Evoluta de una curva.

Dada una curva *f(t) = (x(t), y(t))* su *evoluta* es el lugar geométrico de los centros de curvatura de cada punto de *f*.

Vector tangente y vector normal a una curva.

Siendo *f* una curva regular cualquiera, *s* su longitud de arco medida desde un punto tomado como origen, si consideramos la función

$$s \rightarrow f(s) = (x(s), y(s))$$

se tiene que $ds^2 = dx^2 + dy^2$ de lo cual

$$\| f'(s) \| = \frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} = 1 \qquad (1)$$

Se define el vector tangente en el punto *f(s)* como

$$T(s) = f'(s) \qquad (2)$$

que por (1) es unitario.

Dado un vector cualquiera, X, se representa por $\perp X$ al vector con el mismo módulo que X y ortogonal a X. En particular, siendo $X=(X_1, X_2)$ se elige

$$\perp X = (-X_2, X_1)$$

Se define el vector normal en el punto *f(s)* como el vector N unitario y ortogonal a T:

$$N = \perp T$$

T, N forman una base ortonormal en el plano de modo que para $X \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$X = (X \cdot T)T + (X \cdot N)N \qquad (3)$$

Por otra parte:

$$T \cdot T = 1 \Rightarrow T' \cdot T = 0$$
$$N \cdot N = 1 \Rightarrow N' \cdot N = 0$$
$$T \cdot N = 0 \Rightarrow T' \cdot N = -T \cdot N'$$

$$T' = (T' \cdot T)T + (T' \cdot N)N = 0T + kN = kN$$
$$N' = (N' \cdot T)T + (N' \cdot N)N = -kT + 0N = -kT$$

Se denomina curvatura, k, al módulo de T'(s), salvo signo. A su inversa se le llama radio de curvatura, r.

$$k(s) = T'(s) \cdot N(s) \qquad (4)$$

$$r(s) = \frac{1}{|k(s)|} \qquad (5)$$

Cambio de parámetro.

Sustituimos el parámetro *s* por otro *t* relacionados mediante la función

$$t \rightarrow s(t)$$

Siendo s' continua, s'(t) ≠ 0, ∀t del dominio. Necesariamente entonces s' tendrá el mismo signo en todo su recorrido. Por comodidad consideramos s'>0.

Definiendo entonces

$$g(t) = f(s(t)) = (x(s(t)), y(s(t)))$$

Se tiene

$$g'(t) = f'(s(t))\, s'(t) = (x'(s(t))\, s'(t) , y'(s(t))\, s'(t))$$

De donde, como ‖f'(s)‖ = 1, se tiene ‖g'(t)‖ = s'(t).

Definimos una nueva función para el vector tangente en el punto g(t) = f(s(t)) mediante

$$U(t) = T(s(t))$$

$$U(t)=T(s(t))=f'(s(t))=\frac{g'(t)}{\| g'(t)\|}=\frac{g'(t)}{s'(t)}=(x'(s(t)), y'(s(t)))$$

Siguiendo el desarrollo:

$$\perp U(t) = \perp T(s(t)) = (-y'(s(t)) , x'(s(t))) ;$$
$$\|\perp U(t)\|^2 = y'(s(t))^2 + x'(s(t))^2 = 1 \Rightarrow$$
$$\|\perp U(t)\| = 1$$

$$N(s(t))) = \perp T(s(t)) = (-y'(s(t)) , x'(s(t)))$$

Definiendo M(t) = N(s(t)), queda:

$$M(t) = \perp U(t) = (-y'(s(t)) , x'(s(t)))$$

$$U'(t) = (x''(s(t))\, s'(t) , y''(s(t))\, s'(t)) = T'(s(t))\, s'(t)$$

$$k(s(t))=T'(s(t))\cdot N(s(t))=\frac{U'(t)}{s'(t)}\cdot M(t)=x'(s(t))\,y''(s(t))-y'(s(t))\,x''(s(t))$$

Si llamamos *(u(t) , w(t))* a las componentes de *g(t)* y κ(t) = k(s(t)) se sigue:

$$u(t) = x(s(t)) ; \quad w(t) = y(s(t))$$

Tendremos:

$$u'(t)=x'(s(t))\,s'(t)\Rightarrow$$

$$\boxed{x'(s(t))=\frac{u'(t)}{s'(t)}}$$

$$u''(t)=x''(s(t))s'(t)^2+x'(s(t))s''(t)\Rightarrow$$

$$\boxed{x''(s(t))=\frac{1}{s'(t)^2}\left(u''(t)-u'(t)\frac{s''(t)}{s'(t)}\right)}$$

Análogamente

$$\boxed{y'(s(t))=\frac{w'(t)}{s'(t)}}$$

$$\boxed{y''(s(t))=\frac{1}{s'(t)^2}\left(w''(t)-w'(t)\frac{s''(t)}{s'(t)}\right)}$$

Con lo que nos queda:

$$\kappa(t)=\frac{u'(t)}{s'(t)}\cdot\frac{1}{s'(t)^2}\left(w''(t)-w'(t)\frac{s''(t)}{s'(t)}\right)-\frac{w'(t)}{s'(t)}\cdot\frac{1}{s'(t)^2}\left(u''(t)-u'(t)\frac{s''(t)}{s'(t)}\right)=$$

$$=\frac{1}{s'(t)^3}\left[u'(t)w''(t)-w'(t)u''(t)-\left[u'(t)w'(t)-w'(t)u'(t)\right]\frac{s''(t)}{s'(t)}\right]$$

Y simplificando

$$\boxed{\kappa(t)=\frac{1}{s'(t)^3}\left[u'(t)w''(t)-w'(t)u''(t)\right]}$$

Teniendo en cuenta que

$$g'(t) = (u'(t), w'(t))$$

$$\perp g'(t) = (-w'(t) , u'(t))$$

$$g''(t) = (u''(t) , w''(t))$$

Podemos expresar la curvatura mediante la fórmula

$$\boxed{\kappa(t)=\frac{1}{\| g'(t)\|^3}\, g''(t)\cdot\perp g'(t)}$$

Correspondientemente se define el radio de curvatura como función de *t* por la fórmula

$$\rho(t) = r(s(t))$$

Por lo que obviamente

$$\rho(t) = \frac{1}{|\kappa(t)|}$$

Ecuación de la evoluta.

Siendo *f* una curva regular definida por *t* ➞ *f(t)* y llamando *c* a su evoluta, la ecuación de esta viene dada por

$$c(t) = f(t) + \rho(t)\, M(t)$$

Según lo anterior se puede escribir esta ecuación en la forma

$$\boxed{c(t) = f(t) + \frac{1}{\kappa(t)\,\|f'(t)\|}\left(\perp f'(t)\right)}$$

Círculo osculador.

Se denomina círculo osculador de una curva en un punto al que tiene como radio y centro los de curvatura en ese punto.
Se demuestra que entre todas las circunferencias tangentes a la curva en ese punto la osculatriz es la de mayor contacto con la curva.
Geogebra permite el trazado directo de la circunferencia osculatriz a una curva en un punto, lo que puede usarse para construir evolutas como lugares geométricos.