HOJA DE TRABAJO 3

Carolina Bieler
María Alejandra Duque
Daniel Zapata
Juan José Restrepo
John Alejandro Ortiz

2.1.2.1) las ecuaciones lineales pueden ser homogeneas o no homogeneas; las que contienen las derivadas hasta orden n de la variable dependiente y los coeficientes de las derivadas son funciones arbitrarias de la variable independiente.

2.1.2.2)

lineales:

- $n=2$: $3x y'' + 20x^2 y' + 10y = \cos x$
- $n=3$: $\square\, y''' + \square\, y'' + \square\, y' + \square\, y = \square$
- $n=4$: $\square\, y^{4} + \square\, y''' + \square\, y'' + \square\, y' + \square\, y = \square$

$\square$ Solo puede ser función de x

no lineales:

- $n=2$: $3x y'' + 20y^2 y' + 10y = \cos x$ — Tenemos una potencia de la variable dependiente.
- $n=3$: $\square\, y''' + \square\, y'' + \square\, y' + y'' y = \square$
- $n=4$: $\square\, y^{4} + \square\, y''' + \square\, y'' + \square\, y' + \square\, y = \square$

$\square$ Deben tener x si quiere pero deben tener y o alguna derivada de y

Aparece u producto y su segunda derivada

2.1.3)

Orden uno	Orden dos	Orden Tres.
$r-1=0$;	$r(r-1)=0$;	$r(r-1)(r-2)=0$

2.1.3.1)

$(D-1)y=0$	$D(D-1)y=0$	$D(D-1)(D-2)y=0$

2.1.3.2)

Orden uno:

$y=e^{1\cdot x}$

$(D-1)e^{x}=0$

$e^{x}-e^{x}=0$

$\square$ Poner cualquier real positivo y entero

Orden dos:

$y=e^{0\cdot x}=1$

$D(D-1)(1)=0$

$D(0-1) =$

$0-0 =$

$0 =$

$y=e^{1\cdot x}$

$D(D-1)e^{x}=0$

$D(e^{x}-e^{x})=$

$D(0) =$

$0 =$

Orden tres:

$y=e^{0\cdot x}=1$

$D^3(D-1)(1)=0$

$D^3(0-1) =$

$D^3(-1) =$

$D^2 D(-1) =$

$D^2(0) =$

$0 =$

$y=e^{1\cdot x}$

$D^3(D-1)e^{x}=0$

$D^3(e^{x}-e^{x})=$

$D^3(0) =$

$0 =$

Orden Tres

$$y = e^{2 \cdot x}$$

$$D(D-1)(D-2)e^{2x} = 0$$
$$D(D-1)(2e^{2x} - 2e^{2x}) =$$
$$D(D-1)(0) =$$
$$D(0) =$$
$$0 =$$

Orden Cuatro.

$$r^3 (r-1) = 0$$
$$D^3 (D-1)\, y = 0$$

$$y = e^{0 \cdot x} = 1$$

$$D^3 (D-1)(1) = 0$$
$$D^3 (0-1) =$$
$$D^3 (-1) =$$
$$D^2 D(-1) =$$
$$D^2 (0) =$$
$$0 =$$

$$y = e^{1 \cdot x}$$

$$D^3 (D-1) e^x = 0$$
$$D^3 (e^x - e^x) =$$
$$D^3 (0) =$$
$$0 =$$

2.1.9)

Orden Dos

$$(r-i)(r+i) = 0$$

$$r^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (D^2 + 1)\, y = 0$$

$$y = e^{\pm ix}$$

$$(D^2 + 1) e^{\pm ix} = 0$$

$$D^2 e^{\pm ix} + 1 \cdot e^{\pm ix} =$$

$$D(De^{\pm ix}) + e^{\pm ix} =$$

$$D(\pm i e^{\pm ix}) + e^{\pm ix} =$$

$$\pm i^2 e^{\pm ix} + e^{\pm ix} =$$

$$- e^{\pm ix} + e^{\pm ix} =$$

$$0 =$$

Orden Tres.

$$r(r-i)(r+i) = 0$$

$$r(r^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow D(D^2 + 1)\, y = 0$$

$$y = e^{\pm ix}$$

$$D(D^2 + 1) e^{\pm ix} = 0$$
$$D(0) =$$
$$0 =$$

2.1(5) Ya que las exponenciales no cambian su forma bajo el operador derivada n-esima, con lo que sería posible encontrar una combinación lineal especifica en que se pueda anular siempre que los coeficientes de la E.D.O. lineal sean ctes.

2.1.6.1) ya se ilustró el ejemplo con la notación $y^{(n)} = D^n$

2.1.6.2) $L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2)$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D^k (\alpha y_1 + \beta y_2) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D^k (\alpha y_1) + a_k D^k (\beta y_2) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k D^k y_1 + \beta a_k D^k y_2) =$$

$$\alpha \sum_{k=0}^{n} a_k D^k y_1 + \beta \sum^{n} a_k D^k y_2 =$$

$$\alpha L(y_1) + \beta L(y_2) =$$

$$\boxed{\begin{aligned} L &= a_n D^n + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D \\ L &= \sum_{k=0}^{n} a_k D^k \end{aligned}}$$

2.1.6.3) $\text{Nucleo}(L) = \{ y \mid L(y) = 0 \}$

Si $y_1, y_2 \in \text{Nucleo}(L) \rightarrow L(y_1) = 0$
$L(y_2) = 0$

$\Rightarrow y_1 + y_2 \in \text{Nucleo}(L)$ porque:

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$$
$$= 0 + 0$$

por lo que mostré en 2.1.6.2

$\Rightarrow \alpha y_1 \in \text{Nucleo}(L)$ ya que

$$L(\alpha y_1) = \alpha L(y_1)$$

por lo que mostré en 2.1.6.2 poniendo $\beta = 0$

SECCION 3.1

27 Sea y_p una solución particular de la ecuación no homogénea $y'' + py' + qy = f(x)$, y sea y_c una solución de su ecuación homogénea asociada. Muestre que $y = y_c + y_p$ es una solución de la ecuación no homogénea dada.

Por hipotesis sabemos que y_p satisface $y_p'' + py_p' + qy_p = f(x)$

y por segunda hipotesis y_c satisface $y_c'' + py_c' + qy_c = 0$

entonces la tesis establece que $y(x) = y_c + y_p$ satisface

$y'' + py' + qy = f(x)$; tenemos que $y' = y_c' + y_p' \rightarrow y'' = y_c'' + y_p''$

reemplazando en la ecuacion:

$$(y_c'' + y_p'') + p(y_c' + y_p') + q(y_c + y_p) = f(x)$$

$$y_c'' + y_p'' + py_c'' + py_p' + qy_c + qy_p =$$

$$(y_c'' + py_c' + qy_c) + (y_p'' + py_p' + qy_p) =$$

usando hipotesis $\quad 0 \quad + \quad f(x) \quad =$

$$f(x) =$$

32 Sean y_1 y y_2 dos soluciones de $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$ en un intervalo abierto I, donde A, B y C son continuas y $A(x)$ nunca es cero. (**a**) Sea $W = W(y_1, y_2)$. Demuestre que

$$A(x)\frac{dW}{dx} = (y_1)(Ay_2'') - (y_2)(Ay_1'').$$

Posteriormente sustituya Ay_2'' y Ay_1'' en la ecuación diferencial original para mostrar que

$$A(x)\frac{dW}{dx} = -B(x)W(x).$$

(**b**) Resuelva esta ecuación de primer orden para deducir la **fórmula de Abel**

$$W(x) = K \exp\left(-\int \frac{B(x)}{A(x)}\,dx\right).$$

donde K es una constante. (**c**) ¿Por qué la fórmula de Abel implica que el wronskiano $W(y_1, y_2)$ es cero o diferente de cero en todo el intervalo (como se estableció en el teorema 3)?

a. El wronskiano de las dos soluciones

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

$$\rightarrow \frac{dW}{dx} = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - (y_1'' y_2 + y_1' y_2')$$

$$\frac{dW}{dx} = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$$

$$\rightarrow A(x)\frac{dW}{dx} = A(y_1 y_2'' - y_1'' y_2) = Ay_1 y_2'' - Ay_1'' y_2 = y_1 Ay_1'' y_2 = y_1 A y_2 - Ay_1'' y_2 \quad (1)$$

ahora bien como $y_1 \wedge y_2$ satisfacen la ecuacion diferencial

$$A(x)y'' + B(x)y' + P(x)y = 0$$

$\rightarrow A(x)y'' = -B(x)y' - P(x)y$, con lo cual
$$A(x)y_1'' = -B(x)y_1' - P(x)y_1$$
$$A(x)y_2'' = -B(x)y_2' - P(x)y_2$$

reemplazo en (1)
$$A(x)\frac{dW}{dx} = y_1(-B(x)y_2' - P(x)y_2) - (-B(x)y_1' - P(x)y_1)y_2$$

$$A(x)\frac{dW}{dx} = -B(x)y_1y_2' - P(x)\cancel{y_1}y_2 + B(x)y_1'y_2 + P\cancel{(x)y_1}y_2$$

$$A(x)\frac{dW}{dx} = B(x)(-y_1y_2' + y_1'y_2) \rightarrow A(x)\frac{dW}{dx} = -B(x)(y_1y_2' - y_1'y_2)$$

$$A(x)\frac{dW}{dx} = -B(x)\,W(x)$$

B si $A(x) \neq 0$ $\quad \frac{dW}{dx} \rightarrow \frac{-B(x)}{A(x)} Wx$

$$\int \frac{dW}{W} = \int -\frac{B(x)}{A(x)}\,dx$$

$$\ln W = -\int \frac{B(x)}{A(x)}\,dx + c$$

$$e^{\ln W} = e^{-\int \frac{B(x)}{A(x)}dx + C} = e^{\int \frac{B(x)}{A(x)}dx}\; e^{C}$$

$$\boxed{W(x) = K e^{-\int \frac{B(x)}{Ax}dx}}$$

51. La **ecuación de Euler** de segundo orden es de la forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0 \qquad (22)$$

donde a, b, c son constantes. **(a)** Verifique que si $x > 0$, entonces la sustitución $v = \ln x$ transforma la ecuación (22) en la ecuación lineal de coeficientes constantes

$$a\frac{d^2y}{dv^2} + (b-a)\frac{dy}{dv} + cy = 0 \qquad (23)$$

con variable independiente v. **(b)** Si las raíces r_1 y r_2 de la ecuación característica en (23) son reales y distintas, concluya que la solución general de la ecuación de Euler en (22) es $y(x) = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}$.

a. sea $v = \ln x$ entonces por regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\,\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\cdot\frac{1}{x}$$

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \qquad (A)$$

Derivando la expresión (A) respecto a x $\rightarrow \frac{d}{dx}\left(x.\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dv}\right)$

$$1.\frac{dy}{dx} + x.\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dv}\left(\frac{dy}{dv}\right)\cdot\frac{dv}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dv^2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dv^2} \rightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dv^2} - x\frac{dy}{dx}$$ pero por (A)

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dv^2} - \frac{dy}{dv} \qquad (B)$$

• Reemplazando las expresiones (A) ∧ (B) en la ecuación de euler $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ obtenemos la ecuación de coeficientes constantes

$$\rightarrow a\left(\frac{d^2y}{dv^2} - \frac{dy}{dv}\right) + b\left(\frac{dy}{dv}\right) + cy = 0$$

$$a\frac{d^2y}{dv^2} - a\frac{dy}{dv} + b\frac{dy}{dv} + cy = 0 \rightarrow a\frac{d^2y}{dv^2} + (b-a)\frac{dy}{dv} + cy = 0$$

B. Suponiendo que la ecuación auxiliar corresponde $ar^2 + (b-a)r + c = 0$ tiene raíces reales distintas así la solución sera

$$y(v) = C_1e^{-4v} + C_2e^{3v}$$

$$y(x) = C_1e^{-4\ln x} + C_2e^{3\ln x}$$

$$= C_1e^{\ln x^{-4}} + C_2e^{\ln x^3}$$

$$= C_1x^{-4} + C_2x^3$$

55. $x^2y'' + xy' = 0$

utilizando el resultado obtenido en el ejercicio 51 a traves de la sustitucion $v = \ln x$ obtendriamos que la ecuacion de euler,

$x^2y'' + xy' = 0$; $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$

se transforma en $\frac{d^2y}{dv^2} = 0$, cuya ecuacion $r^2 = 0$

tiene raices $r_1 = r_2 = 0$

$\rightarrow \quad y(v) = c_1 e^{0 \cdot v} + c_2 v e^{0 \cdot v}$

$y(v) = c_1 + c_2 v$

$y(x) = c_1 + c_2 \ln x$

SECCION 3.2

(19) $x^3y^{(3)} - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$; $y(1)=6$ $y_1 = x$

$y'(1)=14$ $y_2 = x^2$

$y''(1)=22$ $y_3 = x^3$

Teniendo esta ecuación donde sabemos que y_1, y_2, y_3 son soluciones L.I de la ecuación homogenea

$y(x) = Ax + Bx^2 + Cx^3$ Solución general de la FDO euler homogenea de orden 3

Como tengo el PVI

$\rightarrow y(x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 \rightarrow A+B+C = 6$

$y'(x) = A + 2Bx + 3Cx^2 \rightarrow A+2B+3C = 14$

$y''(x) = 2B + 6Cx \rightarrow 2B+6C = 22$

⇨ usamos Symbolab : $A=1$

$B=2$

$C=3$

La solución particular a la FDO de euler de grado tres homogenea es.

$$y(x) = x + 2x^2 + 3x^3$$

(23) $y'' - 2y' - 3y = 6$; $y(0)=3$ $y_c = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$

$y'(0)=11$ $y_p = -2$

La solución general de una FDO de orden superior NO homogenea $y'' - 2y' - 3y = 6$ es ...

... $y(x) = y_c(x) + y_p(x) \rightarrow$ Una solución particular de la FDO de orden superior NO homogenea

$\downarrow$

Esta es la solución general de la FDO homogenea asociada $y'' - 2y' - 3y = 0$

b) $y'' - 2y' - 5y = 0$ Imaginemos que hay una sol $y(x)$ que cumple $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$ y $y''(0) = c$

En $x = 0$ $y(0)$ Debe cumplir lo requerido por la EDO.

$$y''(0) - 2y'(0) - 5y(0) = 0$$
$$y''(0) = 2y'(0) + 5y(0)$$
$$c = 2(0) + 5(1) = 5$$

Entonces el PVI
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 0$$
$$y''(0) = c$$

Solo podrá cumplirse por la solución $y(x)$ si y Solo si $c = 5$.

$C_1 = 1$.

La solución al PVI de la ecuación no homogenea $y'' - 2y' - 3y = 6$ es $y(x) = e^{-x} + 4e^{3x} - 2$

31) a) La ecuación diferencial de 2^{do} orden

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (1)$$

acepta una solución $y = y(x)$ en un intervalo I, si tenemos el PVI en el punto $x = a \subset I$; entonces (1) puede representarse como una ecuación que se cumple para $\forall x \in I$:

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

Si $x = a \in I$ $\quad y''(a) + py'(a) + qy(a) = 0 \quad (2)$

esto es una ecuación que relaciona las tres y's ~~Esta~~ $y(a)$, $y'(a)$, $y''(a)$; la ecuación (2) asegura que $y''(a)$ se expresa en terminos de las ~~dos~~ otras dos:

$$y''(a) = py'(a) - qy(a).$$

2) 3.5

$$W = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{bmatrix}$$

$$\frac{dW}{dx} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{bmatrix}}_{0} + \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{bmatrix}}_{0} + \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2'' & y_3'' \end{bmatrix}$$

Ya que hay dos Filas iguales, el determinante es 0.

$$\frac{dW}{dx} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{bmatrix}$$

(36) Sea $y_1(x)$ una solución conocida de la ecuación diferencial $y'' + P(x)y + Q(x)y = 0$; lo cual significa que $\boxed{y_1'' + P(x)y_1 + Q(x)y_1 = 0}$ (A)

Supongamos entonces que la segunda solución a la ecuación diferencial, tiene la forma $y_2 = v(x)y_1$ donde $v(x) \neq$ constante pues y_1 y y_2 se asumen L.I reemplazando: $y_2 = v(x)y_1$

$$\to y_2' = v'(x)y_1 + v(x)y_1'$$

$$\to \underline{y_2''} = v''y_1 + v'y_1' + v'y_1' + vy_1''$$

$$\Rightarrow \underline{v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''}$$

en la ecuación $y'' + P(x)y + Q(x)y = 0$, obtenemos

$$\to (v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'') + P(x)(v'y_1 + vy_1') + Q(x)vy_1 = 0$$

$$\to v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' + P(x)v'y_1 + P(x)vy_1' + Q(x)vy_1 = 0$$

$$v''y_1 + 2v'y_1' + P(x)v'y_1 + vy_1'' + P(x)vy_1' + Q(x)vy_1 = 0$$

$$v''y_1 + 2v'y_1' + P(x)v'y_1 + vy_1'' + P(x)vy_1' + Q(x)vy_1 = 0$$

$$v''y_1 + 2v'y_1' + P(x)v'y_1 + v\left(\boxed{y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1}\right) = 0$$

es cero debido por (A)

entonces $v''y_1 + 2v'y_1' + P(x)v'y_1 = 0$

ahora bien, puesto que $y_1(x) \neq 0$ (sol no trivial)

dividiendo cada termino por y_1:

$$v'' + 2\frac{y_1'}{y_1}v' + P(x)v' = 0$$

$$v'' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + P(x)\right)v' = 0 \quad (B)$$

es una ecuación diferencial que permitirá encontrar $v(x)$ puesto que las funciones y_1 y $P(x)$ son conocidas haciendo el cambio de variable $v'(x) = U(x)$ tenemos que $v'' = U'(x)$

así que (B) queda:

asi que concluimos que si conocemos una solución y_1 de la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0$$

entonces la segunda solución sera:

$$y_2(x) = y_1(x)\,v(x)$$ donde $v(x)$ viene dada por (C)

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int p(x)dx}$$

$$v(x) = y_1 \; e$$

$$v'(x) = \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int p(x)dx}$$; con lo cual concluimos que

$$v(x) = \int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int p(x)dx} \qquad (C)$$

42 $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0 \quad (-1 < x < 1); \;\; y_1(x) = x$

$$(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$$ Sabiendo que $y_1(x) = x$ es solución en $(-1,1)$

$$y'' + \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{2}{1-x^2}y = 0$$

Suponemos que $y_2(x) = v(x)\cdot y_1(x) = v(x)\cdot x$ será la segunda solución

L.I $(v(x) \neq c)$:

$$y_2'(x) = v'(x)\cdot x + v(x)\cdot 1$$

$$y_2''(x) = v''(x).x + v'(x).1 + v'(x) = v''(x)x + 2v'(x)$$

$$\Rightarrow \quad y_2''(x) + \frac{2x}{1-x^2}y_2'(x) - \frac{2}{1-x^2}y_2(x) = 0$$

$$(v''(x)\cdot x + 2v'(x)) + \frac{2x}{1-x^2}(v'(x)\cdot x + v(x)) - \frac{2}{1-x^2}v(x)\cdot x = 0$$

$$(v''(x)\cdot x + 2v'(x)) + \frac{2x}{1-x^2}(v'(x)\cdot x + v(x)) - \frac{2}{1-x^2}v(x)\cdot x = 0$$

$$x v''(x) + 2v'(x) + \frac{2x^2}{1-x^2}v'(x) + \cancel{\frac{2x\,v(x)}{1-x^2}} - \cancel{\frac{2x\,v(x)}{1-x^2}} = 0$$

$$x v''(x) + \left(2 + \frac{2x^2}{1-x^2}\right)v'(x) = 0$$

$$v''(x) + \left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{1-x^2}\right)v'(x) = 0$$

hacemos cambio de variable $U(x) = v'(x) \Rightarrow U'(x) = v''(x)$
reemplazando esto en la ecuacion anterior:

$$\frac{dU}{dx} + \left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{1-x^2}\right)U = 0$$

$$\frac{dU}{dx} = -\left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{1-x^2}\right)U$$

$$\frac{dU}{U} = -\left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{1-x^2}\right)dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int - \left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{1-x^2} \right) dx$$

$$\ln v = -2\ln|x| + \ln|1-x^2|$$

$$\ln v = \ln|x|^{-2} + \ln|1-x^2| = \ln\left| x^{-2}(1-x^2) \right|$$ y como $-1 < x < 1$

$$\ln v = \ln(x^{-2}(1-x^2))$$

$$e^{\ln v} = e^{\ln(x^{-2}(1-x^2))} \Rightarrow v(x) = x^{-2}(1-x^2) = x^{-2} - 1$$

pero

$$\vartheta'(x) = x^{-2} - 1$$

$$\vartheta(x) = \int x^{-2} - 1 \, dx$$

$$\vartheta(x) = -x^{-1} - x$$

$$\Rightarrow y_2(x) = \vartheta(x) \cdot x = (-x^{-1} - x) \cdot x = -1 - x^2$$

$$y_2(x) = -(1+x^2)$$

Entonces la solucion general :

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

$$y(x) = C_1 x + C_2(-(1+x^2))$$

$$y(x) = C_1 x + b_2(1+x^2)$$

SECCION 3.3

19 Resolver la E.D.O $y^{(3)} + y'' - y' - y = 0$

como la ecuacion diferencial es lineal de orden superior de coeficientes constantes y homogenea

$\Rightarrow$ la ecuacion auxiliar es $r^3 + r^2 - r - 1 = 0$

$$\Rightarrow r^2(r+1) - (r+1) = 0$$
$$(r+1)(r^2-1) = 0$$
$$(r+1)(r-1)(r+1) = 0$$
$$(r+1)^2 \cdot (r-1) = 0$$

las raices de la ecuacion auxiliar son $r_1 = 1$
$r_2 = r_3 = -1$ multiplicidad $k=2$

la solucion general $y(x) = c_1 e^{1 \cdot x} + c_2 e^{-1 \cdot x} + c_3 x e^{-1 \cdot x}$

39) $y(x) = (A + Bx + Cx^2)e^{2x}$

$y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + Cx^2e^{2x}$ por el teorema 2

las raices de la ecuaciones auxiliar son $r = 2$; $k = 3$

→ Ecuacion auxiliar $(r-2)(r-2)(r-2) = 0$

$$(r-2)^3 = 0$$

$$r^3 - 3r^2 \cdot 2 + 3 \cdot r \cdot 2^2 - 2^3 = 0$$

$$r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0$$

Entonces la E.D.O orden superior lineal homoge de coef constantes sera

$$y^{(3)} - 6y'' + 12y' - 8y = 0$$

42) $y(x) = (A + Bx + Cx^2)\cos 2x + (D + Ex + Fx^2)\operatorname{sen} 2x$

$y(x) = A\cos 2x + Bx\cos 2x + Cx^2\cos 2x + D\operatorname{sen} 2x + Ex\operatorname{sen} 2x + Fx^2\operatorname{sen} 2x$

$y(x) = [A\cos 2x + D\operatorname{sen} 2x] + x[B\cos 2x + E\operatorname{sen} 2x] +$
$x^2[C\cos 2x + F\operatorname{sen} 2x]$

$y(x) = e^{0x}[A\cos 2x + D\operatorname{sen} 2x] + e^{0x}x[B\cos 2x + E\operatorname{sen} 2x]$

Teorema las raices de la ecu auxiliar son $r = 0 \pm 2i$
$k = 3$ → ecuacion aux:

$$[(r-(0+2i))(r-(0-2i))]^3 = 0$$

$$[((r-0)-2i)((r-0)+2i)]^3 = 0$$

$$[(r-0)^2 - (2i)^2]^3 = 0 \qquad i = \sqrt{-1}$$

$$[r^2 + 4]^3 = 0$$

$$(r^2)^3 + 3(r^2)^2 \cdot 4 + 3(r^2)4^2 + 4^3 = 0$$

$$r^6 + 12r^4 + 48r^2 + 64 = 0$$

Sería

$$y^{(6)} + 12y^{(4)} + 48y'' + 64y = 0$$

58) $x^3y''' + 6x^2y'' + 7xy' + y = 0$

$a = 1$
$b = 6$
$c = 7$
$d = 1$

$v = \ln x$ → convierte ecuac. en de tres en la sigte. EDO orden 3

de coeficientes constantes (homog)

$$\frac{d^3y}{dv^3} + \frac{3d^2y}{dv^2} + \frac{3dy}{dv} + y = 0$$

Cuya ecuación aux es

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$$

$$(r+1)(r+1)(r+1) = 0$$

$$(r+1)^3 = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = r_3 = -1 \quad (k=3)$$

Cuya sln general

$$y(v) = Ae^{-1v} + Bve^{-1v} + Cv^2e^{-1v}$$

$v = \ln x$

$$y(x) = Ae^{-\ln x} + B\ln x\, e^{-\ln x} + C(\ln x)^2 e^{-\ln x}$$

$$y(x) = Ae^{\ln x^{-1}} + B\ln x\, e^{\ln x^{-1}} + C(\ln x)^2 e^{\ln x^{-1}}$$

$$y(x) = \frac{A}{x} + \frac{B\ln x}{x} + \frac{C(\ln x)^2}{x} \quad \text{Si } x >$$

55) $x^3 y''' + x^2 y'' - x y' = 0$

$a = 1$
$b = -1$
$c = 1$
$d = 0$

$v = \ln x \Rightarrow$ convierte la ecuación de euler de orden 3 en la sigte EDO de orden 3 de coeficientes const (homog)

$$\frac{d^3y}{dv^3} - 4\frac{d^2y}{dv^2} + 4\frac{dy}{dv} = 0$$

cuya ecuación aux es:

$$r^3 - 4r^2 + 4r = 0$$

$$r(r^2 - 4r + 4) = 0 \rightarrow r_1 = 0$$

$r_2 = r_3 = 2$

$r = 2$

sln general es:

$y(v) = Ae^{0 \cdot v} + Be^{2 \cdot v} + Cve^{2v}$

$y(v) = A + Be^{2v} + Cv e^{2v}$ pero $v = \ln x$

$y(x) = A + Be^{2\ln x} + C \ln x\, e^{2\ln x}$

$y(x) = A + Be^{\ln x^2} + C \ln x \cdot e^{\ln x^2}$

$y(x) = A + Bx^2 + Cx^2 \ln x$

SECCION 3.4

3. Una masa de 3 kg está unida al extremo de un resorte estirado 20 cm por una fuerza de 15 N. Es puesto en movimiento con posición inicial $x_0 = 0$ y velocidad inicial $v_0 = -10$ m/s. Encuentre la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento resultante.

(3) Puesto que la masa de 3 kg es estirada 20 cm = 0.2 mt por una fuerza de 15 N, podemos encontrar la constante de elasticidad del resorte $K = \frac{F}{x} = \frac{15N}{0.2mt} = 75 \frac{N}{mt}$

Puesto que el movimiento es libre y sin fuerza de amortiguamiento, ya conocemos que la elongación del resorte $x(t)$ viene dada por:

$$x(t) = x_0 \cos(w_0 t) + \frac{v_0}{w_0} \operatorname{Sen}(w_0 t)$$

donde la Frecuencia angular es $w_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ $= \sqrt{\frac{75}{3}} \frac{rad}{seg} = 5 \frac{rad}{seg}$ y puesto que $x_0 = 0$ mt y $v_0 = -10 \frac{mt}{seg}$; obtenemos: $x(t) = -2 \operatorname{Sen}(5t)$

concluyendo así que la amplitud del movimiento es $C = 2$ metros con un periodo $T = \frac{2\pi}{w_0}$ seg $= \frac{2\pi}{5}$ seg ≈ 1.25 seg.

4. Un cuerpo con masa de 250 g está unido al extremo de un resorte estirado 25 cm por una fuerza de 9 N. En el tiempo $t = 0$ el cuerpo es movido 1 m a la derecha, estirando el resorte y aplicando un movimiento con una velocidad inicial de 5 m/s a la izquierda. (**a**) Encuentre $x(t)$ en la forma $C\cos(\omega_0 t - \alpha)$. (**b**) Obtenga la amplitud y el periodo de movimiento del cuerpo.

---

(4) (a) Puesto que la masa $250\,gr \doteq 0.25\,kg$ es estirada $25\,cm = 0.25\,m$ por una fuerza de $9\,N$, podemos encontrar la constante de elasticidad del resorte $K = \frac{F}{x} = \frac{9\,N}{0.25\,m} = 36\,\frac{N}{m}$

puesto que el movimiento es libre y sin fuerza de amortiguación ya conocemos que la elongación del resorte $x(t)$ viene dada por:

$$x(t) = \frac{1}{w_0}\sqrt{x_0^2 w_0^2 + v_0^2}\,\cos\left(w_0(t-\delta)\right)$$

donde la frecuencia angular es en este caso

$$w_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{36}{0.25}}\,\frac{rad}{seg} = 12\,\frac{rad}{seg}$$

y puesto que $x_0 = 1\,mt$ y $v_0 = -5\,\frac{mt}{seg}$; con lo cual el tiempo de retardo $\delta = \frac{\alpha}{w_0} = \frac{1}{w_0}\left[2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{w_0 x_0}\right)\right] seg$ pues $x_0 > 0$ y v_0

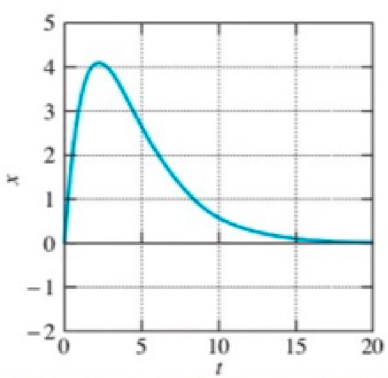
entonces así $\delta = 0.49\ seg.$

Con lo cual $X(t) = \frac{13}{12}\cos\left(12(t-0.49)\right)$

$$X(t) = \frac{13}{12}\cos(12t - 5.88)$$

(b) la amplitud del movimiento es $C = \frac{13}{12}$ mt y el periodo del movimiento es $T = \frac{2\pi}{w_0}$ seg $= \frac{\pi}{6}$ seg ≈ 0.52 seg.

13. Presuma que la masa en el sistema masa-resorte-amortiguador con $m = 10$, $c = 9$ y $k = 2$ se pone en movimiento con $x(0) = 0$ y $x'(0) = 5$. (**a**) Encuentre la función de la posición $x(t)$ y muestre que su gráfica es como la de la figura 3.4.14. (**b**) Identifique qué tan lejos se mueve la masa hacia la derecha antes de iniciar su viaje de regreso al origen.



a. Primero se calcula el coeficiente de amortiguamiento critico C_{cr}

$$C_{cr} = \sqrt{4km} = 4\sqrt{5}\ \frac{kg}{seg}$$

→ tenemos que el movimiento es sobreamortiguado pues $C > C_{cr}$, sabemos entonces que la elongacion del resorte vendra dada por:

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{p^2 - w_0^2}}\left[(v_0 - x_0 r_2)e^{r_1 t} + (x_0 r_1 - v_0)e^{r_2 t}\right]$$

donde $r_1 = -p + \sqrt{p^2 - w_0^2}$

$r_2 = -p - \sqrt{p^2 - w_0^2}$ con $p = \frac{c}{2m}$ ∧ $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

son la raices (reales y distintas) de la ecuacion auxiliar asociada.

Para este caso, $p = \frac{9}{20}\ \frac{rad}{seg}$ ∧ $w_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \frac{rad}{seg}$

con lo cual $r_1 = -0.4\ seg^{-1}$ ∧ $r_2 = -0.5\ seg^{-1}$

ya que $x(0) = x_0 = 0$ mt ∧ $x'(0) = v_0 = 5\ \frac{mt}{seg}$

tenemos que:

$$x(t) = 10\left[5e^{-0.4t} - 5e^{-0.5t}\right] mt$$
$$x(t) = 50\left[e^{-0.4t} - e^{-0.5t}\right] mt$$

13. Se debe encontrar el valor de $x_{max}(t)$:

$$x'(t) = 50\left[-0.4e^{-0.4t} + 0.5e^{-0.5t}\right] = 0$$

$$\rightarrow -0.4e^{-0.4t} + 0.5e^{-0.5t} = 0$$

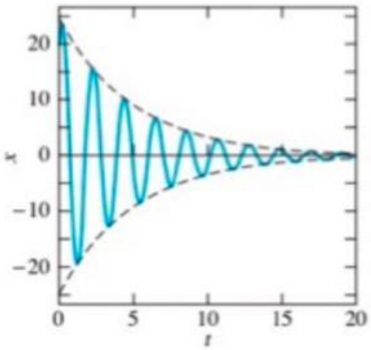
$$0.5e^{-0.5t} = 0.4e^{-0.4t}$$

$$\frac{5}{4} = e^{0.1t} \quad \rightarrow \ln(5/4) = \ln e^{0.1t} = 0.1t$$

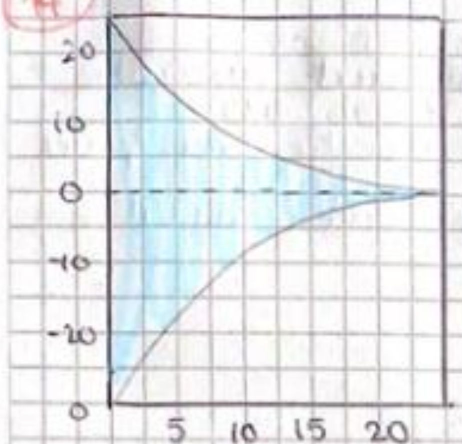
$$\rightarrow t = 2.33 \text{ seg}$$

Ahora bien, puesto que $x''(t) = 50\left[0.16e^{-0.4t} - 0.25e^{-0.5t}\right]$ y $x''(2.33) < 0$ concluimos que la masa se desplaza a la derecha con amplitud maxima $x_{max} = x(2.23) \approx 4.09$ mt al cabo de los 2.23 seg aproximadamente despues del inicio de su movimiento.

14 Asuma que la masa en un sistema masa-resorte-amortiguador con $m = 25$, $c = 10$ y $k = 226$ se pone en movimiento con $x(0) = 20$ y $x'(0) = 41$. (**a**) Encuentre la función de la posición $x(t)$ y advierta que su gráfica es como la de la figura 3.4.15. (**b**) Compruebe el pseudo-periodo de las oscilaciones y las ecuaciones de las "curvas envolventes" que están punteadas en la figura.



14



a) Empiezo por calcular el coeficiente de amortiguación crítico C_{cr}

$$C_{cr} = \sqrt{4km} \approx 150{,}33\ kg/s$$

⊙ Tengo que el movimiento es sub-amortiguado ya que $c < C_{cr}$; entonces que la elongación del resorte viene dada por:

$$x(t) = 1/\omega_1 \sqrt{x_0^2 \omega_1^2 + (v_0 + p x_0)^2}\; e^{-pt} \cdot \cos(\omega_1 (t - \delta_1))$$

Donde $x(0) = x_0 = 20$; $x'(0) = v_0 = 41$; $p = c/2m = 1/5$

; $\omega_0^2 = k/m = 9{,}04$

$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2} = 3$ y donde $\delta_1 = 1/\omega_1 \tan^{-1}\left(\frac{v_0 + p x_0}{\omega_1 x_0}\right) = 0{,}215$

Con lo cual $x(t) = 25\, e^{-1/5 t} \cos(3(t - 0{,}21)) = 25 e^{-0{,}2t} \cos(3t - 0{,}63)$

22. Un peso de 12 lb (masa $m = 0.375$ slugs en unidades fps) está unido tanto a un resorte suspendido verticalmente que se estira 6 in., como a un amortiguador que le proporciona una resistencia de 3 lb por cada ft/s de velocidad. (**a**) Si el peso es colocado 1 ft por debajo de su posición de equilibrio estático y se suelta en el tiempo $t = 0$, encuentre la función de la posición $x(t)$. (**b**) Verifique la frecuencia, la amplitud variante en el tiempo y el ángulo de fase del movimiento.

Hallamos $k = \frac{F}{x} = \frac{12\ lb}{6 in} = \frac{12\ lb}{6 \cdot \frac{1}{12} ft} = 24 \frac{lb}{ft}$

-Tenemos $c = 3\ lb/ft/seg$ y se tiene que $x(0) = +1 ft$

y $x'(0) = 0 \frac{ft}{seg}$ · Puesto que hay amortiguamiento, encontramos el coeficiente de amortiguamiento crítico:

$$C_{cr} = \sqrt{4km} = 6 \frac{lb}{ft/seg}$$

Entonces concluimos que $c < C_{cr}$, por lo tanto el movimiento es subamortiguado, con lo cual la ecuación de movimiento esta dada por:

$$x(t) = \frac{1}{\omega_1} \sqrt{x_0^2 \omega_1^2 + (v_0 + p x_0)^2}\, e^{-pt} \cdot \cos(\omega_1(t - s_1))$$

en donde $x(0) = x_0 = 1 ft$, $x'(0) = v_0 = 0 \frac{ft}{seg}$, $p = \frac{c}{2m} = 4 \frac{rad}{seg}$,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{rad}{seg} = \frac{8 rad}{seg} \to \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2} = \sqrt{48} \frac{rad}{seg} = 4\sqrt{3} \frac{rad}{seg}$ es la frecuencia del movimiento subamortiguado.

y donde $s_1 = \frac{1}{\omega_1} \tan^{-1}\left(\frac{v_0 + p x_0}{\omega_1 x_0}\right) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{\pi}{6}$ seg

con lo cual

$$x(t) = \frac{1}{4\sqrt{3}} 8 e^{-4t} \cos\left(4\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$x(t) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\, e^{-4t} \cos(4\sqrt{3}\, t - \pi/6)$$

Entonces la amplitud variante con el tiempo es $A = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ y el angulo fase $\alpha_2 = \pi/6$ rad.

23 Este problema aborda el modelo sumamente simplificado de un carro de 3200 lb de peso (masa $m = 100$ slugs en unidades fps). Asuma que el sistema de suspensión actúa como un solo resorte y su moderador de impactos como un solo amortiguador, de tal manera que su vibración vertical satisface la ecuación (4) con los valores apropiados de los coeficientes. (**a**) Encuentre el coeficiente de rigidez k del resorte si el carro sufre vibraciones libres de 80 ciclos por minuto (ciclos/min) cuando el amortiguador está desconectado. (**b**) Con el amortiguador conectado, el carro entra en vibración al manejarse sobre un bache y los movimientos amortiguados resultantes tienen una frecuencia de 78 ciclos/min. ¿Después de cuánto tiempo la amplitud tendrá variaciones de 1% de su valor inicial?

23) a) Tengo que $m = 100$ slugs $\rightarrow W_0 = \sqrt{k/100}$ y como

$$W_0 = 80 \frac{\text{ciclos}}{\text{min}} = 80 \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ seg}} = \frac{8\pi}{3} \text{ rad/seg}$$

$$\rightarrow W_0^2 = k/100$$

$$100\left(\frac{8\pi}{3}\right) = k \rightarrow k \approx 7018 \text{ slug/seg} = 7018 \frac{\frac{lb}{ft}}{seg} \cdot \frac{1}{\cancel{seg}} = 7018 \text{ lb/ft}$$

b) $$W_1 = 78 \frac{\text{ciclos}}{\text{min}} = 78 \cdot \frac{2\pi}{60 \text{ seg}} = \frac{13\pi}{5} \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

ya que $W_1 = \sqrt{w_0^2 - p^2} = \frac{13\pi}{5} \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$

$$\rightarrow w_0^2 - p^2 = \left(\frac{13\pi}{5}\right)^2$$

$$\left(\frac{8\pi}{3}\right)^2 - \left(\frac{13\pi}{5}\right)^2 = p^2$$

$$p \approx 1.86 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

⇨ Busco para que el tiempo de la amplitud variante en el tiempo del movimiento subamortiguado; va a tener variaciones del 1% del valor inicial en $t = 0$:

$$Ce^{-pt} = 1/100\, C$$

$$e^{-pt} = 1/100 \rightarrow \ln e^{-pt} = \ln(1/100)$$

$$-pt = \ln(1/100)$$

$$t = -1/p \ln(1/100) \text{ seg}$$

$$t \approx 2{,}47 \text{ seg}$$

SECCION 3.5

5) Resolver $y'' + y' + y = \text{sen}^2 x$

observemos que $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$\rightarrow y'' + y' + y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ (1)

sea $y_p(x) = A + B\cos 2x + C\,\text{sen}\, 2x$

$y'_p(x) = -2B\,\text{sen}\, 2x + 2C\cos 2x$

$y''_p(x) = -4B\cos 2x - 4C\,\text{sen}\, 2x$

Como $y_p(x)$ satisface la ecuación (1)

$y''_p + y'_p + y_p = A + (B + 2C - 4B)\cos 2x + (C - 2B - 4C)$
$\text{sen}\, 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$\rightarrow A = \frac{1}{2}$

$2C - 3B = -\frac{1}{2}$

$-2B - 3C = 0$

$\rightarrow A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{26}$, $C = -\frac{1}{13}$

$\rightarrow y_p(x) = A + B\cos 2x + C\,\text{sen}\, 2x$

$y_p(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{26}\cos 2x - \frac{1}{13}\,\text{sen}\, 2x$

$y_p(x) = \frac{1}{26}(13 + 3\cos 2x - 2\,\text{sen}\, 2x)$

$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$

$y(x) = e^{-\frac{1}{2}}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right) + C_2\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] + \frac{1}{26}$
$(13 + 3\cos 2x - 2\,\text{sen}\, 2x)$

Donde la sln a la ecuación diferencial homogenea asociada se obtuvo como sigue.

$y'' + y' + y = 0$ ecuación homogenea asociada

$r^2 + r + 1 = 0$

$r = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$y_c(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$

19. Resolver $y^{(5)} + 2y^{(3)} + 2y'' = 3x^2 - 2$

Primero obteremos la solucion de la ecuacion homogenea asociada:

$$y^5 + 2y^3 + 2y'' = 0$$

con ecuacion auxiliar cuyas Raices son: Wolfram Alpha

$r^5 + 2r^3 + 2r^2 = 0$ $\quad r = 0$ multiplicidad 2

$r = -0.77$

$r = 0.38 \pm 1.56i$

Asi que la solucion de la ecuacion homogenea asociada es:

$$y_c(x) = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} + C_3 e^{-0.77x} + e^{0.38x}(C_4 \cos 1.56x + C_5 \operatorname{Sen} 1.56x)$$

$$y_c(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-0.77x} + e^{0.38x}(C_4 \cos(1.56x) + C_5 \operatorname{Sen}(1.56x))$$

La propuesta para una solucion particular a la ecuacion no homogenea seria: teniendo que $f(x) = 3x^2 - 2$

$$y_p(x) = A + Bx + Cx^2$$

Como los terminos resaltados se encuentran duplicados en la solucion $y_c(x)$, entonces debemos multiplicar por x^s s el menor entero, tal que ya no encontremos duplicacion de terminos de $y_p(x)$ en $y_c(x)$; esto se logra escogiendo $s = 2$.

$\rightarrow y_p(x) = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4$; de esta forma

$y'_p(x) = 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3$

$y''_p(x) = 2A + 6Bx + 12Cx^2$

$y^3_p(x) = 6B + 24Cx$

$y^4_p(x) = 24C$

$y^5_p(x) = 0$

Se reemplazan esas expresiones en la edo

$$y_p^{(5)} + 2y_p^{(3)} + 2y^{(2)} + 3x^2 - 2$$

$$(0) + 2(6B + 24Cx) + 2(2A + 6Bx + 12Cx^2) = 3x^2 - 2$$

$$\rightarrow (24C)x^2 + (12B + 48C)x + (12B + 4A) = 3x^2 - 2$$

con lo cual concluimos al comparar término a término que

$$24C = 3 \rightarrow \boxed{C = 1/8}$$

$$12B + 48C = 0 \rightarrow 12B + C = 0$$

$$\boxed{B = -1/2}$$

$$12B + 4A = -2 \rightarrow -6 + 4A = -2$$

$$\boxed{A = 5/4}$$

con lo cual tenemos $y_p(x) =$

$$y_p(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^4$$

25) Debemos encontrar la forma apropiada de $y_p(x)$ (sin necesidad de establecer el valor de las constantes) de la ED

$$y'' + 3y' + 2y = x(e^{-x} - e^{-2x})$$

$$y'' + 3y' + 2y = xe^{-x} - xe^{-2x}$$

la ecuacion auxiliar es: $r^2 + 3r + 2 = 0$

cuyas raices son: $r = -1$ y $r = -2$

$$\Rightarrow y_c(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

Puesto que $f(x) = xe^{-x} - xe^{-2x}$, la sln particular y_p debe en principio proponerse como combinación lineal de todas las funciones en $f(x)$ y sus derivadas que sean L.I

$$\Rightarrow y_p(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + Ce^{-2x} + Dxe^{-2x}$$

sin embargo los terminos sombreados en y_p estan duplicados en la sln complementaria, así que debemos multiplicar respectivamente cada función L.I con sus derivadas por x^{s_1} y x^{s_2} con s_1 y s_2 los menores enteros positivos de tal manera que ya no esten duplicados en $y_c(x)$ esto se logra si $s_1 = 2$ y $s_2 = 2$

$$\Rightarrow y_p(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}\,x^2 + Ce^{-2x} + Dxe^{-2x}$$

$$y_p(x) = Ax^2e^{-x} + Bx^3e^{-x} + Cx^2e^{-2x} + Dx^3e^{-2x}$$

39. Resolver el P.V.I $y^3 + y'' = x + e^{-x}$ dado $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ $\wedge$ $y''(0) = 1$

Resolvemos la edo homogenea asociada $y^{(3)} + y'' = 0$ cuya ecuacion auxiliar es

$r^3 + r^2 = 0$ $\rightarrow$ $r^2(r+1) = 0$ con raices $r = 0$ multiplicidad dos
$r = 1$

$\rightarrow$ $y_c(x) = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0.x} + C_3 e^{-1.x}$

$y_c(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}$

ahora bien para proponer la forma de $y_p(x)$ tenemos en cuenta que $f(x) = x + e^{-x}$ entonces en principio $y_p(x) = Ax + B + Ce^{-x}$
sin embargo los terminos estan duplicados en la solucion complementaria.

· se multiplican cada funcion L.I con sus derivadas por x^{s_1} y x^{s_2}., con s_1 $\wedge$ s_2 los menores enteros positivos de tal manera que ya no esten duplicados en $y_c(x)$ esto se logra si $s_1 = 2$ $\wedge$ $s_2 = 1$

$\rightarrow$ $y_p(x) = (Ax + B)x^2 + (Ce^{-x})x^1$ $\rightarrow$ $y_p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cxe^{-x}$

$\rightarrow$ $y_p'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + Ce^{-x} - Cxe^{-x}$

$y_p''(x) = 6Ax + 2B - Ce^{-x} - [Ce^{-x} + Cxe^{-x}(-1)]$

$= 6Ax + 2B - 2Ce^{-x} + Cxe^{-x}$

$y_p^3(x) = 6A + 2Ce^{-x} + Ce^{-x} + Cxe^{-x}(-1)$

$= 6A + 3Ce^{-x} - Cxe^{-x}$

Reemplazando todo esto en la edo

$$y_p^3 + y_p'' = x + e^{-x}$$

$$(6A + 3Ce^{-x} - Cxe^{-x}) + (6Ax + 2B - 2Ce^{-x} + Cxe^{-x}) = x + e^{-x}$$

$$(6A)x + (3C - 2C)e^{-x} + (-C + C)xe^{-x} + (6A + 2B) = x + e^{-x}$$

Comparando termino a termino concluimos que:

$6A = 1 \rightarrow A = 1/6$

$C = 1 \rightarrow 1 + 2B = 0$

$6A + 2B = 0 \rightarrow 1 + 2B = 0$

$B = -1/2$

$\rightarrow y_p(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + xe^{-x}$ así la solucion general sera:

$Y(x) = Y_c(x) + Y_p(x) \rightarrow Y(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + xe^{-x}$

Para satisfacer el PVI debemos encontrar las constantes C_1, C_2 y C_3 pero antes de eso encontramos:

$Y(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + xe^{-x}$

$Y'(x) = C_2 - C_3e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x + e^{-x} - xe^{-x}$

$Y''(x) = C_3e^{-x} + x - 1 - e^{-x} - [e^{-x} + xe^{-x}(-1)]$

$= C_3e^{-x} + x - 1 - 2e^{-x} + xe^{-x}$

tenemos que: $Y(0) = 1 \rightarrow C_1 + C_3 = 0 \rightarrow C_1 + 4 = 1 \rightarrow C_1 = -3$

$Y'(0) = 0 \rightarrow C_2 - C_3 + 1 = 0 \rightarrow C_2 - 4 + 1 = 0 \rightarrow C_2 = 3$

$Y''(0) = 1 \rightarrow C_3 - 1 - 2 = 1 \rightarrow C_3 = 4$

Así la solucion al PVI es

$Y(x) = -3 + 3x + 4e^{-x} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + xe^{-x}$