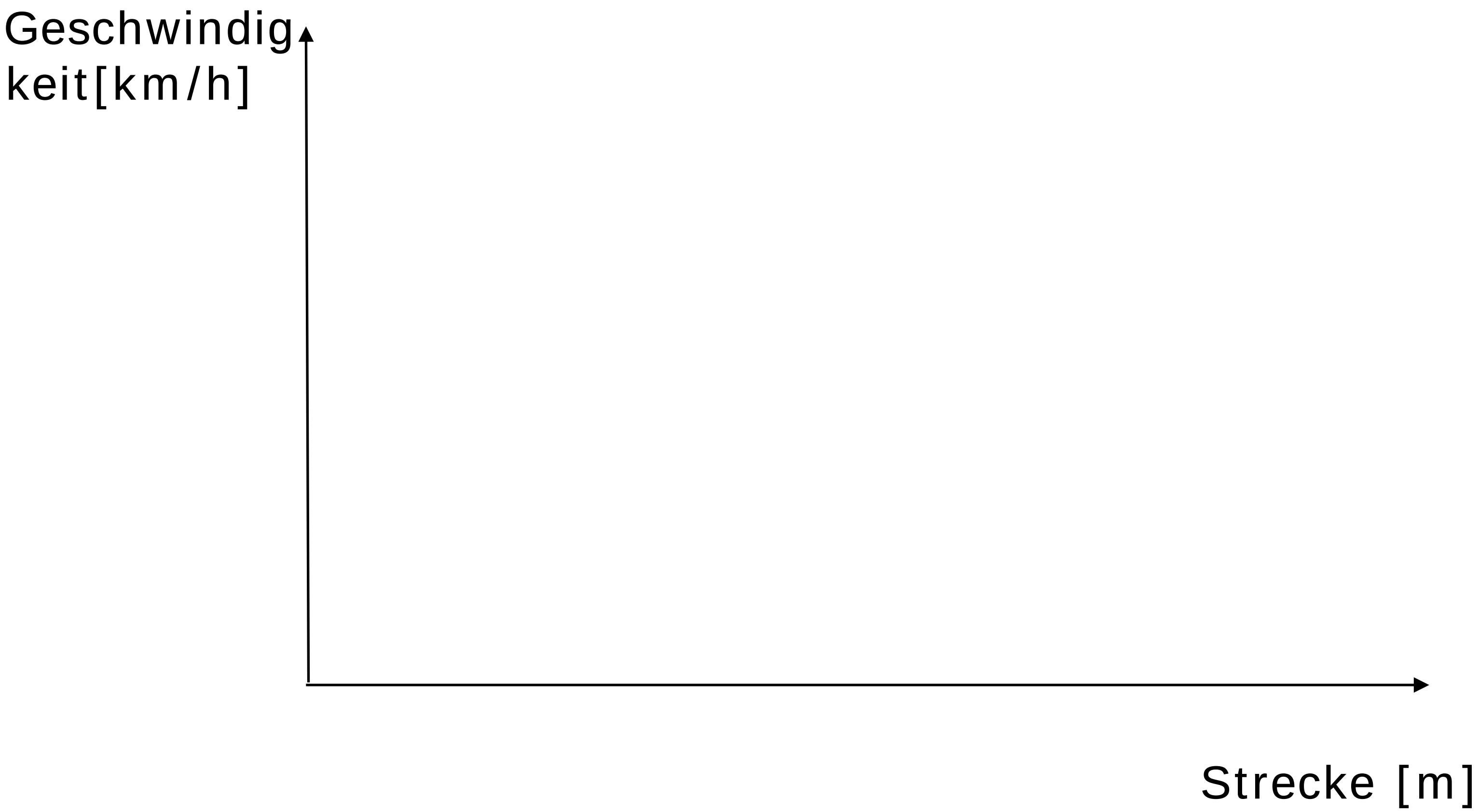
1. Funktion: gefahrene Strecke ab Start → Höhe über dem Startpunkt

Höhe über Startpunkt [m]

Strecke [m]

Bei einer Achterbahnfahrt kommen neben dem Aufstieg eine „Schlucht“, ein „Looping“ und eine „Spirale abwärts“ vor.
Denke Dir aus, wie eine solche Fahrt verlaufen könnte.

2. Funktion: gefahrene Strecke ab Start → Geschwindigkeit

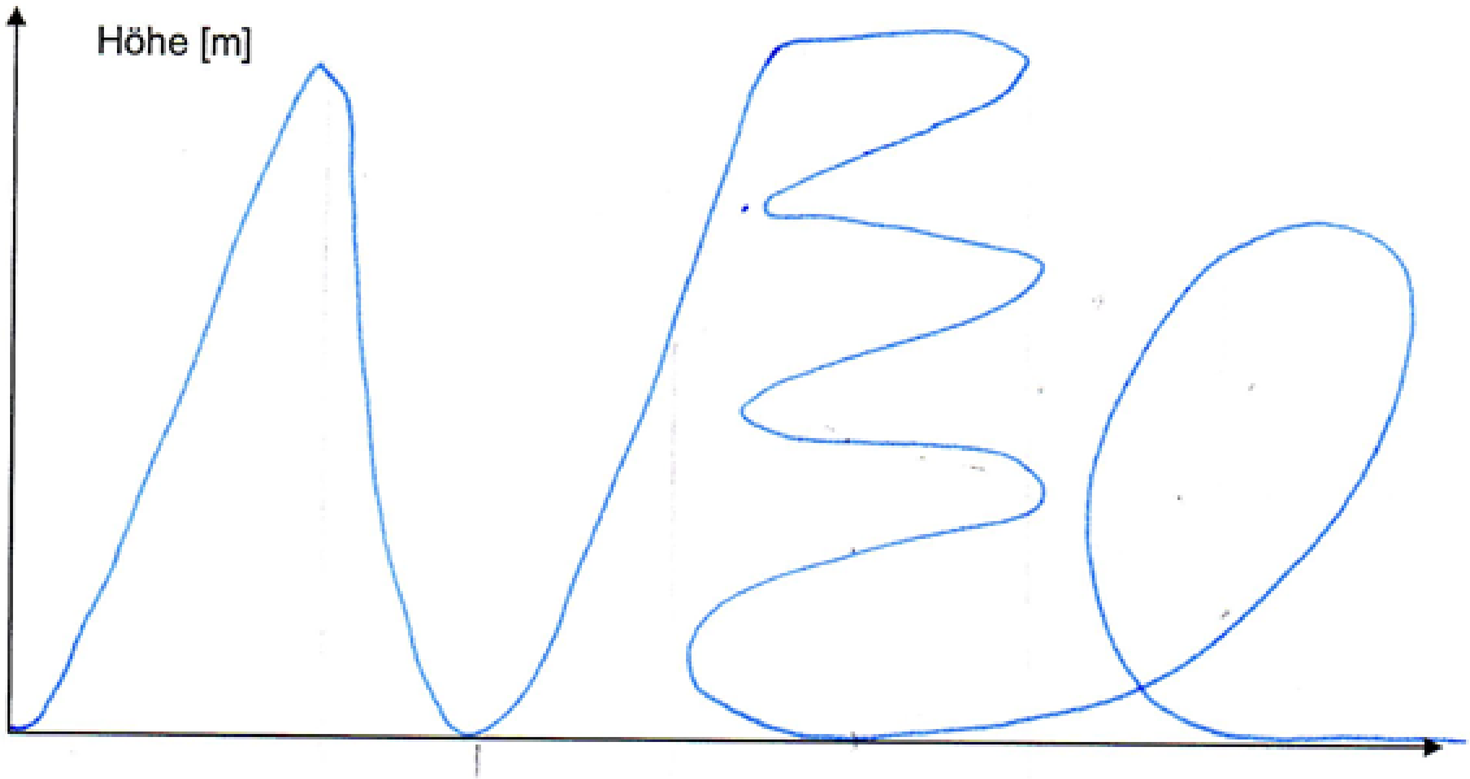


Schülerlösungen zur 1. Teilaufgabe

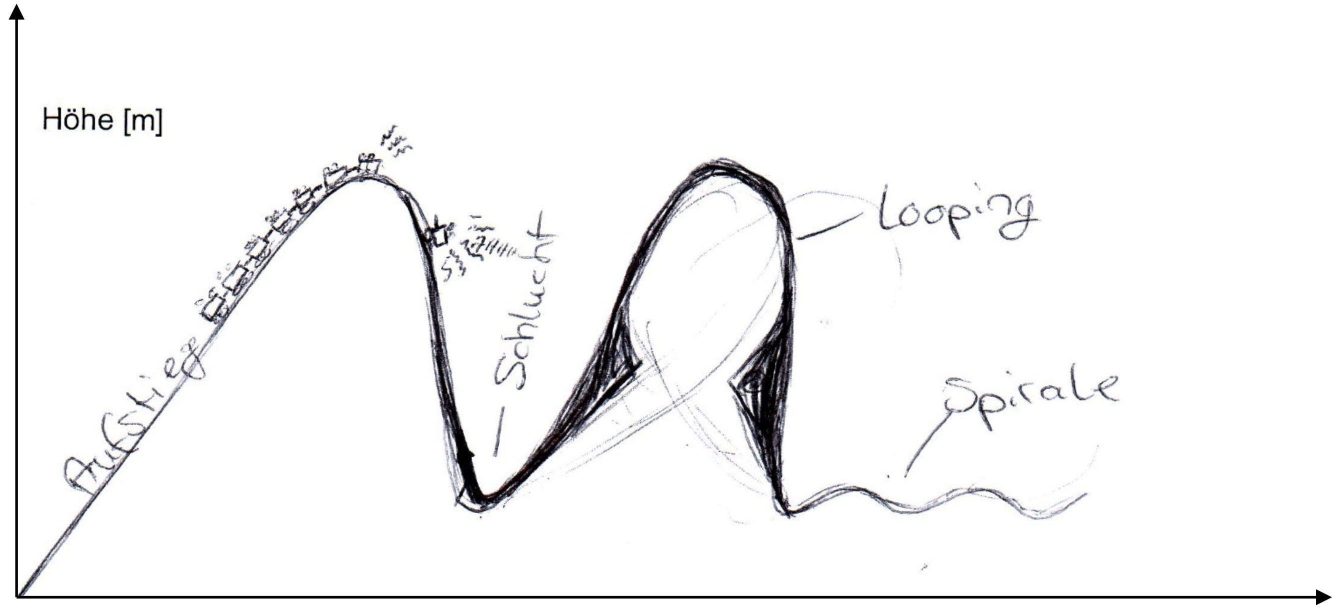
Strecke [m] → Höhe [m]

Lösung Lena

1. Funktion: Gefahrene Strecke → Höhenmeter



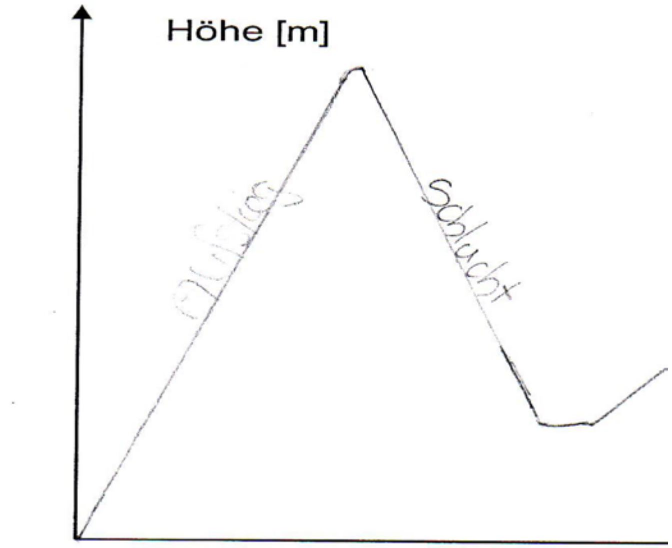
Lösung Ann-Kathrin



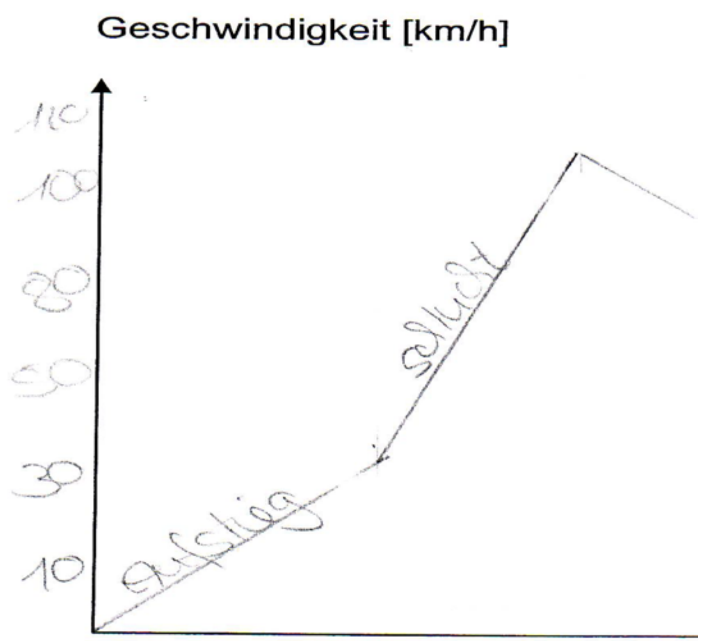
Schülerlösungen
zur 2. Teilaufgabe

Strecke [m] → Geschwindigkeit [km/h]

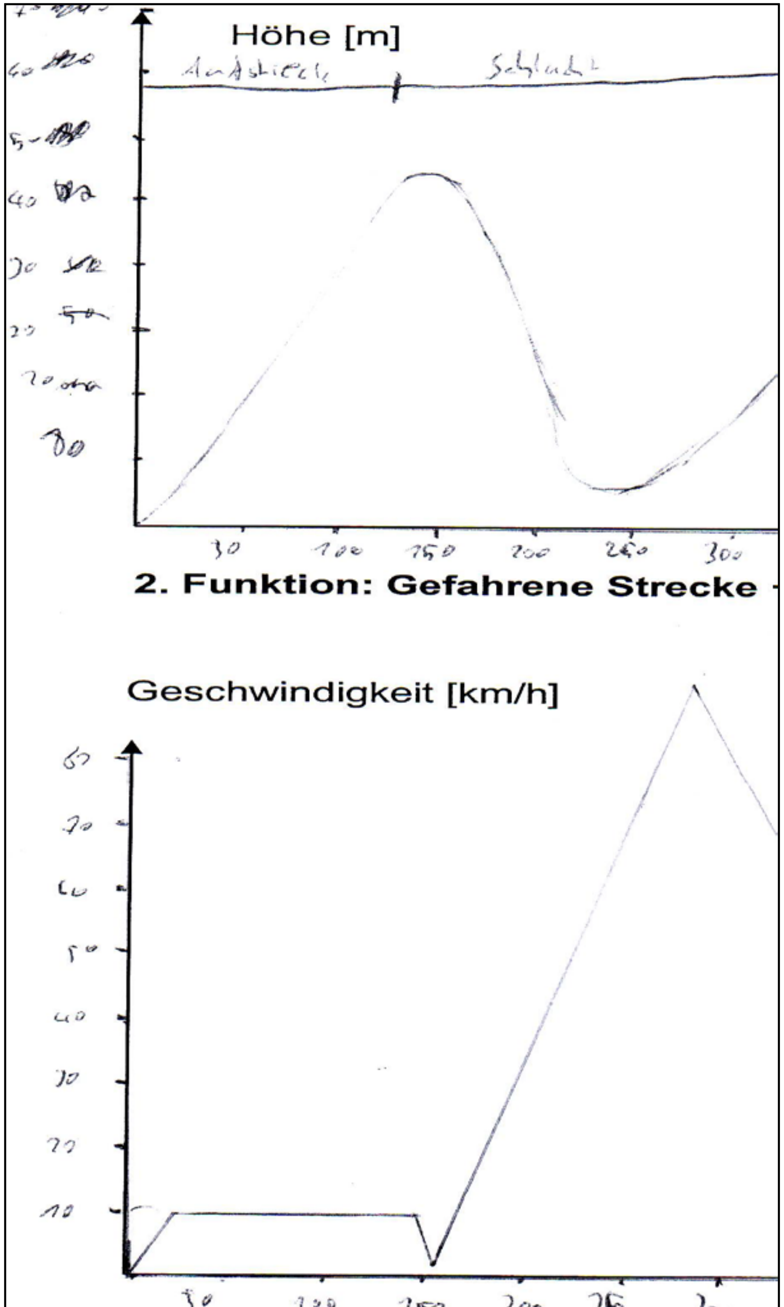
Lösung Marc



2. Funktion: Gefahrene Strecke



Lösung Svenja



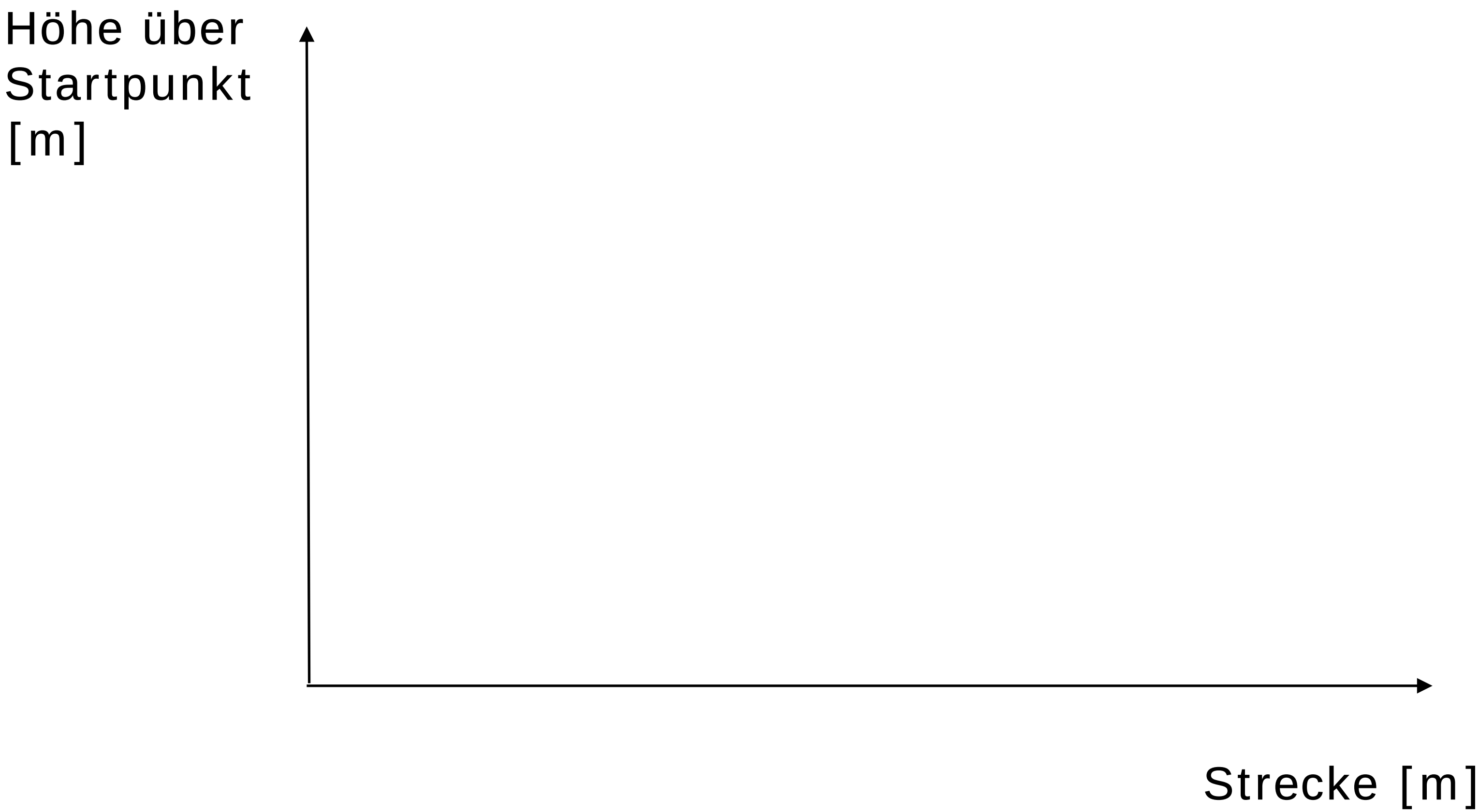
Sachsenpaule steigt in die Bahn. Die Bahn fährt langsam ~~noch~~ los. Nach kurzem ~~ka~~ Gerade fahren kommt die hohe Steigung. Nachdem die Schlucht und der Luping vorbei sind kommt noch eine kurze Steigung. Dann kommt das Highlight der Bahn die Spirale Abwärts. ~~Nach dem letzten~~ Nach der letzten Funktion der Achter bahn kommt ein kurze Ausfahrt. Sachsen paule steigt mit einem breiten Grinsen, das Zufriedenheit ausstrahlt, aus dem ~~ka~~ Wagen.

Tandem-Graphen

Herr Eisele duscht leidenschaftlich gern. Er besitzt eine Dusche mit Einhebelmi-scher, den er stets voll aufdreht. Da er morgens sehr früh aufstehen muss, variiert er während des Duschens mehrfach die Wassertemperatur, um fit für den Tag zu sein.

Denke Dir eine kurze Geschichte aus, wie eine morgendliche Dusche verlaufen könnte. Schreibe die Geschichte auf die Rückseite und zeichne dann die Funktionen.

Zeit [min] → Wassertemperatur [°C]



Zeit [min] → Kaltwasserdurchfluss [Liter/min]
Zeit [min] → Warmwasserdurchfluss [Liter/min]

Kaltwasser
(blau)
Warmwasser
(rot)
[l/m]

Zeit [min]

1. Funktion: Zeit → Wassertemperatur

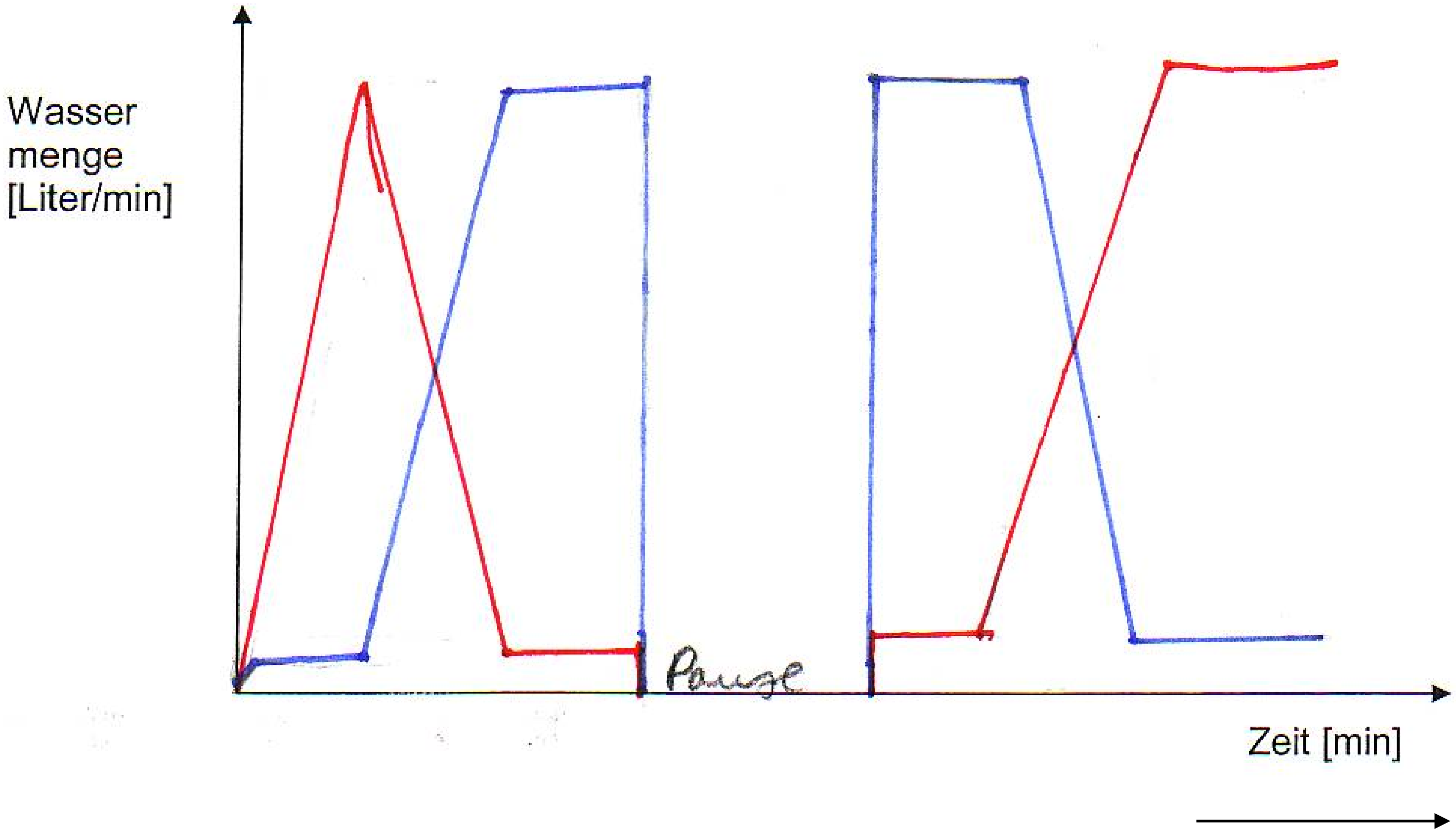
2. Funktion: Zeit → Kaltwassermenge pro Minute (blau)
3. Funktion: Zeit → Warmwassermenge pro Minute (rot)

Eine Schülerlösung zur Aufgabe „Dusche“:

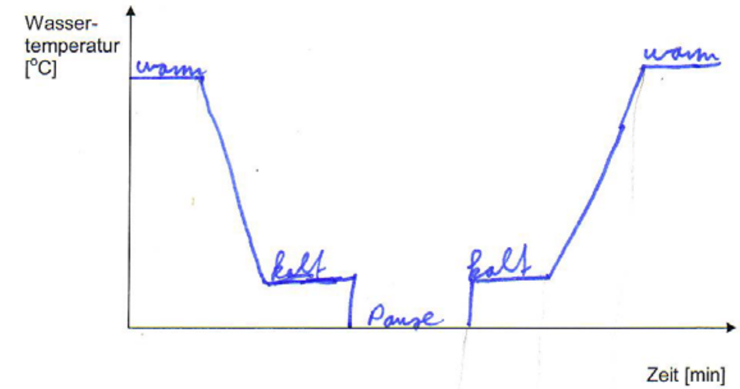
Herr Eisele geht unter die Dusche und macht das
Wasser an. Zuerst duscht er warm und anschliessend
etwas kälter. Dann macht eine Pause um sich einzuseifen.
Nun duscht er kalt und spült die Seife ab. Anschließend
duscht er wieder warm. Nun ist er bereit für den Tag.


Wasser-
temperatur
[°C]
warm
kalt
Pause
kalt
warm
Zeit [min]

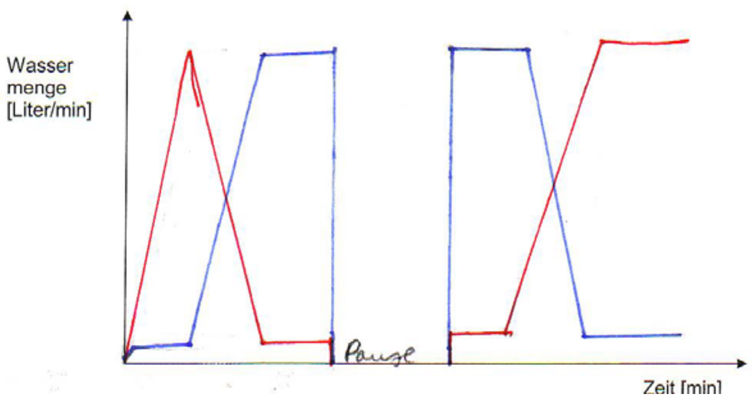
2. Funktion: Zeit → Kaltwassermenge pro Minute
3. Funktion: Zeit → Warmwassermenge pro Minute



1. Funktion: Zeit → Wassertemperatur



2. Funktion: Zeit → Kaltwassermenge pro Minute
3. Funktion: Zeit → Warmwassermenge pro Minute

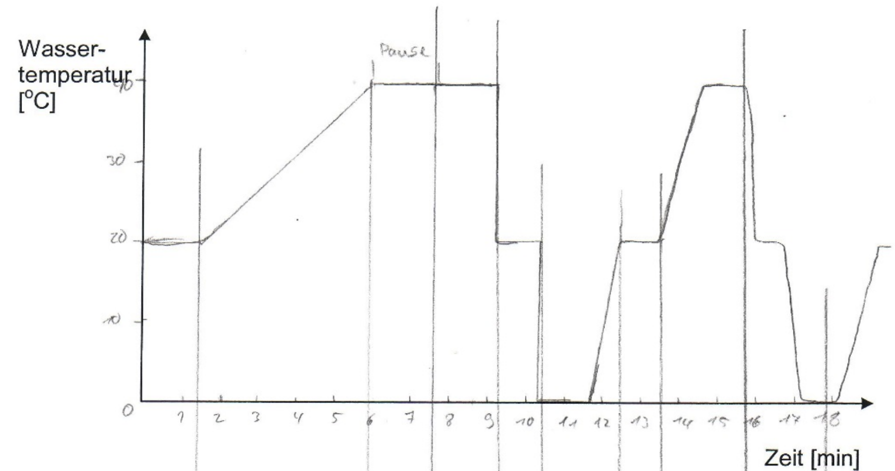


Patrick

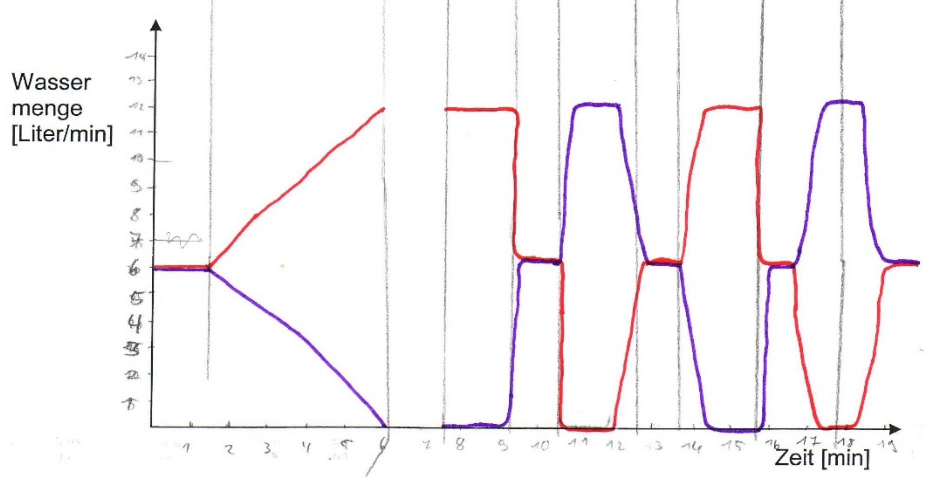
~~Er~~

Befor er in die Dusche geht, stellt er sie auf Lauwarm ein.
Dann zieht ersich aus. wenn er in der Dusche ist stellt er ~~sie~~ die Wärme immer wieder höher ein. Nach ~~einer~~ ca. 5 min hat er sie auf ganz heiß.
Dann macht er sie aus und Schäumt sich gut ein. Danach stellt er sie wieder ~~ein~~ an. Nun da er sauber ist und noch nicht ganz wach ist dreht er sie von einem schlag auf Lauwarm wartet kurz damit ersich darangewöhnen kan und stellt danach schnell auf kalt. Dann wieder Lauwarm → heiß → Laufwarm → kalt → lauwarm und fertig ist er

1. Funktion: Zeit → Wassertemperatur



2. Funktion: Zeit → Kaltwassermenge pro Minute
3. Funktion: Zeit → Warmwassermenge pro Minute



Vielen Dank !