Ekstremums- og vendepunkter for polynomier og pæne differentiable funktioner.

Bemærkning.

I dette skrift betragtes alene reelle funktioner som er defineret på intervaller (helåbne eller halvåbne) medmindre andet er eksplicit formuleret. Differentiabilitet i et intervalendepunkt forstås som differentiabilitet fra enten højre eller venstre.

Motivation.

Det er formentlig en flere århundrede gammel og universelt velkendt sætning, at der findes en hvis og kun hvis betingelse for ekstremumspunkter for polynomier. Med maksimumspunkter kan den formuleres således:

Et polynomium har et maksimumspunkt i x_0 hvis og kun hvis der findes et $\delta > 0$ således at

$x \in]x_0 - \delta, x_0[\Rightarrow f'(x) > 0$ og $x \in]x_0, x_0 + \delta[\Rightarrow f'(x) < 0$

Af betingelsen følger at $f'(x_0) = 0$ da $f'(x)$ er kontinuert.

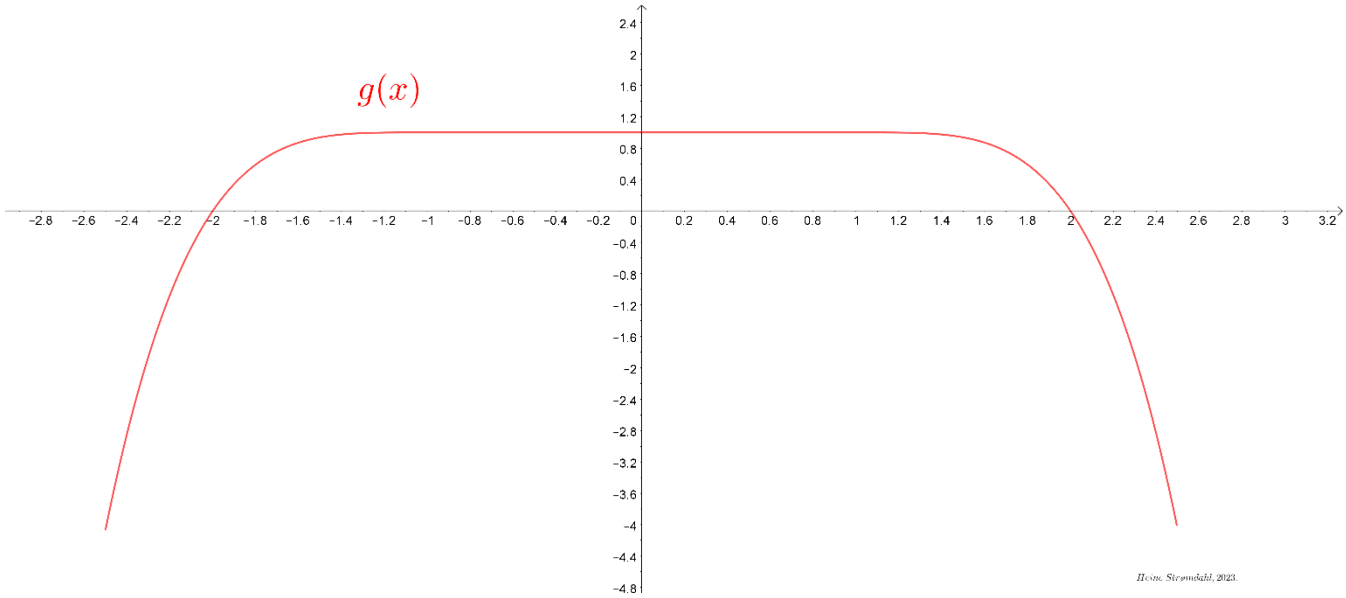
Med gymnasiematematikkens velkendte sprogbrug siger man at $f'(x)$ skifter fortegn i x_0. Men sætningen gælder ikke for alle differentiable funktioner, der er nogle ekstreme særtilfælde (se eksemplerne nedenfor), som i daglig praksis er irrelevante i gymnasieundervisningen. Ved at indføre en kategori af ”Pæne differentiable funktioner” undgår man de ekstreme særtilfælde og har en bred kategori af funktioner, som sætningen gælder for.

Eksempler på de ’ekstreme’ særtilfælde.

1: $g(x) = \begin{cases} x^2 \left|\cos(\frac{1}{x})\right|, x \neq 0 \\ 0\,, x = 0 \end{cases}$ og $f(x) = \int_{-x}^{x} g(t)dt$ [i]

$f(x)$ har ekstremumspunkt i $x = 0$ og for ethvert $\delta > 0$ findes uendeligt mange nulpunkter for $f'(x) = 2g(x)$ i i hvert af de to intervaller $]x_0 - \delta, x_0[$ og $]x_0, x_0 + \delta[$.

2: En funktion som er tre gange differentiabel og konstant i et interval.

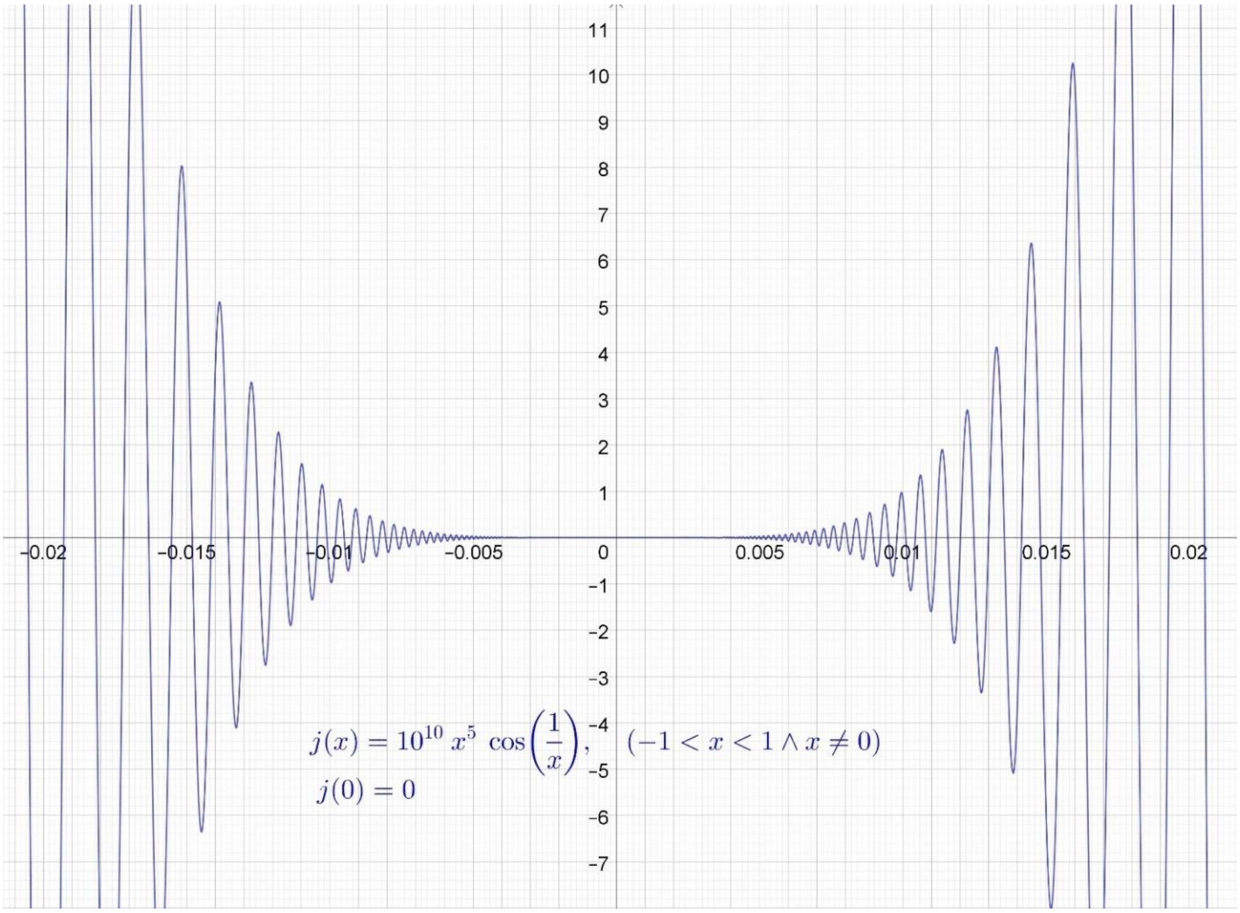


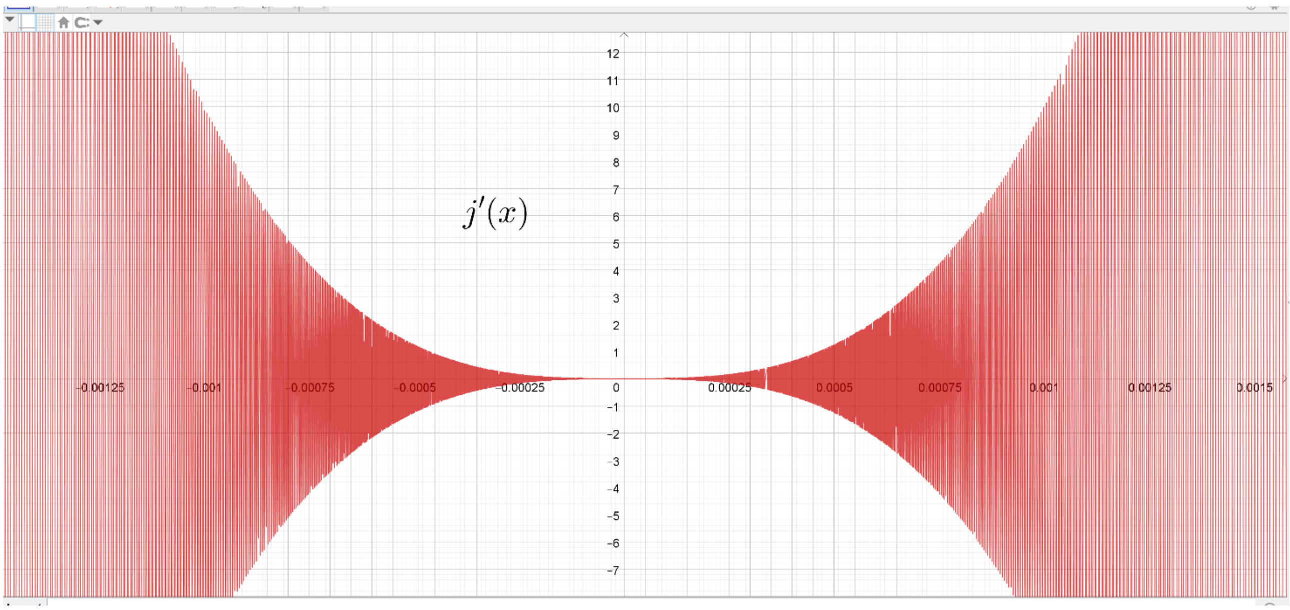
$$g(x) = \begin{cases} -(x+1)^4 + 1 & : -2.5 \le x < -1 \\ 1 & : -1 \le x < 1 \\ -(x-1)^4 + 1 & : (1 \le x < 2.5) \end{cases}$$

3:

$$j(x) = \begin{cases} 10^{10} x^5 \cos(\frac{1}{x}) \,, -1 < x < 1, x \neq 0 \\ 0 \,, x = 0 \end{cases}$$

$j(x)$ er to gange differentiabel med $j''(x)$ kontinuert og $j(0) = j'(0) = j''(0) = 0$, der er hverken ekstremums- eller vendepunkt i $x = 0$.





4: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) \, , x \neq 0 \\ 0 \, , x = 0 \end{cases}$

$f(x)$ er differentiabel, $f'(0) = 0$, i $x = 0$ er $f'(x)$ diskontinuert.

Sætning.

~~**En monoton kontinuert funktion er enten differentiabel eller har lodret tangent over alt, dvs. for alle $x_0 \in Dm(f)$ gælder, at $f(x)$ er enten differentiabel eller har lodret tangent i x_0.**~~

$g(x) = \begin{cases} x^2, x \geq 0 \\ x\ , x < 0 \end{cases}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt[2]{x}, x \geq 0 \\ -\sqrt[2]{-x}\ , x < 0 \end{cases}$

Definition. Pæne differentiable funktioner. NY?

En funktion $f(x)$ siges at være en pæn differentiabel funktion hvis den opfylder

1: $f(x)$ er differentiabel og $f'(x)$ er kontinuert.

For alle $x_0 \in Dm(f)$ gælder at der findes et $\varepsilon > 0$ således at ligningen $f(x) = f(x_0)$ ikke har løsninger i $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \setminus \{x_0\}$ ///// For alle $u \in Vm(f)$ har ligningen $f'(x) = u$ et endeligt antal løsninger i ethvert lukket begrænset interval I, som er en delmængde af $Dm(f)$.

Antag at $f(x)$ er differentiabel og $f'(x)$ er kontinuert. ***Undersøge sammenhængen*** $\Leftrightarrow \Leftarrow$.

A: For alle $x_0 \in Dm(f)$ gælder at der findes et $\varepsilon > 0$ således at ligningen $f(x) = f(x_0)$ ikke har løsninger i $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \setminus \{x_0\}$

B: For alle $u \in Vm(f)$ har ligningen $f'(x) = u$ et endeligt antal løsninger i ethvert lukket begrænset interval I, som er en delmængde af $Dm(f)$.

C: For alle $x_0 \in Dm(f)$ har ligningen $f'(x_0) = 0$ et endeligt antal løsninger i ethvert lukket begrænset interval I, som er en delmængde af $Dm(f)$.

2: ~~Ligningen $f'(x) = 0$ har et endeligt antal løsninger i ethvert lukket begrænset interval, som er en delmængde af $Dm(f)$.~~

For alle $u \in Vm(f)$ har ligningen $f'(x) = u$ har et endeligt antal løsninger i ethvert lukket begrænset interval I, som er en delmængde af $Dm(f)$.

Antag at $I = [a, b] \subseteq Dm(f)$.

2: $((u, a, b) \in \mathbb{R}^3 \wedge u \in Vm(f) \wedge [a, b] \subseteq Dm(f)) \Rightarrow |\{\, x \in [a, b] \mid f(x) = u \,\}| < \infty$

~~Sætning.~~

~~Pæne differentiable funktioner har kontinuerte afledede.~~

Antag at $f(x)$ er en kontinuert funktion defineret på at $I = [a, b]$.

Pæne kontinuerte funktioner.?!

Definition.

Antag at $f(x)$ er en kontinuert funktion defineret på at $I = [a, b]$.

$f(x)$ siges at være afgrænset stykkevist monoton hvis der eksisterer en intervaldeling (partition)

$a < n_1 < n_2 \ldots < n_m < b$ med

$f(x)$ voksende i intervallerne $[a, n_1]$, $[n_2, n_3]$ …. og aftagende i $[n_1, n_2]$, i $[n_3, n_4]$ …

eller

$f(x)$ aftagende i intervallerne $[a, n_1]$, $[n_2, n_3]$ …. og voksende i $[n_1, n_2]$, i $[n_3, n_4]$ …

Sætning.

$f(x)$ er en afgrænset stykkevist monoton funktion hvis og kun hvis

$u \in Vm(f) \Rightarrow |\{ x \in I \mid f(x) = u \}| < \infty$

Intervalhalvering.., Cauchy følge, $\frac{1}{n} - \frac{1}{(2n)} = \frac{1}{2n}$

$u \in Vm(f) \wedge [a, b] \subseteq Dm(f) \Rightarrow |\{ x \in [a, b] \mid f(x) = u \}| < \infty$

Bemærkning.

Alle funktioner, som gymnasieelever møder i almindelig daglig praksis, er pænt differentiable, herunder polynomier iflg. Algebraens Fundamentalsætning.

Til brug i beviset er der behov for at fremhente et klassisk resultat.

Sætning 1.

Monotont voksende differentiable funktioner med isolerede nulpunkter.

Antag at $f(x)$ er differentiabel med kontinuert afledet i et interval I, som er åbent, lukket eller halvåbent. Lad $\mathrm{M} = \{x_0 \in I \mid f'(x_0) = 0\}$

Hvis $x \in I/\mathrm{M} \Rightarrow f'(x) > 0$ og M er tællelig så er $f(x)$ monotont voksende i I.

Hvis $x \in I/\mathrm{M} \Rightarrow f'(x) > 0$ og M er tællelig så er $f(x)$ monotont aftagende i I.[ii]

Sætning 2.

Eksistens af ekstremumspunkter og vendepunkter for pæne differentiable funktioner.

A: En pæn differentiabel funktion $f(x)$, som er defineret i et åbent interval, har et maksimums-punkt i x_0 hvis og kun hvis

A1: Der findes et $\delta > 0$ således at: $x \in]x_0 - \delta, x_0[\Rightarrow f'(x) > 0$ og $x \in]x_0, x_0 + \delta[\Rightarrow f'(x) < 0$

A2: $f(x_0) = 0$

B: En pæn differentiabel funktion $f(x)$, som er defineret i et åbent interval, har et minimums-punkt i x_0 hvis og kun hvis

B1: Der findes et $\delta > 0$ således at: $x \in]x_0 - \delta, x_0[\Rightarrow f'(x) < 0$ og $x \in]x_0, x_0 + \delta[\Rightarrow f'(x) > 0$

B2: $f(x_0) = 0$

C: Hvis også $f'(x)$ er en pæn differentiabel funktion og $f'(x_0) = 0$ er der enten et ekstremums-punkt i x_0 eller et vendepunkt med vandret vendetangent.

Korollar.

Da polynomier som tidligere nævnt er pæne differentiable funktioner, gælder sætningen for dem.

Bemærkning. Delpunkterne A2 og B2 kan fjernes, som tidligere omtalt.

Bevis.

$\Leftarrow$ er en velkendt og central sætning i gymnasial differentialregning, det er $\Rightarrow$ der skal vises.

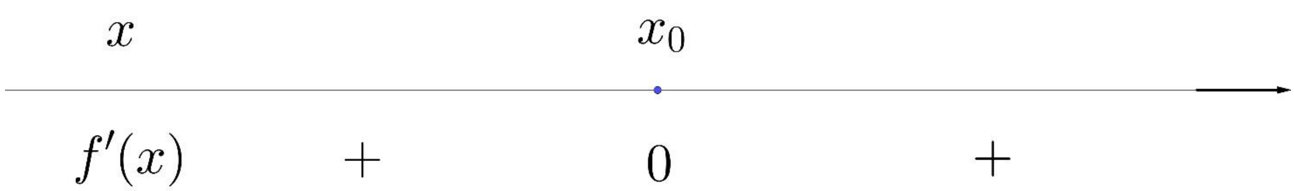
Antag, at $f(x)$ har et maksimumspunkt i x_0. Der findes to intervaller $]x_0 - \varepsilon[$ og $]x_0 + \varepsilon[$ med

1: $f'(x)$ har netop et fortegn og ingen nulpunkter i hvert enkelt af de to intervaller

2: $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) < f(x_0)$.

Analyse af mulige fortegnskombinationer for $f'(x)$.

1:



Ifølge sætning 1 er $f(x)$ monotont voksende i intervallet $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$. Der kan derfor ikke være ekstremumspunkt i x_0, hvilket er en modstrid.

Det gør trivielt ingen forskel hvis $f(x_0) > 0$. Samme konklusion ud fra en identisk analyse fås med fortegnskombinationen $- \, 0 \, -$. De tilbageværende fortegnskombinationer må derfor indeholde fortegnsskifte og være af formen $- \, 0 \, +$ eller $+ \, 0 \, -$ og disse medfører som bekendt ekstremumspunkter. QED.

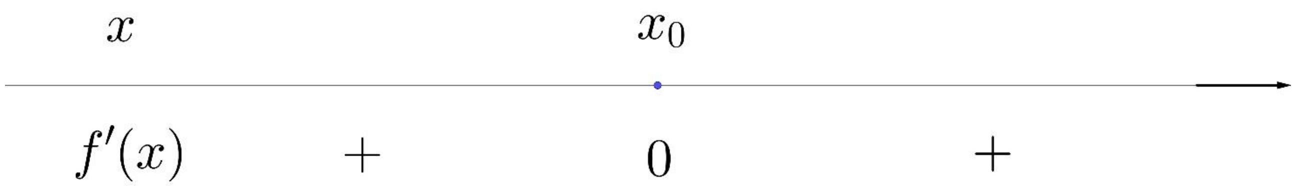
Bevis C.

Antag at $f'(x_0) = 0$

Der findes et $\varepsilon > 0$ således at der for begge polynomier $f'(x)$ og $f''(x)$ enkeltvist gælder, at det har netop et fortegn og ingen nulpunkter i hvert enkelt af de to intervaller $]x_0 - \varepsilon[$ og $x_0 + \varepsilon[$.

Analyse af mulige fortegnskombinationer for $f'(x)$.

1:



Ifølge hjælpesætningen er $f(x)$ igen monotont voksende i intervallet $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$. Der kan derfor ikke være ekstremumspunkt i x_0.

$f''(x)$ har ifølge ovenstående netop et fortegn i $]x_0 - \varepsilon, x_0[$, da $f''(x)$ er kontinuert er $f''(x_0)$ enten nul eller med samme fortegn. Ifølge hjælpesætningen er $f'(x)$ derfor monoton i det udvidede interval $]x_0 - \varepsilon, x_0]$ og da $f'(x)$ går fra positive værdier til et nulpunkt i x_0 må $f'(x)$ være aftagende, fortegnet for $f''(x)$ i $]x_0 - \varepsilon, x_0[$ er derfor negativt. Med et næsten identisk argument indses at fortegnet for $f''(x)$ i $]x_0, x_0 + \varepsilon[$ er positivt. Derfor er der ekstremumspunkt for $f''(x)$ i x_0 - dvs. vendepunkt - og krumningsskifte fra nedadgående til opadgående.

En identisk analyse kan laves med fortegnskombinationen $- \ 0 \ -$, i dette tilfælde er der krumningsskifte fra opadgående til nedadgående.

De tilbageværende fortegnskombinationer for $f'(x)$ må derfor indeholde fortegnsskifte i x_0 og være af formen $-\ 0 +$ eller $+\ 0\ -$ og disse medfører som bekendt ekstremumspunkter. QED.

Slutbemærkning.

Definitionen tillader at pæne differentiable funktioner kan have uendeligt mange nulpunkter for den afledede indenfor begrænsede intervaller, men ikke lukkede begrænsede intervaller.

Eksempel:

$$j(x) = \left\{ 10^{10} x^5 \cos(\frac{1}{x}), 0 < x < 1 \right.$$

Sætning 3. Ekstremumspunkter og afledede af højere orden.

Antag at $f(x) \in C^\infty$ og alle afledede er pæne differentiable funktioner.

Hvis $f'(x) = 0$ er der enten vendepunkt eller lokalt eller globalt ekstremumspunkt i $(x, f(x))$, der kan ikke være både vendepunkt og ekstremumspunkt.

A: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0 \Longrightarrow f(x)$ har lokalt eller globalt minimum i $(x, f(x))$.

B: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0 \Longrightarrow f(x)$ har lokalt eller globalt maksimum i $(x, f(x))$.

C: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0 \Longrightarrow f(x)$ har vendepunkt i $(x, f(x))$.

D:

$0 = f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(2n)}(x) \wedge f^{(2n+1)} \neq 0 \Longrightarrow f(x)$ har et vendepunkt i $(x, f(x))$.

E:

$0 = f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(2n-1)}(x) \wedge f^{(2n)} \neq 0 \Longrightarrow f(x)$ har et ekstremumspunkt i $(x, f(x))$.

Bevis E.

$f^{(2n)} \neq 0 \Longrightarrow f^{(2n-1)}$ har fortegnsskifte i x (idet $f^{(2n-1)}$ er monoton i et vist interval , som indeholder x) $\Longrightarrow f^{(2n-2)}$ har ekstremumspunkt i x og intet fortegnsskifte (fordi $f^{(2n-2)} = 0$ og fordi $f^{(2n-2)}$ skifter fra at være voksende til aftagende eller omvendt i x) $\Longrightarrow f^{(2n-3)}$ har fortegnsskifte i x (idet $f^{(2n-3)}$ er monoton i et vist interval, som indeholder x) $\Longrightarrow f^{(2n-4)}$ har ekstremumspunkt i x og intet fortegnsskifte $\Longrightarrow f^{(2n-5)}$ har fortegnsskifte i $x \Longrightarrow$ $\cdots \ldots f^{(2n-(2n-1))} = f'(x)$ har fortegnsskifte i $x \Longrightarrow f(x)$ har et ekstremumspunkt i $(x, f(x))$.

Beviset for D er næsten identisk med beviset for E.

Eksempel.

$f(x) = x^5 - 20x^4 + 150x^3 - 540x^2 + 945x + 60$

$f(x)$ har ekstremumspunkter i $\{(3, 708), (7, 452)\}$ med $f'(3) = f''(3) = f'''(3) = 0$ og $f^{(4)}(x) = -120$, $f'(7) = 0$ og $f''(7) = 320$.

Korollar 3. Formler for lokale ekstremumspunkter for tredjegradspolynomiet.

For et tredjegradspolynomium $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ gælder følgende.

Betegn $\bar{d} = b^2 - 3ac$

$f(x)$ er monotont voksende hvis og kun hvis $\bar{d} \leq 0$ og $a > 0$

$f(x)$ er monotont aftagende hvis og kun hvis $\bar{d} \leq 0$ og $a < 0$

Hvis $\bar{d} > 0$ er $f(x)$ ikke-monotont med lokalt maksimumspunkt i $B = (x_2, y_2)$ og lokalt minimumspunkt i $A = (x_1, y_1)$, hvor $x_1 = \frac{-b+\sqrt[2]{\bar{d}}}{3a}$ og $x_2 = \frac{-b-\sqrt[2]{\bar{d}}}{3a}$

Bevis ved sætning 3, punkt A og B og med CAS-værktøj:

$$f := x \mapsto a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

$f'(x)$

$$3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c$$

$solve(f'(x) = 0, \{x\})$

$$\left\{x = \frac{-b + \sqrt{-3\,a\,c + b^2}}{3\,a}\right\}, \left\{x = -\frac{b + \sqrt{-3\,a\,c + b^2}}{3\,a}\right\}$$

$f''\left(\frac{-b + \sqrt{-3\,a\,c + b^2}}{3\,a}\right)$

$$2\sqrt{-3\,a\,c + b^2}$$

$f''\left(\frac{-b - \sqrt{-3\,a\,c + b^2}}{3\,a}\right)$

$$-2\sqrt{-3\,a\,c + b^2}$$

QED.

Korollar 3 kan også bevises med almindelig monotoninanalyse, som er kendt fra gymnasialt pensum: ↓↓ Næste side↓

Tredjegradspolynomiet.

Monotoniforhold, formler for ekstremumspunkter og vendepunkt.

Forskrift og definitionsmængde.

I det følgende betragtes det generelle tredjegradspolynomium $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, det antages at definitionsmængden er de reelle tal.

Bemærkning 1. $\bar{d}$, diskriminanten for andengradsligningen $f'(x) = 0$.

Den første og anden afledede af tredjegradspolynomiet $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ er hhv.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, f''(x) = 6ax + 2b$.

Det fremgår at $f'(x)$ er et andengradspolynomium og $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$.

Diskriminanten for andengradsligningen er $(2b)^2 - 4 \cdot 3 \cdot c = 4(b^2 - 3ac)$.

I det følgende anvendes betegnelsen $\bar{d}$ for denne diskriminant.

$\bar{d} = b^2 - 3ac$. $\bar{d} > 0 \Leftrightarrow 4(b^2 - 3ac) > 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0$.

Rødder: $3ax^2 + 2bx + c = 0 \Leftrightarrow \frac{-2b \pm \sqrt[2]{4(b^2-3ac)}}{2 \cdot 3a} \Leftrightarrow \frac{-b \pm \sqrt[2]{\bar{d}}}{3a} = 0$

Notation: $x_1 = \frac{-b+\sqrt[2]{\bar{d}}}{3a}$ og $x_2 = \frac{-b-\sqrt[2]{\bar{d}}}{3a}$

Hvis $\bar{d}$ er negativ har $f'(x)$ samme fortegn over alt, grafen for $f'(x)$ er en parabel uden nulpunkter. Tredjegradspolynomiet er da monotont voksende eller aftagende. Det samme er tilfældet hvis diskriminanten er nul, grafen er i dette tilfælde en parabel med et enkelt nulpunkt, 'singulære nulpunkter' ændrer ikke monotoniforholdene. [iii]

Hvis diskriminanten er positiv, er grafen for $f'(x)$ en parabel med to nulpunkter, i dette tilfælde er $f(x)$ hverken monotont voksende eller monotont aftagende.

Ekstremumspunkter for $f(x)$.

Antag at $\bar{d} > 0$.

$x_2 < x_1 \Leftrightarrow \frac{-b-\sqrt[2]{\bar{d}}}{3a} < \frac{-b+\sqrt[2]{\bar{d}}}{3a} \Leftrightarrow 0 < \frac{2\sqrt[2]{\bar{d}}}{3a} \Leftrightarrow a > 0$.

$x_2 > x_1 \Leftrightarrow 0 > \frac{2\sqrt[2]{\bar{d}}}{3a} \Leftrightarrow a < 0$

Monotonianalyse.

Monotonianalyse af ikke − monotone − tredjegradspolynomier.
To monotonilinjer med fortegnet på $f'(x)$.
$1 : a > 0$

x		x_2		x_1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$2 : a < 0$

x		x_1		x_2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

Af monotonianalysen fremgår umiddelbart at $(x_2, y_2) = \left(x_2, f(x_2)\right)$ altid er et lokalt maksimumspunkt uanset fortegnet på højestegradskoefficienten a.

Konklusion af monotonianalysen mht. ekstremumspunkter.

Når $\bar{d}$ er positiv er der ekstremumspunkter i $x_1 = \frac{-b+\sqrt[2]{\bar{d}}}{3a}$ og $x_2 = \frac{-b-\sqrt[2]{\bar{d}}}{3a}$.

Uafhængigt af fortegnet på højestegradskoefficienten a er der lokalt maksimumspunkt i

$B = (x_2, y_2) = \left(x_2, f(x_2)\right)$ og lokalt minimumspunkt i $A = (x_1, y_1) = \left(x_1, f(x_1)\right)$

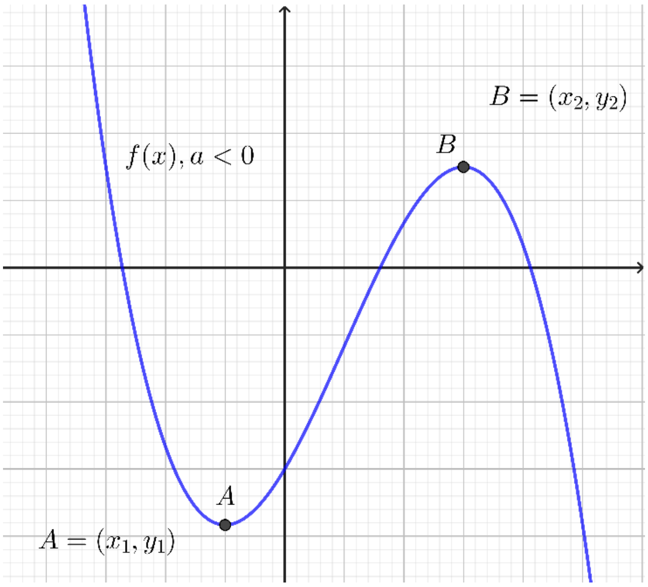
Herefter betegnes ekstremumspunkterne ved (x_1, y_1) og (x_2, y_2), stadig med

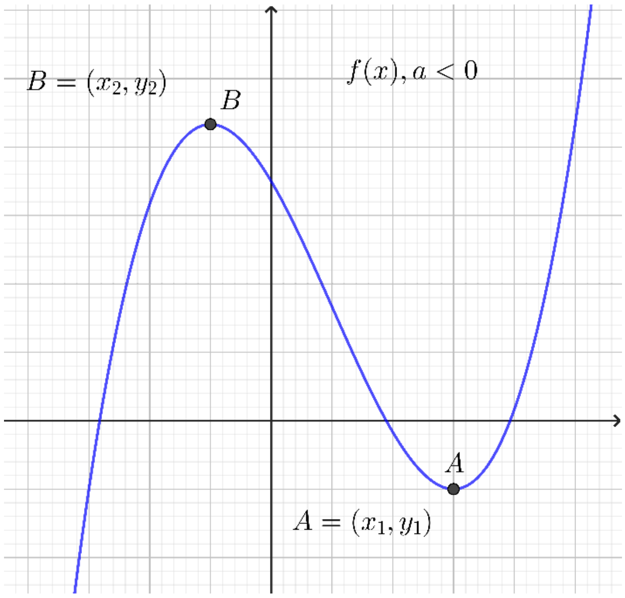
$\frac{-b+\sqrt[2]{\bar{d}}}{3a} = x_1$ og $\frac{-b-\sqrt[2]{\bar{d}}}{3a} = x_2$.

Formler med ekstremumspunkterne.

En indsættelse af x_1 og x_2 i formlen for $f(x)$ fører frem til at

$y_1 = \frac{-1}{27} \cdot \frac{-2b^3-27a^2d+9abc+2\bar{d}^{\frac{3}{2}}}{a^2}$ og $y_2 = \frac{-1}{27} \cdot \frac{-2b^3-27a^2d+9abc-2\bar{d}^{\frac{3}{2}}}{a^2}$. [iv]





Vendepunktet og vendetangenten.

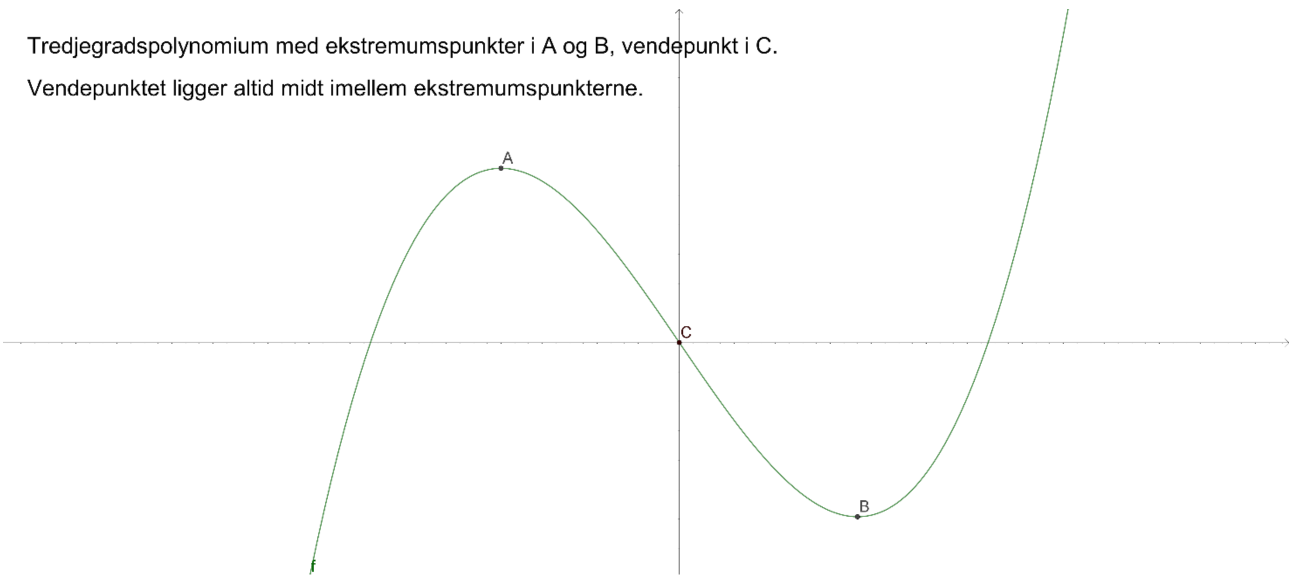
$f''(x) = 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$. Det fremgår, at der er vendepunkt i $\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$.

Vendetangentens hældning er

$$f'\left(-\frac{b}{3a}\right) = 3a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + 2b\left(-\frac{b}{3a}\right) + c = \frac{b^2}{3a} + \frac{-2b^2}{3a} + c = \frac{-b^2+3ac}{3a} = -\frac{\bar{d}}{3a}$$

Sætning.

Vendepunktet er ekstremumspunkternes midtpunkt.



Et bevis mht. y-koordinaterne følger ved anvendelse af formlerne for ekstremumspunkterne og slutnoten her. [v] Beviset mht. x-koordinaterne er næsten trivielt.

Eks.

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 90x + 1; \quad f'(x) = 6x^2 - 12x - 90 = 6(x+3)(x-5)$$

x		-3		5	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Sammenfatning.

Sætning.

Tredjegradspolynomiet. Monotoniforhold, formler for ekstremumspunkter og vendepunkt.

For et tredjegradspolynomium $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ gælder følgende.

Betegn $\bar{d} = b^2 - 3ac$

$f(x)$ er monotont voksende hvis og kun hvis $\bar{d} \leq 0$ og $a > 0$

$f(x)$ er monotont aftagende hvis og kun hvis $\bar{d} \leq 0$ og $a < 0$

Hvis $\bar{d} > 0$ er $f(x)$ ikke-monotont med lokalt maksimumspunkt i $B = (x_2, y_2)$ og lokalt minimumspunkt i $A = (x_1, y_1)$ hvor

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt[2]{\bar{d}}}{3a}\ ,\ x_2 = \frac{-b - \sqrt[2]{\bar{d}}}{3a}\ ,\ y_1 = \frac{-1}{27} \cdot \frac{-2b^3 - 27a^2d + 9abc + 2\bar{d}^{\frac{3}{2}}}{a^2}\ ,\ y_2 = \frac{-1}{27} \cdot \frac{-2b^3 - 27a^2d + 9abc - 2\bar{d}^{\frac{3}{2}}}{a^2}$$

Der er vendepunkt i $\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$. Vendetangentens hældning er $f'\left(-\frac{b}{3a}\right) = -\frac{\bar{d}}{3a}$

Vendepunktet er ekstremumspunkternes midtpunkt.

Forslag til elevaktivitet.

Bevis sætningen ved hjælp af et CAS-værktøj. Løse simple opgaver uden hjælpemidler om ovenstående med polynomier af formen $\int (x-n)(x-m)dx$, hvor n og m er små hele tal.

↓↓

Opgave. Udfyld monotonilinjen.

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 216x + 9$$

x

$f'(x)$

$f(x)$

Løse noter og kilden til den omtalte mere dybtliggende sætning om monotont voksende funktioner, som er helt eller delvist differentiable.

↓↓↓

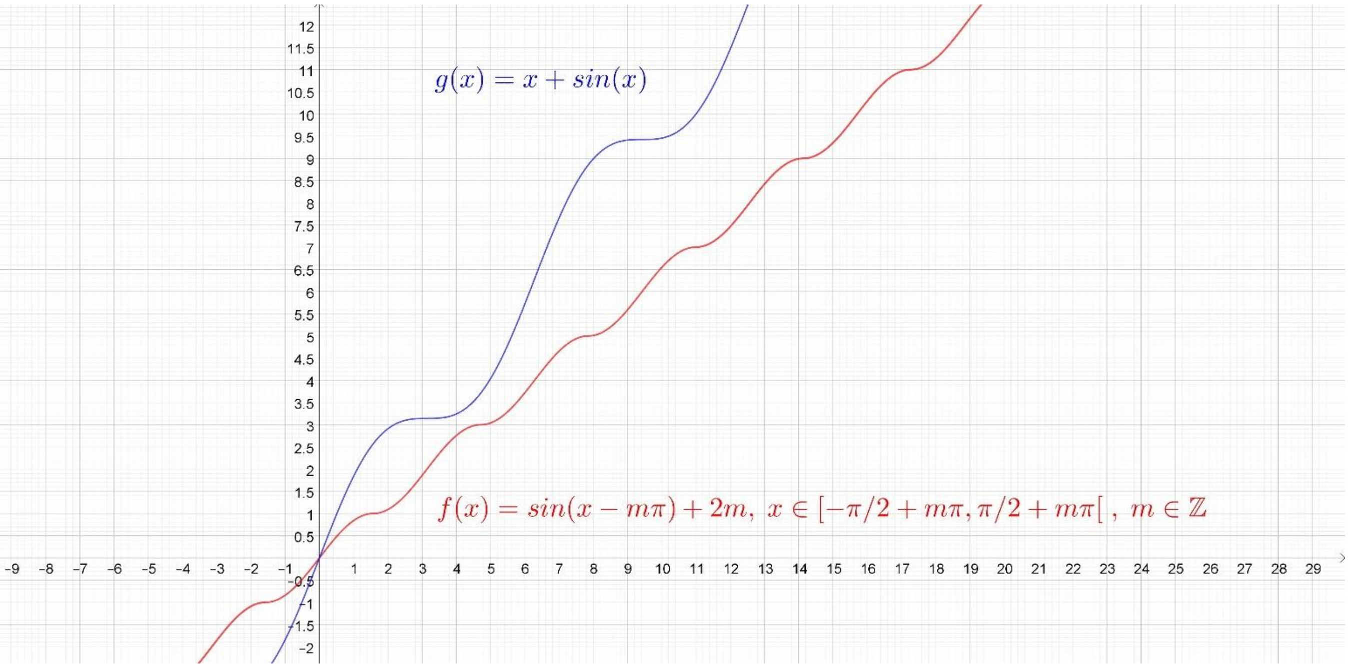
---

i

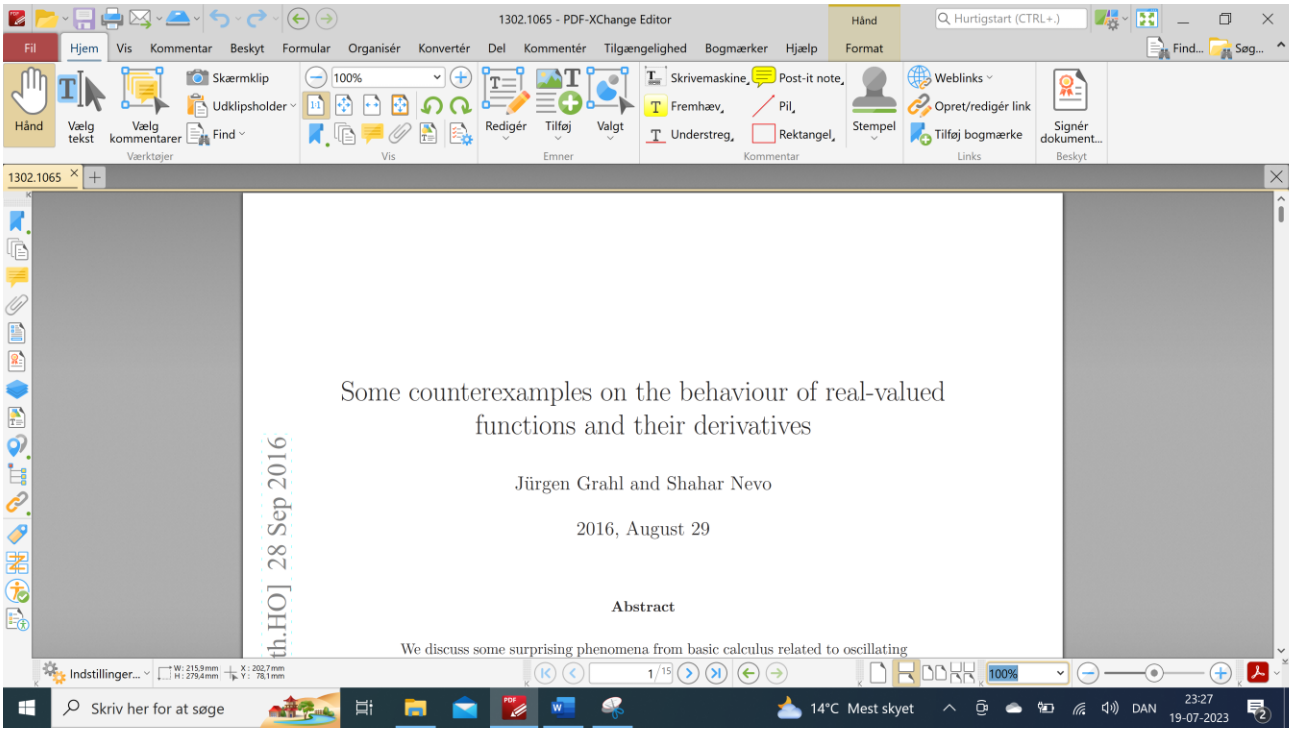
$$f(x) = \int_{-x}^{x} g(t)dt = \int_{-x}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{x} g(t)dt =$$

$$f(x) = \int_{-x}^{x} g(t)dt = \int_{-x}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{x} g(t)dt = -\int_{0}^{-x} g(t)dt + \int_{0}^{x} g(t)dt =$$

ii



It's worth noting that the (almost trivial) monotonicity criterion mentioned above can be extended as follows: *Let $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function. Assume that there is a countable set S such that f is differentiable on $[a, b] \setminus S$ and $f'(x) > 0$ for all $x \in [a, b] \setminus S$. Then f is strictly monotonically increasing on $[a, b]$.* An amazingly short proof for this classical result was given by L. Zalcman [18].



https://arxiv.org/pdf/1302.1065

iii

"Isolerede" eller "singulære" nulpunkter har ingen indflydelse på monotoniforholdene, som det fremgår af nedenstående.

Monotonisætningen for differentiable funktioner.

Sætningen kan formuleres på flere måder, et dybtliggende resultat kan findes her:
https://arxiv.org/pdf/1302.1065

Sætning.

Antag at $f(x)$ er differentiabel funktion, som er defineret på et interval I (åbent, lukket eller halvåbent) og som opfylder følgende:

$f'(x) \geq 0$ for alle $x \in I$ og ligningen $f'(x) = 0$ har tælleligt mange løsninger.

Da er $f(x)$ en (strengt) voksende funktion.

Eksempel 1.
$g(x) = x + \sin(x)\,, x \in \mathbb{R}.\ \mathrm{g}'(\mathrm{x}) = \cos(\mathrm{x}) + 1$

Funktionen er differentiabel og voksende med $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z}$

Eksempel 2. Betragt den stykkevist definerede funktion

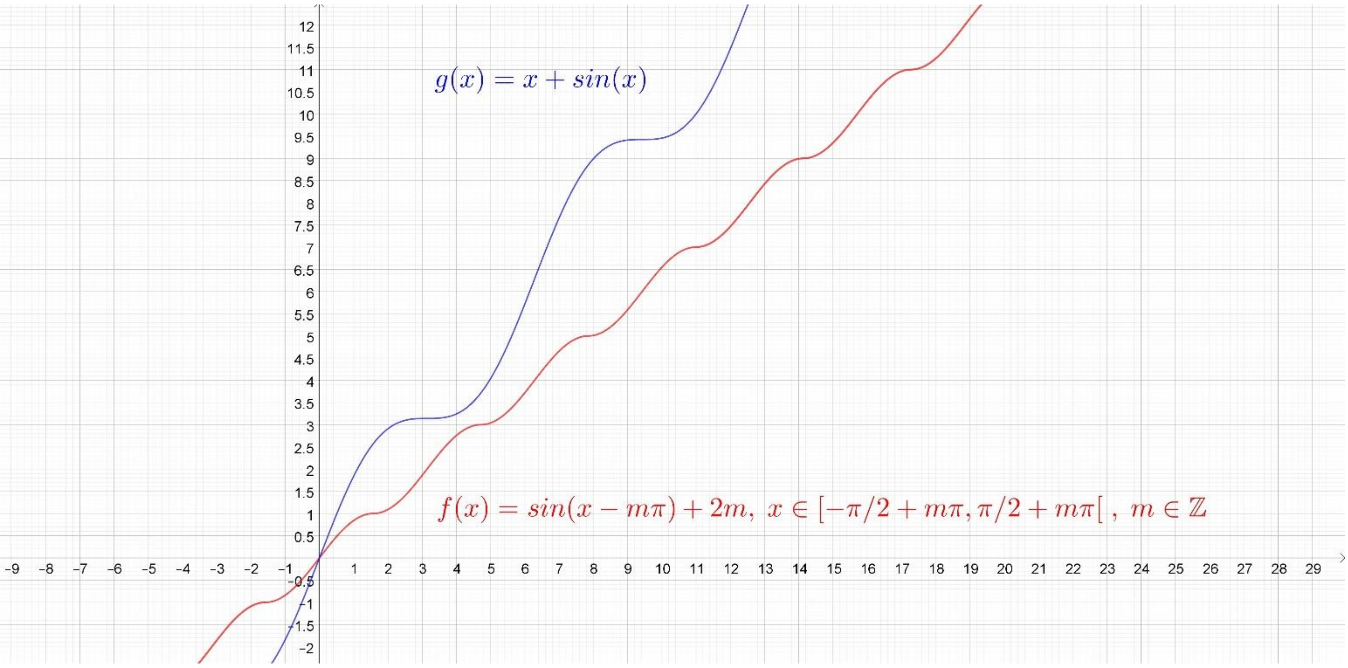
$f(x) = \sin(x - m\pi) + 2m\ , x \in [-\frac{\pi}{2} + m\pi,\ \frac{\pi}{2} + m\pi[\ , m \in \mathbb{Z}.$

Definitionsmængden for $f(x)$ er $\mathbb{R}$.

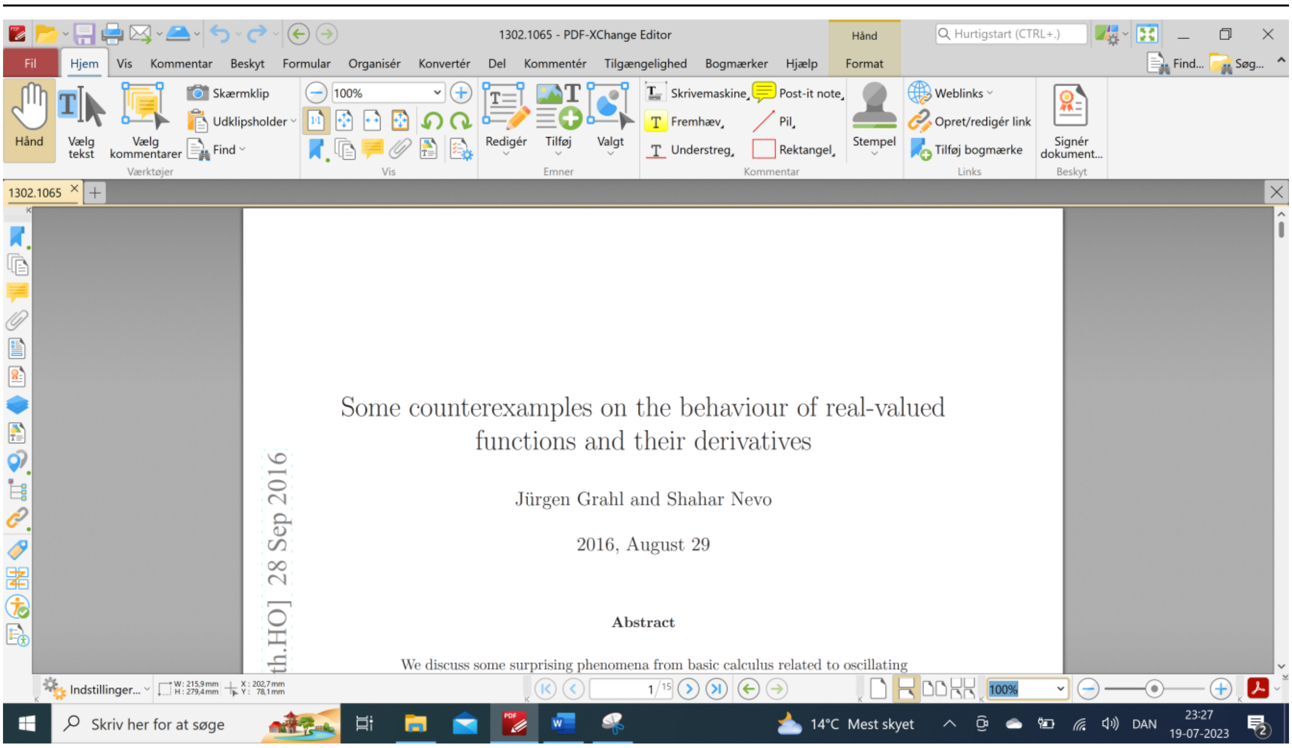
Funktionen er differentiabel og voksende med $f'(x) = \ \cos(x - m\pi)$ og

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z}.$

Eksempel 3: $f(x) = \ln(g(x))\ , x > 1.$



It's worth noting that the (almost trivial) monotonicity criterion mentioned above can be extended as follows: *Let $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function. Assume that there is a countable set S such that f is differentiable on $[a, b] \setminus S$ and $f'(x) > 0$ for all $x \in [a, b] \setminus S$. Then f is strictly monotonically increasing on $[a, b]$.* An amazingly short proof for this classical result was given by L. Zalcman [18].



https://arxiv.org/pdf/1302.1065

iv

a*((-b+(b^2-3*a*c)^0.5)/(3*a))^3+b*((-b+(b^2-3*a*c)^0.5)/(3*a))^2+c*((-b+(b^2-3*a*c)^0.5)/(3*a))+d

$$\rightarrow \frac{1}{27}\cdot\frac{2\,b^3+27\,a^2\,d-9\,a\,b\,c+\left(-2\,b^2+6\,a\,c\right)\sqrt{b^2-3\,a\,c}}{a^2}$$

a*((-b-(b^2-3*a*c)^0.5)/(3*a))^3+b*((-b-(b^2-3*a*c)^0.5)/(3*a))^2+c*((-b-(b^2-3*a*c)^0.5)/(3*a))+d

$$\rightarrow \frac{1}{27}\cdot\frac{2\,b^3+27\,a^2\,d-9\,a\,b\,c+\left(2\,b^2-6\,a\,c\right)\sqrt{b^2-3\,a\,c}}{a^2}$$

v

3 a*(-b/(3*a))^3 + b*(-b/(3*a))^2+c*(-b/(3*a))+d

$$\rightarrow \frac{2\,b^3+27\,a^2\,d-9\,a\,b\,c}{27\,a^2}$$

4