Pæne og semipæne fjerdegradspolynomier. Pythagoræiske tripler.

Ved et semipænt fjerdegradspolynomium forstås et fjerdegradspolynomium, som har præcis tre forskellige heltallige rødder og tre heltallige ekstremumspunkter. Ifølge algebraens fundamentalsætning må en af rødderne nødvendigvis være en dobbeltrod.

I dette indlæg gennemføres en simpel udledning af en parametrisering af semipæne fjerdegradspolynomier. Det viser sig, at der er en afbildning fra mængden af pythagoræiske tripler ind i mængden af semipæne fjerdegradspolynomier.

Det uafklarede eksistensspørgsmål om pæne fjerdegradspolynomier.

Talteoretikere har bevist, at der findes uendeligt mange semipæne fjerdegradspolynomier hvor den anden afledede har to heltallige ekstrema[i], to eksempler herpå medtages i dette dokument. Det vides ikke om der eksisterer et 'rigtigt pænt' fjerdegradspolynomium med hele fire forskellige heltallige rødder og hhv. tre og to heltallige ekstrema for første og anden afledede.

Sætning.

Parametrisering af semipæne fjerdegradspolynomier.

For $(m,n,s) \in \mathbb{Z}^3$ med $m \neq n$, $s \neq 0$ og $s \equiv 0\ (Mod\ 4)$ er fjerdegradspolynomiet med dobbeltrod i nul og rødderne

$$r_1 = s(3mn + m^2)$$

$$r_2 = s(3mn + n^2)$$

og

$$r_1 = s(2m^2 - n^2 + mn)$$

$$r_2 = s(2m^2 - n^2 - mn)$$

et semipænt fjerdegradspolynomium. (på nær de tilfælde hvor det andet rodsæt generer to dobbeltrødder)

Bevis.

Se næste side ↓

1: Ligningsløsning med GeoGebras CAS.

1	(x-u)(x-v)x $\rightarrow\ x\,(-u+x)\,(-v+x)$
2	\$1 Integral: $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}u\,x^3-\frac{1}{3}v\,x^3+\frac{1}{2}u\,v\,x^2+c_1$
3	12*(1 / 4 x⁴ - 1 / 3 u x³ - 1 / 3 v x³ + 1 / 2 u v x²) $\rightarrow\ 3x^4-4u\,x^3-4v\,x^3+6u\,v\,x^2$
4	3x⁴ - 4u x³ - 4v x³ + 6u v x²=0 Beregn: $\left\{x=\frac{2u+2v-\sqrt{2u^2-5u\,v+2v^2}\,\sqrt{2}}{3},\ x=\frac{2u+2v+\sqrt{2u^2-5u\,v+2v^2}\,\sqrt{2}}{3},\ x=0\right\}$
5	Beregn(2u² - 5u v + 2v² = 2p², u) $\rightarrow\ \left\{u=\frac{5v-\sqrt{16p^2+9v^2}}{4},\ u=\frac{5v+\sqrt{16p^2+9v^2}}{4}\right\}$

2: Antag nu, at $(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\setminus\{0,0,0\}$ således at $(|x|,|y|,|z|)$ er en pythagoræisk tripel, hvilket er tilfældet når $x^2+y^2=z^2$. Betragt $p=3x$, $v=4y$, bemærk at både p og v kan være negative. Da er

$$16p^2+9v^2=16\cdot(3x)^2+9\cdot(4y)^2=16\cdot 9\cdot(x^2+y^2)=144(x^2+y^2)$$

Det følger af resultatet i skærmbilledet at

$$u=\frac{\left(5v+\sqrt[2]{16p^2+9v^2}\right)}{4}=\frac{\left(5\cdot 4y+12\sqrt[2]{y^2+x^2}\right)}{4}=5y+3\sqrt[2]{x^2+y^2}$$

Rødderne findes:

$$r_1=\frac{\left(2u+2v+\sqrt[2]{2}\sqrt[2]{2u^2-5u\,v+2v^2}\right)}{3}$$

$$r_1=\frac{(2u+2v+2p)}{3}$$ (jf. linje 5 i skærmbilledet)

$$r_1 = \frac{\left(2 \cdot (5y + 3\sqrt[2]{x^2 + y^2}) + 2 \cdot 4y + 2 \cdot 3x\right)}{3}$$

$$r_1 = \frac{\left(10y + 3\sqrt[2]{x^2 + y^2} + 8y + 6x\right)}{3}$$

$$r_1 = 6y + 2\sqrt[2]{x^2 + y^2} + 2x$$

Og dermed

$$r_2 = y + 6\sqrt[2]{x^2 + y^2} - 2x$$

$$r_3 = 0$$

Man kan gå et skridt videre og substituere (x, y) med den velkendte parametriserede form for alle pythagoræiske tripler, som her ses i et skærmklip fra Wikipedia:

> remedied by inserting an additional parameter k to the formula. The following will generate all Pythagorean triples uniquely:
>
> $$a = k \cdot (m^2 - n^2), \;\; b = k \cdot (2mn), \;\; c = k \cdot (m^2 + n^2)$$
>
> where m, n, and k are positive integers with $m > n$, and with m and n coprime and not both odd.

Jf. ovenstående antages at både $x \; og \; y$ kan være negative. Man får derfor substitutionen

$x = s(m^2 - n^2), y = 2smn, (m, n, s) \epsilon \mathbb{Z}^3, m \neq n, s \neq 0.$

$$r_1 = 6y + 2\sqrt[2]{x^2 + y^2} + 2x$$

$$r_1 = 6 \cdot 2smn + 2\sqrt[2]{\left(s(m^2 - n^2)\right)^2 + (2smn)^2} + 2s(m^2 - n^2)$$

$$r_1 = 12smn + 2s\sqrt[2]{m^4 + n^4 - 2m^2n^2 + 4m^2n^2} + 2s(m^2 - n^2)$$

$$r_1 = 12smn + 2s\sqrt[2]{m^4 + n^4 + 2m^2n^2} + 2s(m^2 - n^2)$$

$$r_1 = 12smn + 2s\sqrt[2]{((m^2 + n^2))^2} + 2s(m^2 - n^2) = 12smn + 4sm^2 \quad \text{og}$$

$$r_2 = 12smn + 2s\sqrt[2]{((m^2 + n^2))^2} - 2s(m^2 - n^2) = 12smn + 4sn^2$$

$: y = s(m^2 - n^2)\,, x = 2smn$

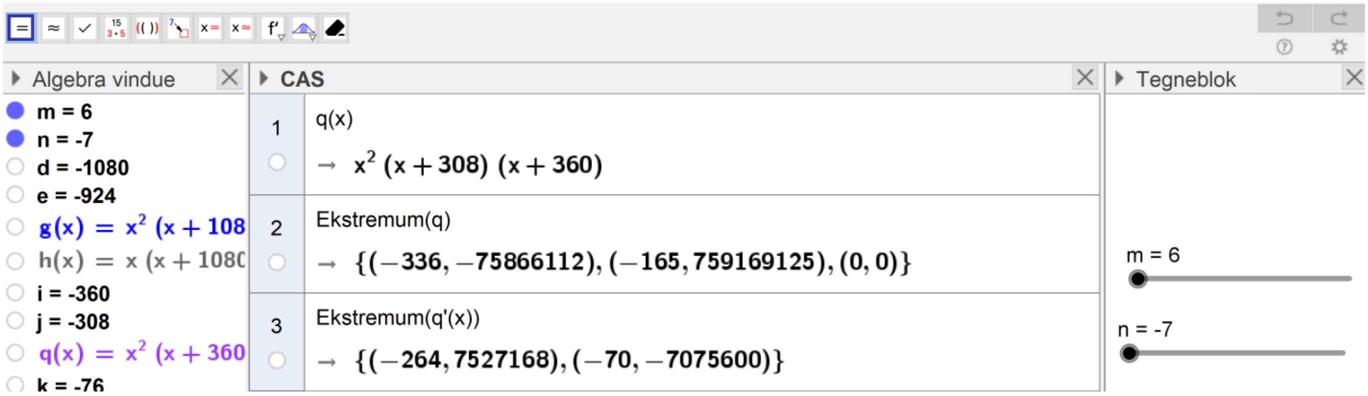
$$r_1 = 6 \cdot s(m^2 - n^2) + 2s\sqrt[2]{((m^2 + n^2))^2} + 2 \cdot 2smn$$

$$r_1 = 8sm^2 - 4sn^2 + 4smn \quad \text{og dermed}$$

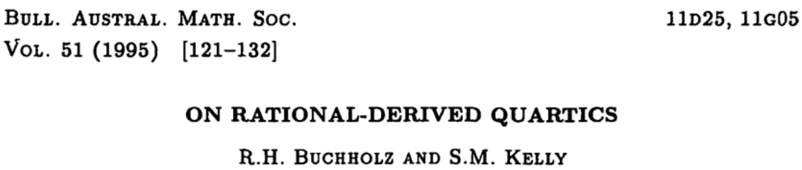
$$r_s = 8sm^2 - 4sn^2 - 4smn. \text{ QED.}$$

Fjerdegradspolynomier med tre forskellige heltallige rødder og heltallige ekstrema for første og anden afledede.

Som nævnt i indledningen har talteoretikere bevist (i anden halvdel af det 20. århundrede), at der findes uendeligt mange semipæne fjerdegradspolynomier hvor den anden afledede har to heltallige ekstrema. Et eksempel herpå fremkommer allerede ved små tal for m og n når man indtaster den ovenstående parametrisering med to skydere i en GeoGebra fil.



Tre andre eksempler på sådanne polynomier kan tilgås i linket til ”On rational-derived quartics”.



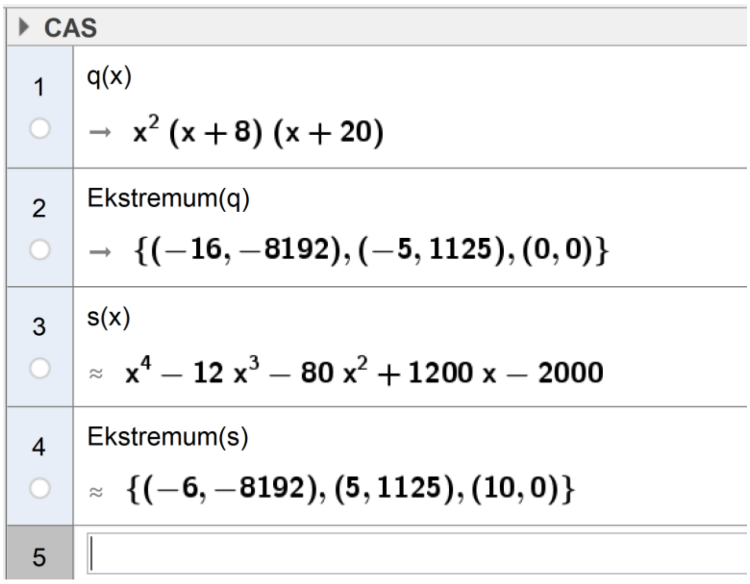
BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. 11D25, 11G05
VOL. 51 (1995) [121–132]

ON RATIONAL-DERIVED QUARTICS

R.H. BUCHHOLZ AND S.M. KELLY

Nogle eksempler på semipæne fjerdegradspolynomier.

Flere kan tilgås på https://www.geogebra.org/m/dqtftxtd



3	s(x)
	$\approx\ x^4 - 4x^3 - 128x^2 + 768x$
4	Ekstremum(s)
	$\approx\ \{(-8, -8192), (3, 1125), (8, 0)\}$
5	

8	r(x)
	$\approx\ x^4 + 56x^3 + 640x^2$
9	Rod(r)
	$\rightarrow\ \{x = -40, x = -16, x = 0\}$
10	Ekstremum(r)
	$\rightarrow\ \{(-32, -131072), (-10, 18000), (0, 0)\}$

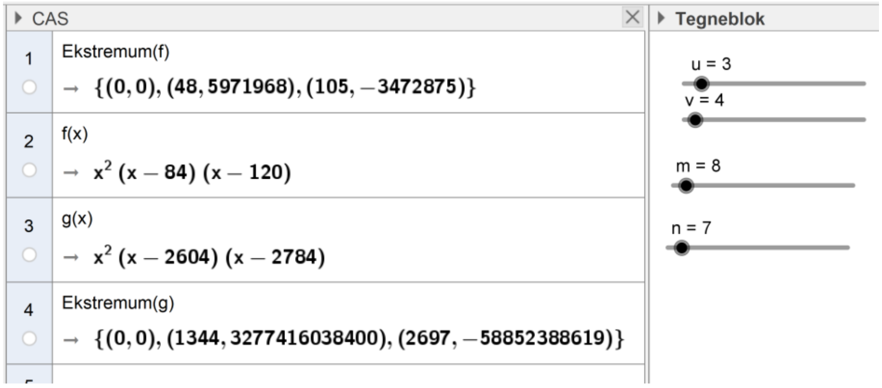
Sidebemærkning.

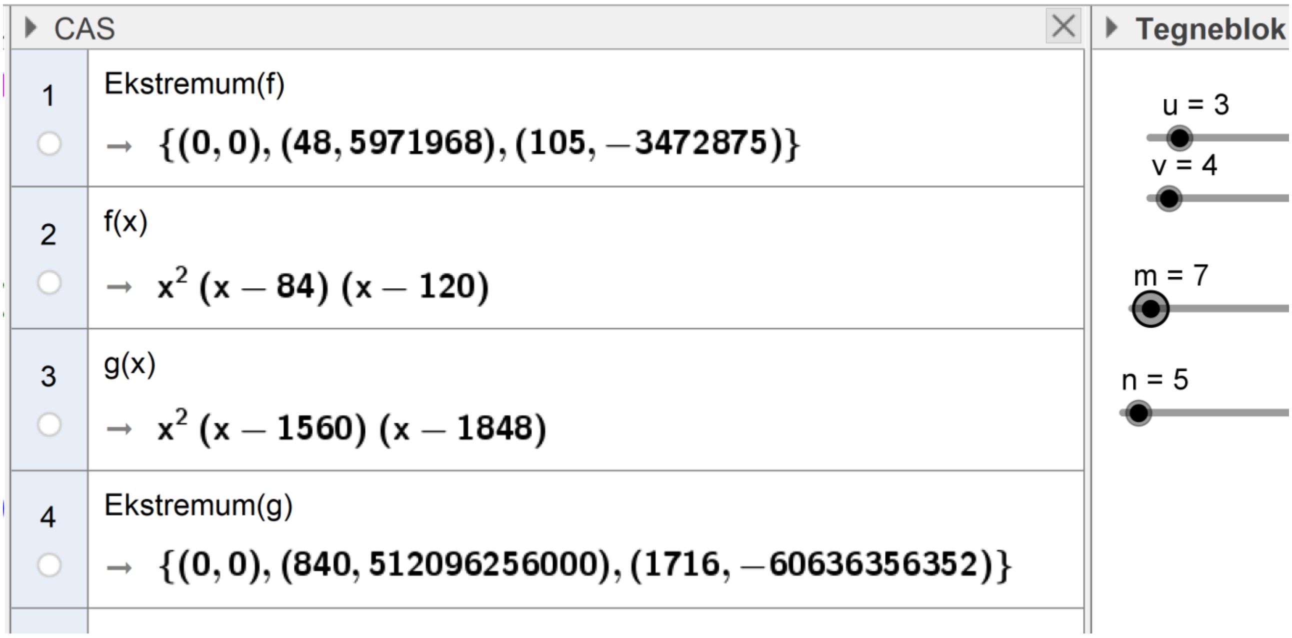
3X54 polynomiet. Et unikt pænt tredjegradspolynomium?

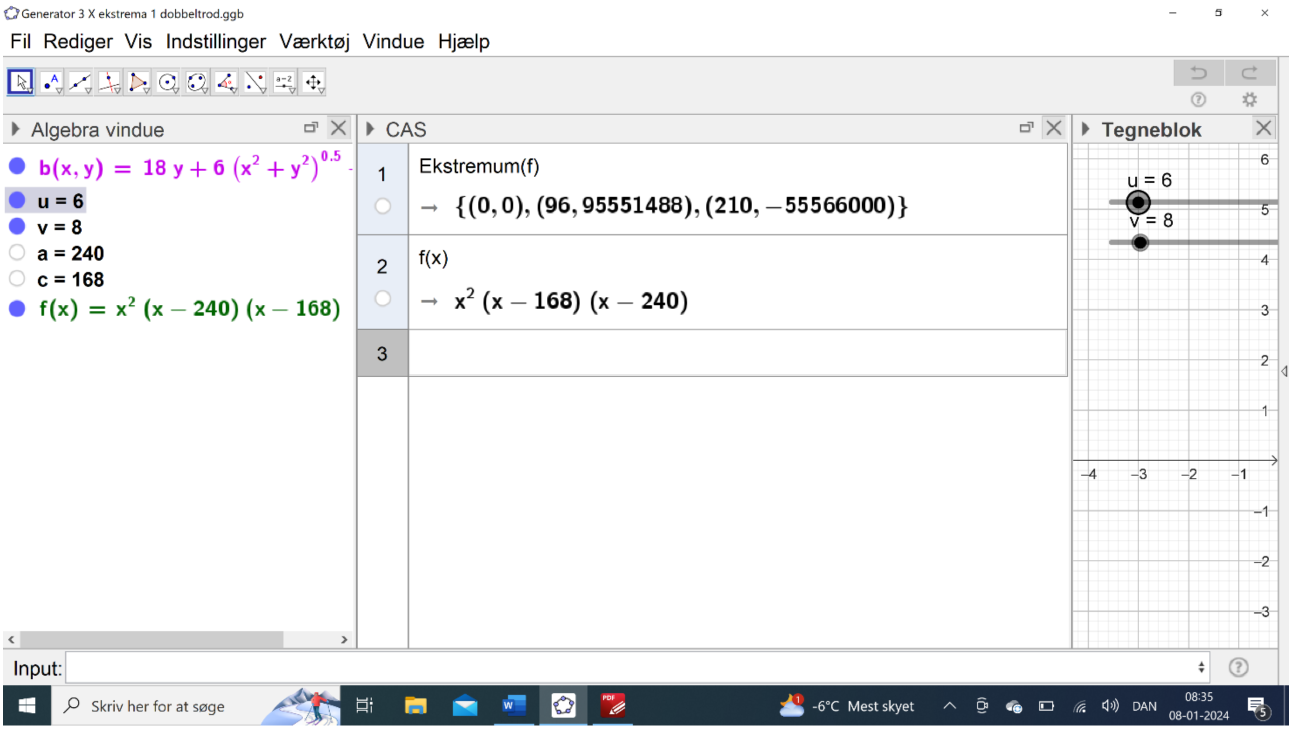
Det følgende særprægede tredjegradspolynomium med 3X54 er 'pænt', dvs. det har tre forskellige rødder og heltallige ekstrema for både første og anden afledede. Det dukkede i mit regneark. Måske er det unikt?

$$f(x) = x^3 - 54x^2 + 540x + 5400$$

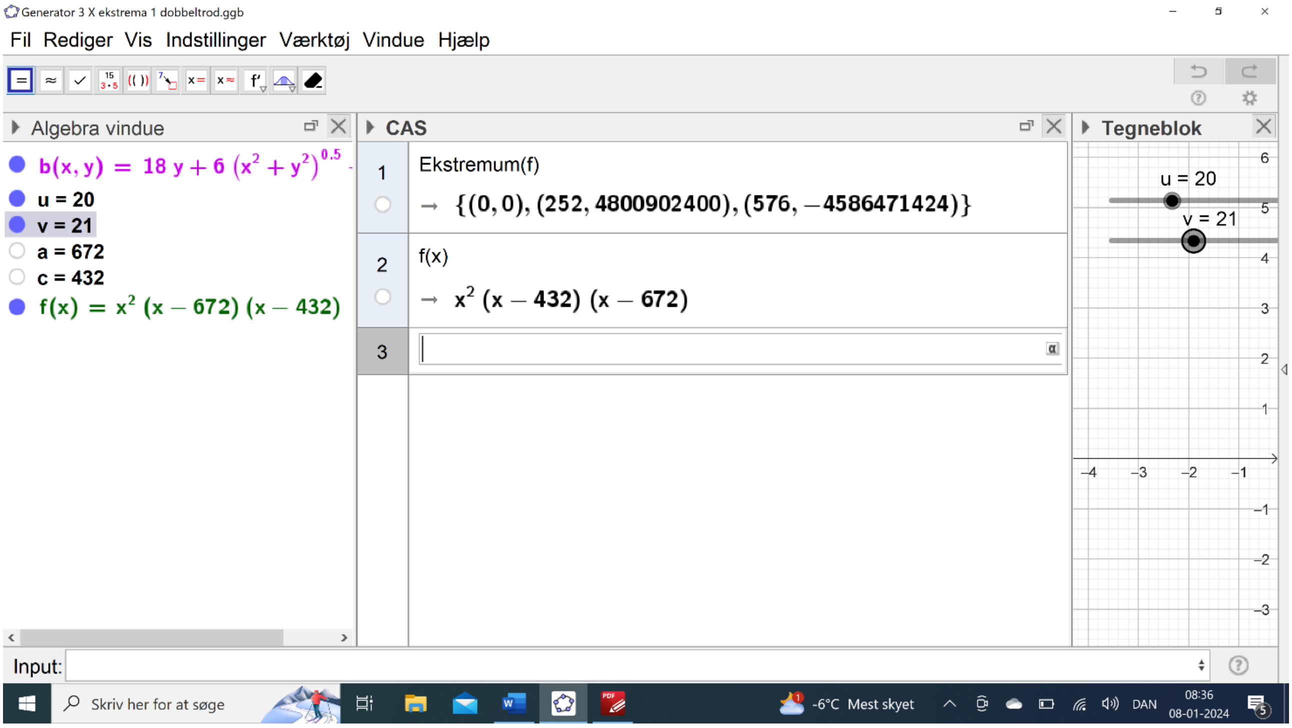
Flere Eksempler på semipæne fjerdegradspolynomier på de næste sider.

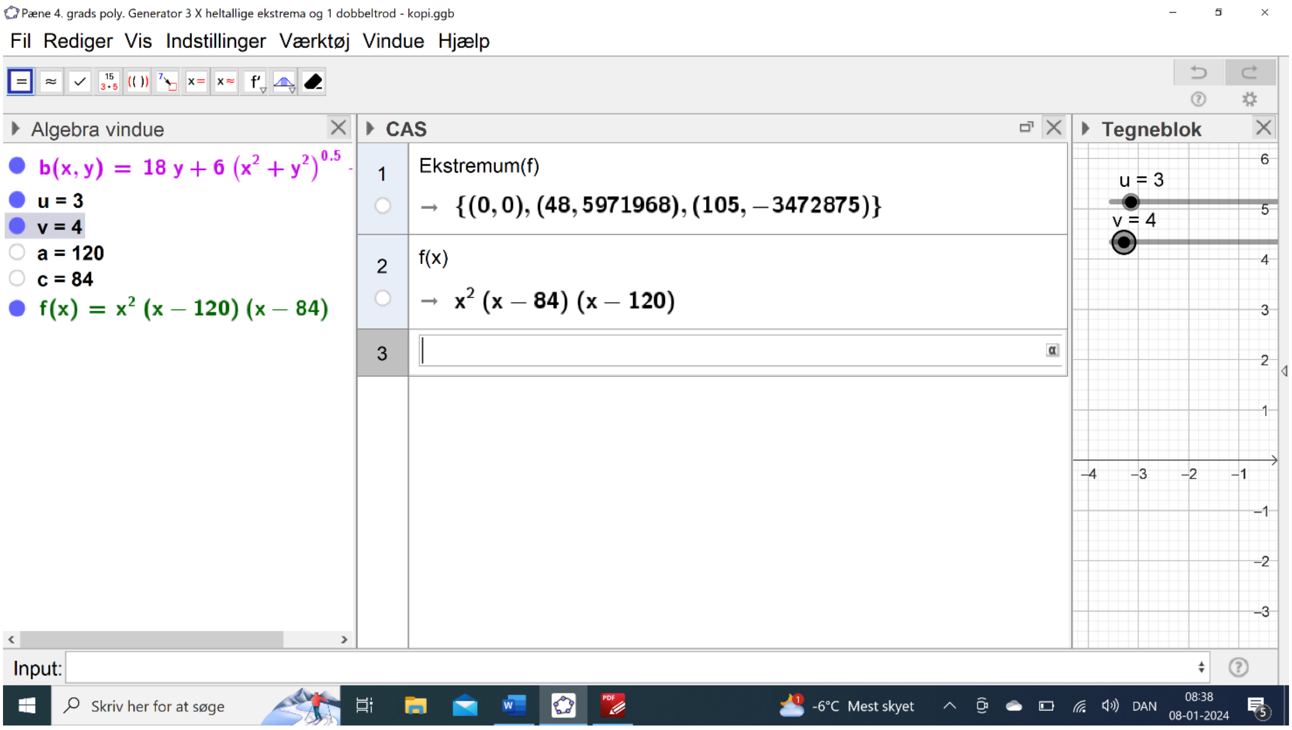






Fjerdegrads semipæne polynomier. Parametrisering af heltallige rødder.
Heine Strømdahl, januar 2023.


Generator 3 X ekstrema 1 dobbeltrod.ggb
Fil Rediger Vis Indstillinger Værktøj Vindue Hjælp
Algebra vindue
b(x, y) = 18 y + 6 (x² + y²)^0.5
u = 20
v = 21
a = 672
c = 432
f(x) = x² (x − 672) (x − 432)
CAS
Ekstremum(f)
→ {(0, 0), (252, 4800902400), (576, −4586471424)}
f(x)
→ x² (x − 432) (x − 672)
Tegneblok
u = 20
v = 21
Input:
Skriv her for at søge
-6°C Mest skyet
DAN
08:36
08-01-2024


Pæne 4. grads poly. Generator 3 X heltallige ekstrema og 1 dobbeltrod - kopi.ggb
Fil Rediger Vis Indstillinger Værktøj Vindue Hjælp
Algebra vindue
b(x, y) = 18 y + 6 (x² + y²)^0.5
u = 3
v = 4
a = 120
c = 84
f(x) = x² (x − 120) (x − 84)
CAS
Ekstremum(f)
→ {(0, 0), (48, 5971968), (105, −3472875)}
f(x)
→ x² (x − 84) (x − 120)
Tegneblok
u = 3
v = 4
Input:
Skriv her for at søge
-6°C Mest skyet
DAN
08:38
08-01-2024

[i] 'Nice' Quartic Polynomials -The Sequel. On rational-derived quartics (archive.org) , On rational-derived quartics (cambridge.org)