Hoja de problemas sobre Programación Lineal

CURSO	**TEMA**	**WWW.DANIPARTAL.NET**
1ºBach	progLINEAL Problemas	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

INFORMACIÓN GENERAL

Hoja de problemas sobre Programación Lineal.

Recuerda que el web del IES Ayala posee multitud de exámenes resueltos de Selectividad de cursos anteriores:

https://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/ficheros/andaluciaccss.html

PROBLEMA 1

a) Represente la región factible definida por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$$x + 2y \leq 13$$

$$x - y \leq 4$$

$$x - 2y \geq -7$$

$$x + y \geq 5$$

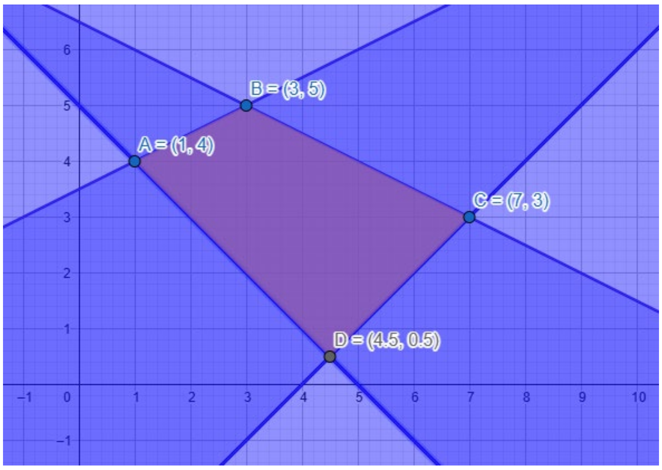
b) Calcule los valores máximo y mínimo de la función objetivo:

$$F(x, y) = x + y$$

En la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

Ya conocemos la forma de razonar para resolver cada inecuación: Dibujamos la recta asociada a la inecuación con ayuda de dos puntos de la recta. La recta divide el plano en dos mitades. Tomamos un punto que no pertenece a la recta y sustituimos las coordenadas de ese punto en la inecuación, para determinar que parte del plano satisface las condiciones de la inecuación.

Con ayuda de Geogebra, la región factible queda determinada por la siguiente superficie acotada y convexa. Los vértices son los cortes de los respectivos sistemas 2x2 formado por todas las parejas de rectas asociadas a las inecuaciones.



Por el Teorema Fundamental de la Programación Lineal, el ejercicio de optimización de una función objetivo sobre una superficie acotada y convexa, tiene solución en al menos uno de los vértices. Por lo tanto, evaluamos $F(x, y) = x + y$ en cada vértice.

$F(1,4) = 1 + 4 = 5$

$F(3,5) = 3 + 5 = 8$

$F(7,3) = 7 + 3 = 10$

$F(4.5,0.5) = 4.5 + 0.5 = 5$

En el punto B(7,3) se alcanza la imagen más grande. Máximo de la función objetivo.

Los puntos A(1,4) y D(4.5,0.5) alcanzan la imagen más pequeña. Todos los puntos del segmento que une los puntos A y B minimizan la función objetivo.

PROBLEMA 2

Con el fin de recaudar dinero para el viaje de fin de curso, los alumnos de un instituto van a poner a la venta dos tipos de bolsas de merienda. El primer tipo contendrá dos bocadillos, un refresco y una pieza de fruta y el segundo tipo tendrá un bocadillo, un refresco y dos piezas de fruta. Por cada bolsa del primer tipo cobrarán 6 euros y por las del segundo tipo 5 euros.

Sabiendo que disponen de 120 bocadillos, 70 refrescos y 110 piezas de fruta y que se tiene garantizada la venta de todas las bolsas, ¿cuántas convendría preparar de cada tipo para que la cantidad de dinero obtenida por su venta sea máxima y a cuánto asciende la misma? ¿Es posible que vendan 40 bolsas de cada tipo? ¿Hay alguna posibilidad de que el importe de las ventas sea de 410 euros?

Identificamos variables:

$x \rightarrow$ número de bolsas tipo 1

$y \rightarrow$ número de bolsas tipo 2

La cantidad total de bocadillos no puede superar la cantidad de 120. Por lo tanto:

$2x + y \leq 120$

El número total de refrescos está acotado a 70 unidades. Es decir:

$x + y \leq 70$

Mientras que el número de piezas de fruta no puede superar las 110 unidades:

$x + 2y \leq 110$

Contamos, como de costumbre, con las condiciones de no negatividad:

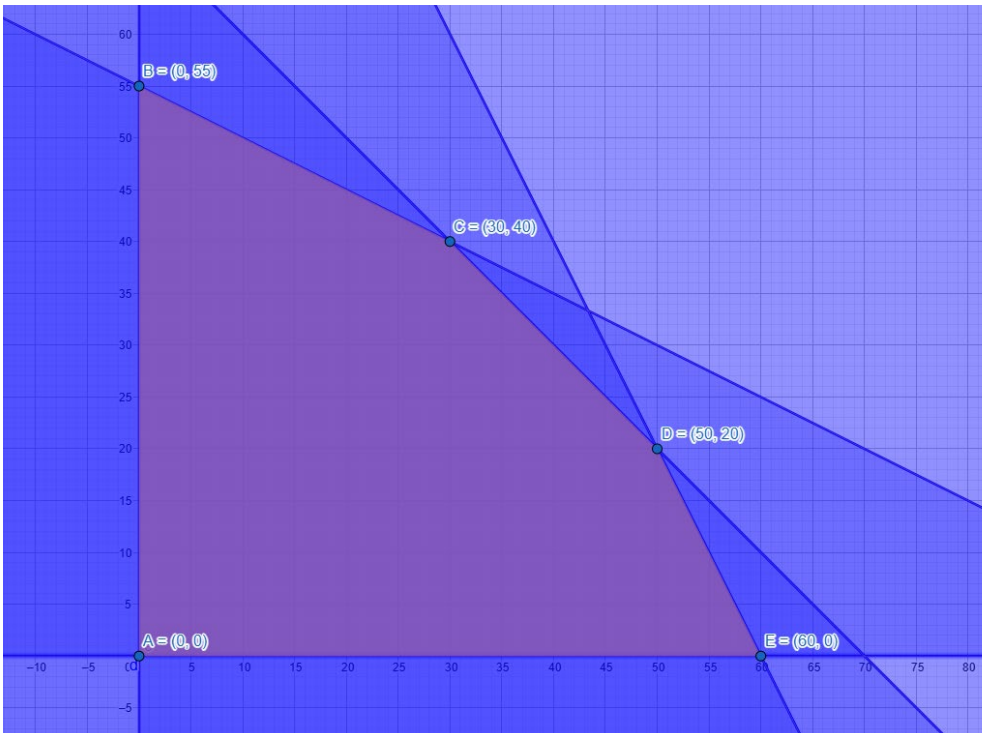
$x \geq 0$

$y \geq 0$

El dinero recogido por la venta íntegra de las bolsas es la función a maximizar. Cada bolsa tipo 1 se vende a 6 euros, y cada bolsa tipo 2 se vende a 5 euros.

$f(x,y) = 6x + 5y$

Con Geogebra, dibujamos la región factible.



Por el Teorema Fundamental de la Programación Lineal, el ejercicio de optimización de una función objetivo sobre una superficie acotada y convexa, tiene solución en al menos uno de los vértices. Por lo tanto, evaluamos la función objetivo en cada vértice.

f(x,y) = 6x + 5y

A(0,0) → f(0,0) = 0

B(0,55) → f(0,55) = 275

C(30,40) → f(30,40) = 180 + 200 = 380

D(50,20) → f(50,20) = 300 + 100 = 400

E(60,0) → f(60,0) = 360

La máxima ganancia económica se obtiene con la venta de 50 bocadillos de tipo 1 y 20 bocadillos de tipo 2. Siendo la ganancia de 400 euros.

No podemos vender 40 bolsas de cada tipo porque el punto (40,40) se encuentra fuera de la región factible.

Y no podemos obtener unas ventas de 410 euros porque hemos demostrado que el valor máximo de las ventas, en la región factible, es de 400 euros.

PROBLEMA 3

Una fábrica de electrodomésticos dispone de dos cadenas de montaje. En una hora de trabajo, la cadena A produce 10 lavadoras y 5 frigoríficos, mientras que la cadena B produce 7 lavadoras y 6 frigoríficos. El coste de cada hora de trabajo en las cadenas A y B es de 1200 y 1500 euros, respectivamente.

La cadena A puede funcionar, como máximo, el doble de horas que la cadena B. Si deben producir como mínimo 400 lavadoras y 280 frigoríficos, calcule las horas de funcionamiento de las cadenas A y B que minimizan el coste de producción de esos electrodomésticos.

La función objetivo que ofrece el coste de producción es:

$$f(x,y) = 1200x + 1500y$$

Siendo "x" el número de horas de funcionamiento de la cadena A. Siendo "y" el número de horas de funcionamiento de la cadena B.

El tiempo de funcionamiento de la cadena A está acotado superiormente, ya que no puede superar el doble de horas de la cadena B. Es decir:

$$x \leq 2y$$

El número de lavadoras que se fabrican es suma de las fabricadas por la cadena A y de las fabricadas por la cadena B. Ese número, debe ser mayor o igual que 400.

$$10x + 7y \geq 400$$

Igualmente, la suma de los frigoríficos de la cadena A y de la cadena B debe ser mayor o igual que 280.

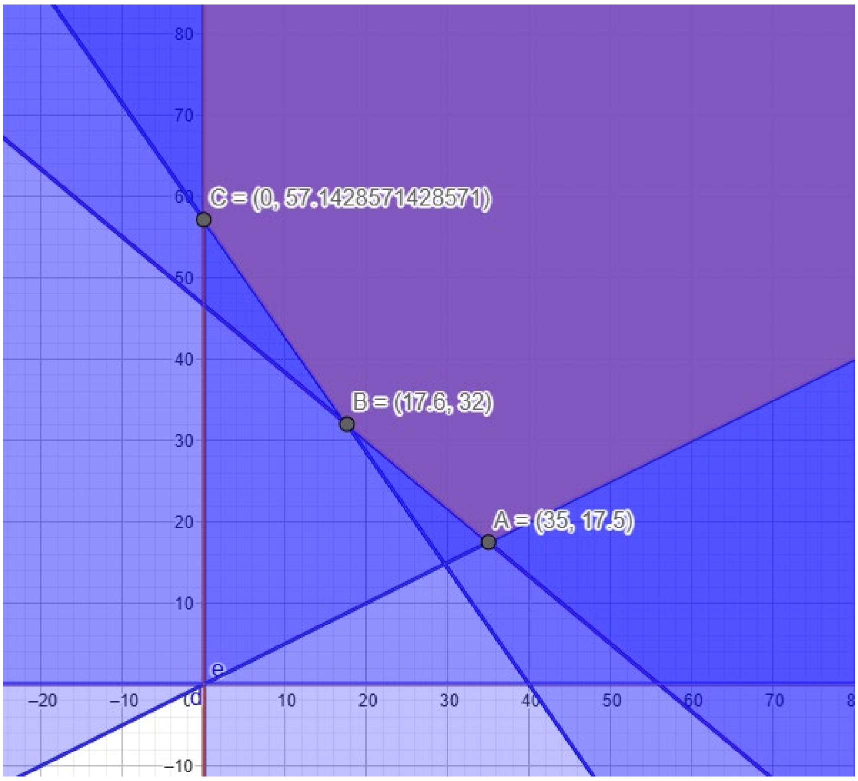
$$5x + 6y \geq 280$$

Además, consideramos las condiciones de no negatividad:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Dibujamos con Geogebra la región factible. Recuerda que, con cada inecuación, hay que dibujar la recta asociada y determinar que región del plano cumple la inecuación.



Aparecen tres vértices en la región convexa no acotada. Al ser no acotada, el Teorema Fundamental no nos confirma la existencia de solución en el problema de optimización. Pero si la hay, tenemos garantizado que la solución aparecería en al menos uno de los vértices.

$$f(x, y) = 1200x + 1500y$$

A(35, 17.5) → f(35, 17.5) = 68250

B(17.6, 32) → f(17.6, 32) = 69120

C(0, 57.14) → f(0, 57.14) = 85714.28

El vértice A(35, 17.5) minimiza los costes de producción. Como es una región no acotada, cabe la posibilidad que la semirecta que parte de A y delimita un lateral de la región contenga infinitos puntos que también minimicen los costes de producción.

Ese lado pertenece a la recta x=2y. Por lo que un punto de esa recta es el (60,30):

(60, 30) → f(60, 30) = 117000

Esta cantidad supera claramente el valor 68250 euros, por lo que el vértice A mínima a nuestra función objetivo. La solución implica que la fábrica A funciona 35 horas, mientras que la fábrica B funciona 17.5 horas.

PROBLEMA 4

Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$x + 2y \geq 7$

$4x - y \geq 1$

$2x - y \leq 4$

$3x + 2y \leq 20$

$x \geq 0$

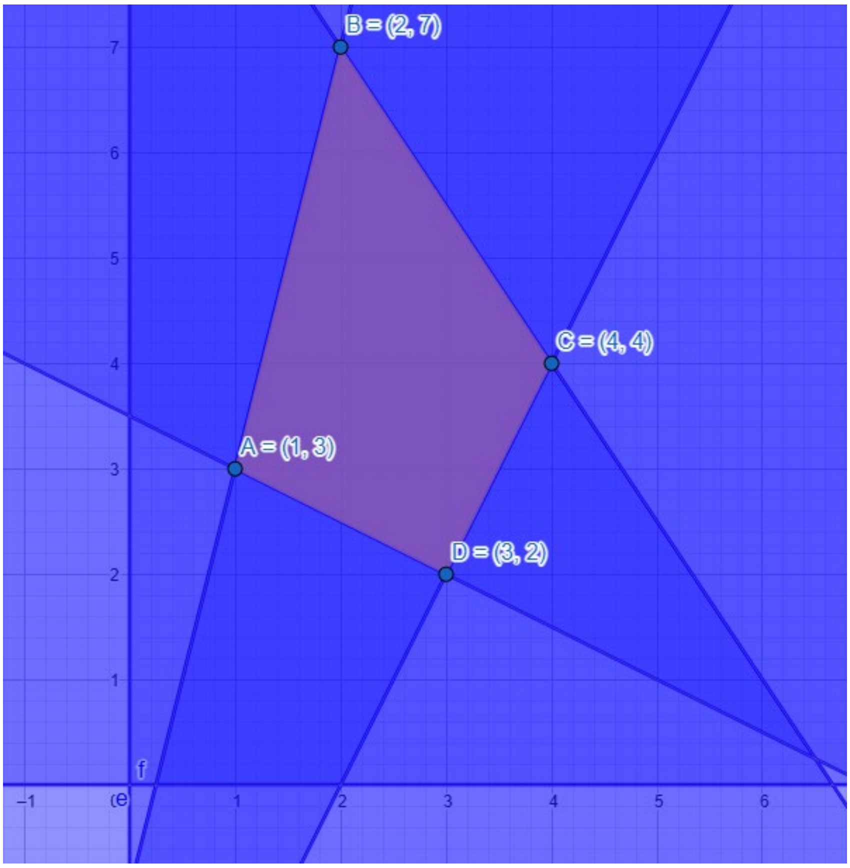
$y \geq 0$

Obtenga el valor mínimo de la función:

$F(x, y) = 2x + y$

En el recinto anterior, así como el punto en el que se alcanza.

Dibujamos con Geogebra la región factible de las seis inecuaciones.



Por el Teorema Fundamental de la Programación Lineal, el ejercicio de optimización de una función objetivo sobre una superficie acotada y convexa, tiene solución en al menos uno de los vértices. Por lo tanto, evaluamos la función objetivo en cada vértice.

A(1,3) → F(1,3) = 2·1+3 = 5

B(2,7) → F(2,7) = 2·2+7 = 11

C(4,4) → F(4,4) = 2·4+4 = 12

D(3,2) → F(3,2) = 2·3+2 = 8

El valor mínimo de la función objetivo es 5 y se alcanza en el vértice A(1,3).

PROBLEMA 5

Un cocinero tiene que hacer el postre para una cena y le han encargado dos de sus mejores creaciones: Delicia Roja y Delicia Negra.

Para elaborar 1 kg de Delicia Roja son necesarias 3 tarrinas de fresas y 1 tableta de chocolate y para elaborar 1 kg de Delicia Negra se necesita 1 tarrina de fresas y 2 tabletas de chocolate. Dispone de 15 tarrinas de fresas y 10 tabletas de chocolate.

Además, la cantidad de Delicia Negra no debe ser inferior a 1'5 kg y tampoco debe ser superior al doble de Delicia Roja. Si cada kilogramo de Delicia Roja le reporta un beneficio de 3 euros y el de Delicia Negra 5 euros, averigüe qué cantidad de cada postre debe elaborar para conseguir un beneficio máximo y a cuánto asciende ese beneficio.

Las incógnitas son los kilogramos a elaborar de Delicia Roja (x) y de Delicia negra (y). Si cocinamos x kilogramos de Delicia Roja e y kilogramos de Delicia Negra, estaremos gastando un total de 3x + 1y tarrinas de fresas. Por lo tanto:

$3x + y \leq 15$ (ya que tenemos un máximo de 15 tarrinas de fresas disponible).

De igual forma, estaremos gastando un total de 1x + 2y tarinas de chocolate. Por lo tanto:

$x + 2y \leq 10$ (porque contamos, como máximo, con 10 tarrinas de chocolate)

Debemos cocinar más de 1,5 kg de Delicia Negra. Es decir:

$y \geq 1,5$

La cantidad de Delicia Negra no puede superar al doble de Delicia Roja. Por lo tanto:

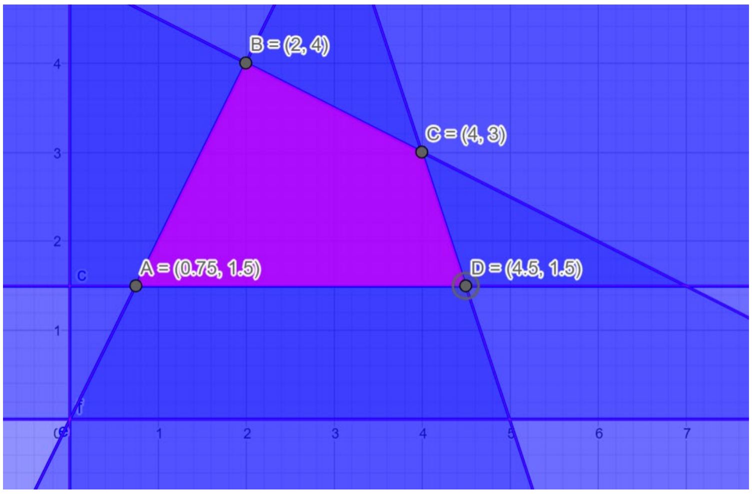
$y \leq 2x$

Añadimos las condiciones clásicas de no negatividad:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Y dibujamos con Geogebra la región factible solución.



Los vértices de la región factible se obtienen resolviendo los siguientes sistemas de ecuaciones de las rectas asociadas a las distintas inecuaciones.

$\begin{cases} y = 1.5 \\ y = 2x \end{cases}$ → A(3/4 , 3/2)

$\begin{cases} y = 2x \\ x + 2y = 10 \end{cases}$ → B(2 , 4)

$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x + y = 15 \end{cases}$ → C(4 , 3)

$\begin{cases} y = 1.5 \\ 3x + y = 15 \end{cases}$ → D(9/2 , 3/2)

La función objetivo es la función beneficio. Por cada unidad de "x" (kg de Delicia Roja) se obtienen 3 euros, y por cada unidad de "y" (kg de Delicia Negra) 5 euros.

$$f(x,y) = 3x + 5y$$

Por el Teorema Fundamental de la Programación Lineal, el ejercicio de optimización de una función objetivo sobre una superficie acotada y convexa tiene solución en al menos uno de los vértices. Por lo tanto, evaluamos la función objetivo en cada vértice.

A → f(3/4, 3/2) = 9.75 euros

B → f(2, 4) = 26 euros

C → f(4, 3) = 27 euros

D → f(9/2 , 3/2) = 21 euros

El beneficio máximo se obtiene en el vértice C, con la elaboración de 4 kg de Delicia Roja y 3 kg de Delicia Negra.

PROBLEMA 6

Una confitería elabora dos tipos de tartas, unas de chocolate y otras de merengue y chocolate. Para ello dispone de 100 kg de bizcocho, 80 kg de crema de chocolate y 46 kg de merengue. Para elaborar una tarta de chocolate, se requieren 1 kg de bizcocho y 2 kg de crema de chocolate y para la tarta de chocolate y merengue se requieren 2 kg de bizcocho, 1 kg de crema de chocolate y 1 kg de merengue.

Por cada tarta de chocolate se obtiene un beneficio de 10 euros y de 12 euros por cada una de merengue y chocolate. Suponiendo que se vende todo lo que se elabora, ¿cuántas tartas de cada tipo debe preparar para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál es dicho beneficio?

1 tarta de chocolate requiere:

- 1kg bizcocho
- 2 kg crema de chocolate

1 tarta de chocolate y merengue requiere:

- 2 kg bizcocho
- 1 kg crema de chocolate
- 1 kg merengue

Llamaremos "x" al número de tartas de chocolate a cocinar.

Llamaremos "y" al número de tarta de chocolate y merengue totales.

Como la cantidad máxima de bizcocho es de 100 kg, tendremos la primera restricción:

$$x + 2y \leq 100$$

El máximo de crema de chocolate es de 80 kg, por lo tanto:

$$2x + y \leq 80$$

Y de merengue no podemos gastar más de los 46 kg que poseemos:

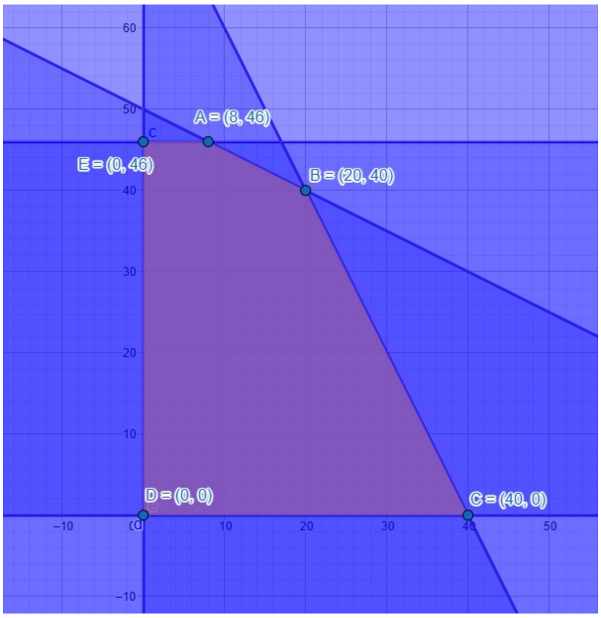
$$y \leq 46$$

Aplicamos las condiciones de no negatividad:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Con Geogebra dibujamos la región factible y obtenemos las intersecciones que forman los vértices.



Por cada kg de tarta de chocolate obtenemos 10 euros. Mientras que por cada kg de tarta de chocolate y merengue obtenemos 12 euros. La función objetivo es el beneficio de la venta de ambas tartas:

$$f(x, y) = 10x + 12y$$

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal nos garantiza solución en el problema de maximización en la región acotada y convexa. Y esta solución afecta, al menos, a uno de los vértices.

Evaluamos en cada vértice.

A → $f(8{,}46) = 80 + 552 = 632$

B → $f(20{,}40) = 200 + 480 = 680$

C → $f(40{,}0) = 400 + 0 = 400$

D → $f(0{,}0) = 0 + 0 = 0$

E → $f(0{,}46) = 0 + 552 = 552$

El máximo beneficio es de 680 euros, y se produce cuando se preparan 20 tartas de chocolate y 40 tartas de chocolate y merengue.

PROBLEMA 7

Se considera la región del plano definida por las siguientes inecuaciones:

$x + y \leq 4$

$x - y \geq 2$

$x + 3y \geq 2$

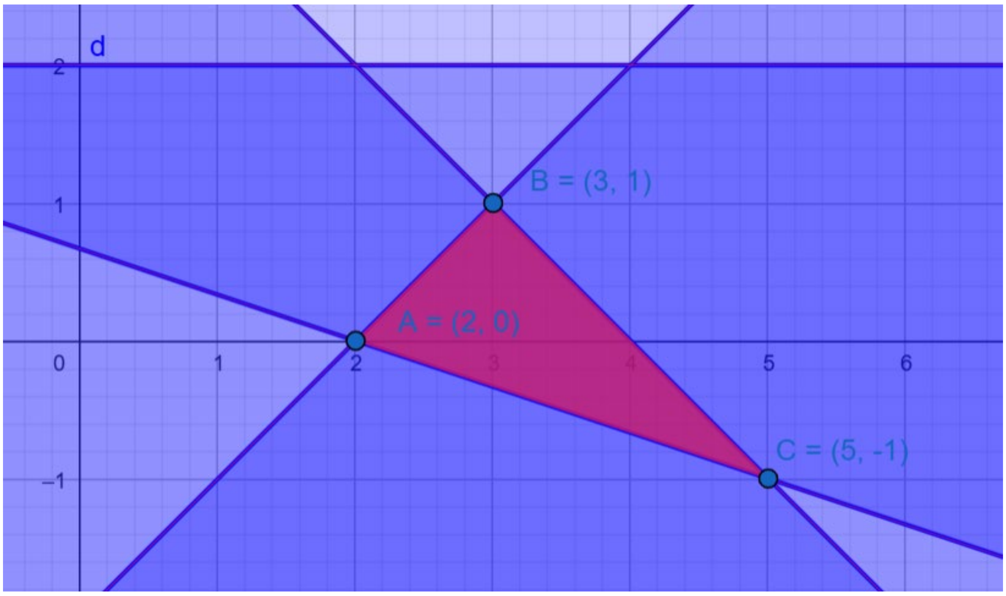
$y \leq 2$

a) Represéntela gráficamente y determine sus vértices.

b) Indique razonadamente si el punto (4, -0’75) pertenece a dicha región.

c) ¿En qué puntos de la región anterior la función F(x, y) = x + y alcanza los valores máximo y mínimo y cuáles son estos valores?

a) Con Geogebra representamos la región factible y los vértices:



b) Determinar a ojo si el punto (4, -0.75) pertenece a la región factible puede llevarnos fácilmente a error. Podemos responder de manera precisa sustituyendo las coordenadas del punto en las inecuaciones y comprobar si cumple todas las inecuaciones:

(4, -0.75)

$x + y \leq 4 \rightarrow 4 + 0 \leq 4 \rightarrow$ Verdadero

$x - y \geq 2 \rightarrow 4 - (-0.75) \geq 2 \rightarrow$ Verdadero

$x + 3y \geq 2 \rightarrow 4 - 2.25 \geq 2 \rightarrow$ **Falso (el punto no pertenece a la región factible)**

$y \leq 2 \rightarrow -0.75 \leq 2 \rightarrow$ Verdadero

c) Por el Teorema Fundamental de la Programación Lineal, el ejercicio de optimización de una función objetivo sobre una superficie acotada y convexa tiene solución en al menos uno de los vértices. Por lo tanto, evaluamos **F(x, y) = x + y**

en cada vértice.

$A(2,0) \rightarrow F(2,0) = 2$

$B(3,1) \rightarrow F(3,1) = 4$

$C(5,-1) \rightarrow F(5,-1) = 4$

Todos los puntos del segmento que une el vértice B con el vértice C maximiza la función objetivo. Alcanzándose el mínimo en el vértice A.

PROBLEMA 8

Consideremos el recinto definido por las siguientes desigualdades:

$7y \leq 15 + 3x$

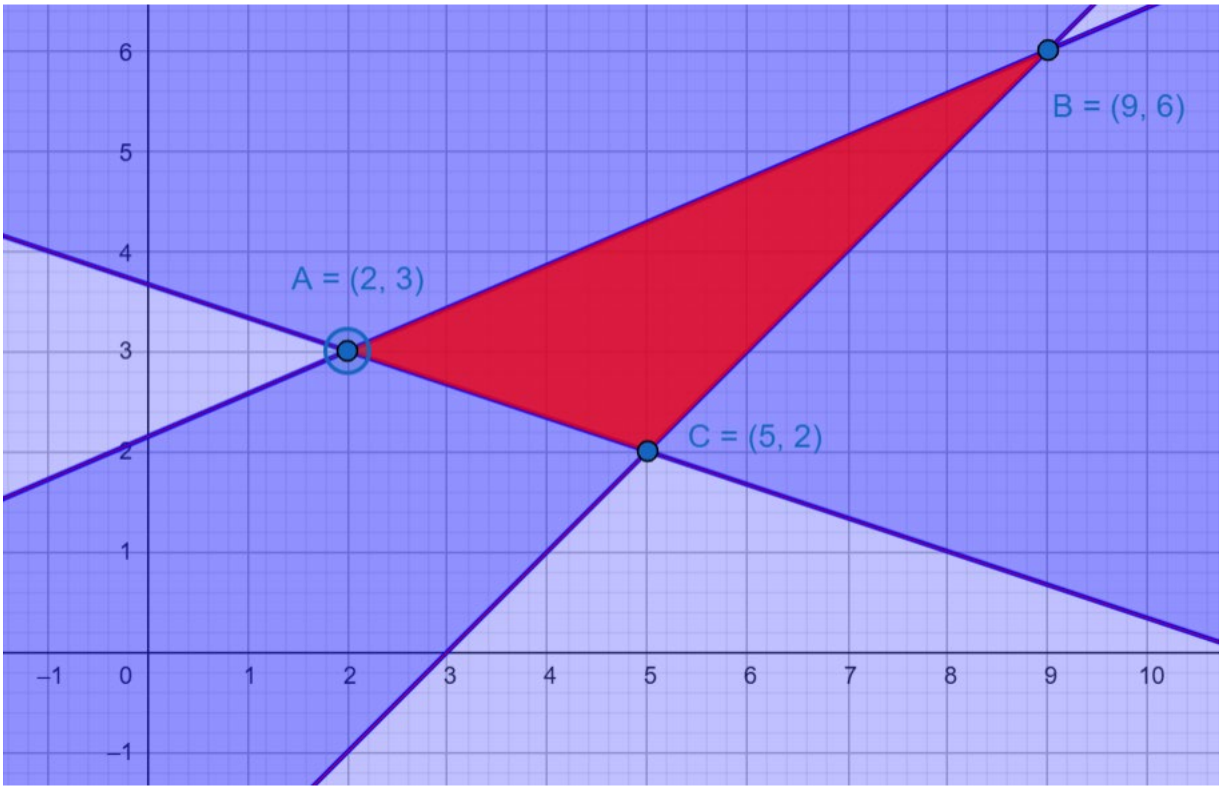
$y \geq x - 3$

$3y \geq -x + 11$

a) Represente gráficamente el recinto anterior y calcule sus vértices.

b) Calcule en qué puntos se alcanzan los valores máximo y mínimo de la función $H(x, y) = 4x - y - 16$ restringida al anterior recinto y obtenga dichos valores.

a) Dibujamos con Geogebra la solución:



b) Por el Teorema Fundamental de la Programación Lineal, el ejercicio de optimización de una función objetivo sobre una superficie acotada y convexa tiene solución en al menos uno de los vértices. Por lo tanto, evaluamos **$H(x, y) = 4x - y - 16$:**

A(2,3) → H(2,3) = 8-3-16 = -11

B(9,6) → H(9,6) = 36-6-16 = 14

C(5,2) → H(5,2) = 20-2-16 = 2

El máximo se alcanza en el vértice B(9,6) mientras que el mínimo aparece en el vértice A(2,3).

PROBLEMA 9

Se considera el recinto cuadrado de vértices (1, 0), (0, 1), (-1, 0) y (0, -1).

Indique en qué puntos del recinto se alcanzan el valor máximo de la función:

F(x, y) = 3x +2y +7

y el valor mínimo de la función:

G(x, y) = x + y + 6

calculando dichos valores.

El enunciado ya nos ofrece los vértices de una región acotada y convexa, por lo que el Teorema Fundamental de la Programación Lineal nos garantiza que el problema de optimización se resuelve en al menos uno de los vértices.

Evaluamos F(x,y) en cada vértice:

F(1,0)=3+0+7=10

F(0,1)=0+2+7=9

F(-1,0)=-3+0+7=4

F(0,-1)=0-2+7=5

El máximo se alcanza en el vértice (1,0).

Evaluamos G(x,y) en cada vértice:

G(1,0)=1+0+6=7

G(0,1)=0+1+6=7

G(-1,0)=-1+0+6=5

G(0,-1)=0-1+6=5

Hay dos vértices que minimizan la función objetivo. Por lo tanto todos los puntos del segmento que une los vértices (-1,0) y (0,-1) son solución del problema de minimización.

PROBLEMA 10

Una empresa comercializa dos tipos de concéntralo de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar, 1 kg de concentrado A se necesitan 4'5 kg de grano de Colombia y 3 kg de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren 7’5 kg de grano de Colombia y 1'5 kg de grano de Costa Rica para elaborar 1 kg de concentrado B.

Actualmente la empresa dispone de un máximo de 67’5 kg de grano de Colombia, 30 kg de grano de Etiopía, y 9 kg de grano de Costa Rica. Además, se exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B.

a) Represente la región factible que describe el problema anterior y determine sus vértices.

b) Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.

c) Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo del tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

1 kg de concentrado A necesita:

- 4,5kg de Colombia
- 3kg de Etiopía

1kg de concentrado B requiere:

- 7,5kg de Colombia
- 1,5kg de Costa Rica

Llamamos "x" al número de kg totales de A. Llamamos "y" al número de kg totales de B.

De Colombia disponemos de 67,5kg como máximo:

$$4{,}5x + 7{,}5y \leq 67{,}5$$

De Etiopía contamos con 30kg como máximo:

$$3x \leq 30 \rightarrow x \leq 10$$

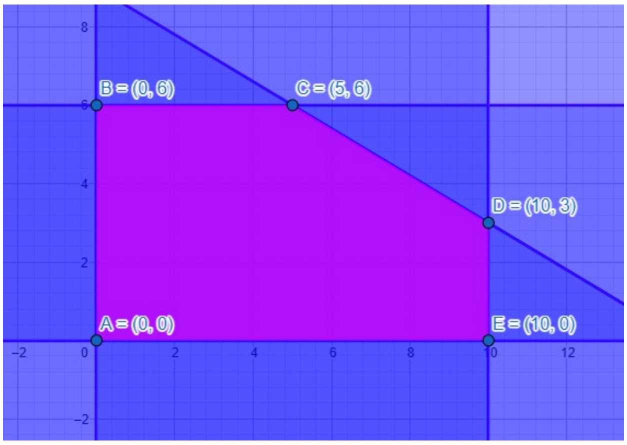
No podemos superar los 9kg de Costa Rica:

$$1{,}5y \leq 9 \rightarrow y \leq 6$$

Aplicamos las clásicas condiciones de no negatividad:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$



El apartado b) nos pregunta si el punto (7,5) pertenece a la región factible. Con Geogebra es sencillo verlo. Pero si dibujamos la región a mano, como ocurrirá en el examen, es complicado responder mirando la gráfica. Porque el punto (7,5) queda muy cerca de uno de los bordes de la región factible.

¿Cómo responder?

Comprobando, operando, si el punto cumple todas las inecuaciones.

Si sustituimos (7,5) en la inecuación $4{,}5x + 7{,}5y \leq 67{,}5$ resulta:

$$4{,}5 \cdot 7 + 7{,}5 \cdot 5 \leq 67{,}5$$

$$69 \leq 67{,}5 \rightarrow Falso$$

En el momento que una inecuación no se cumple, significa que el punto queda fuera de la región factible.

El apartado c) nos da los datos para plantear la función objetivo:

$$f(x, y) = 2x + 4y$$

Evaluamos cada vértice en la función beneficio. EL Teorema Fundamental de la Programación Lineal nos garantiza la existencia de solución en la región acotada y convexa. Y que aparece en al menos uno de los vértices.

A→$f(0,0) = 0$

B→ $f(0,6) = 24$

C→ $f(5,6) = 34$

D→ $f(10,3) = 32$

E→ $f(10,0) = 20$

El beneficio máximo es de 34 euros y aparece para 5kg del concentrado A y 6 kg del concentrado B.

PROBLEMA 11

Una empresa Una librería necesita al menos 14 cajas de rotuladores, 8 cajas de folios y 18 cajas de bolígrafos. Dos distribuidores pueden proporcionarle los materiales, pero solamente los venden en lotes completos. El distribuidor A envía en cada lote 2 cajas de rotuladores, 4 de folios y 1 de bolígrafos. El distribuidor B envía en cada lote 3 cajas de rotuladores, 1 de folios y 7 de bolígrafos. Los costes por lote que se compre a cada distribuidor son de 60 euros y 65 euros respectivamente. ¿Cuántos lotes habrá que comprar a cada distribuidor para que los costes sean mínimos?, ¿cuáles serían esos costes?

Primero detectamos las incógnitas de nuestro problema.

La variable "x" indica el número de lotes a comprar al distribuidor A.

La variable "y" expresa los lotes del distribuidor B.

Un lote de A contiene:

- 2 cajas rotuladores
- 4 cajas folios
- 1 caja bolígrafos

Un lote de B contiene:

- 3 cajas rotuladores
- 1 caja folios
- 7 cajas bolígrafos

Al menos (como mínimo) se requieren 14 cajas de rotuladores. Por lo tanto:

$$2x + 3y \geq 14$$

La librería necesita un mínimo de 8 cajas de folios:

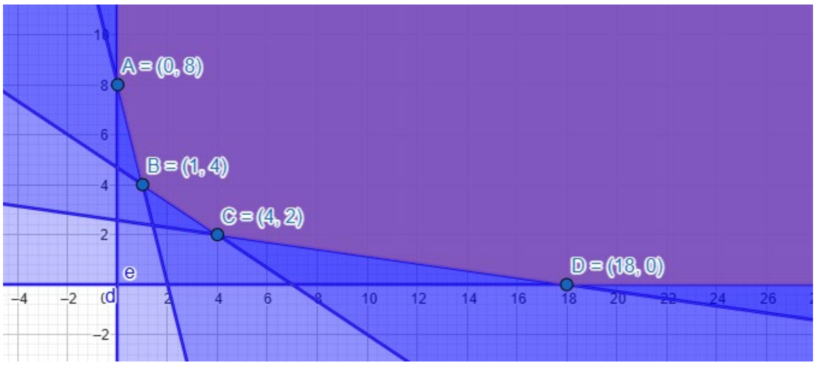
$$4x + y \geq 8$$

Y un mínimo de 18 cajas de bolígrafos:

$$x + 7y \geq 18$$

Las condiciones de no negatividad:

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$



La función costes es la función objetivo. Cada lote de A cuesta 60 euros y cada lote de B cuesta 65 euros. Por lo tanto:

$$f(x,y) = 60x + 65y$$

Estamos ante una región no acotada y convexa. El Teorema fundamental de la programación lineal afirma que, si hay solución, aparecerá en al menos uno de los vértices.

Evaluamos la función objetivo en los vértices de la región factible:

A→$f(0{,}8) = 0 + 520 = 520$

B→ $f(1{,}4) = 60 + 260 = 320$

C→ $f(4{,}2) = 240 + 130 = 370$

d→ $f(18{,}0) = 1080 + 0 = 1080$

Los costes se minimizan comprando 1 lote de la distribuidora A y 4 lotes de la distribuidora B. Como el vértice (1,4) no está situado junto a un lado formado por una semirecta, podemos afirmar que es la solución del problema de minimización Siendo 320 euros la cantidad mínima de los costes.

EJERCICIO 12

Un artesano fabrica collares y pulseras. Hacer un collar le lleva dos horas y hacer una pulsera una hora. El material de que dispone no le permite hacer más de 50 piezas. Como mucho, el artesano puede dedicar al trabajo 80 horas. Por cada collar gana 5 euros y por cada pulsera 4 euros. El artesano desea determinar el número de collares y pulseras que debe fabricar para optimizar sus beneficios.

a) Exprese la función objetivo y las restricciones del problema.

b) Represente gráficamente el recinto definido.

c) Obtenga el número de collares y pulseras correspondientes al máximo beneficio.

La variable "x" indica el número de collares. La variable "y" el número de pulseras.

El número máximo de piezas a fabricar es 50. Por lo tanto:

$$x + y \leq 50$$

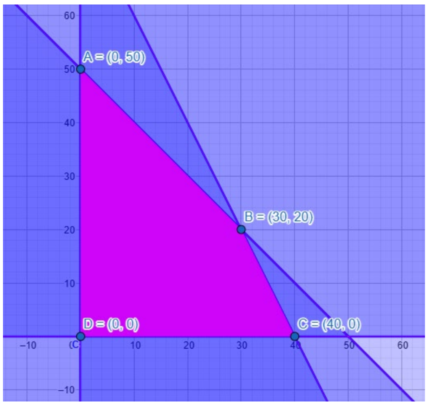
El número máximo de horas de trabajo es de 80 horas. Cada collar conlleva 2 horas. Cada pulsera, una hora:

$$2x + y \leq 80$$

Condiciones de no negatividad:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$



La función objetivo es la función beneficio. Cada collar aporta 5 euros de beneficio. Cada pulsera, 4 euros:

$$f(x,y) = 5x + 4y$$

El Teorema Fundamental de la programación lineal, en una región acotada y convexa, garantiza la solución del problema de maximización. Y esta solución aparece en al menos uno de los vértices de la región factible.

Evaluamos la función objetivo en cada vértice:

A→$f(0{,}50) = 0 + 200 = 200$

B→$f(30{,}20) = 150 + 80 = 230$ → Beneficio máximo de 230€ con 30 collares y 20 pulseras

C→$f(40{,}0) = 200 + 0 = 200$

D→$f(0{,}0) = 0 + 0 = 0$

EJERCICIO 13

Disponemos de 210.000 euros para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A que rinden el 10% y las de tipo B que rinden el 8%. Decidimos invertir un máximo de 130.000 euros en las de tipo A y, coma mínimo, 6.000 euros en las de tipo B. Además, queremos que la inversión en las del tipo A sea menor o igual que el doble de la inversión en B. ¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener máximo interés anual?

La variable "x" indica el dinero invertido en A. La variable "y" indica el dinero invertido en B.

La suma de ambas cantidades no puede superar los 210.000 que disponemos:

$$x + y \leq 210.000$$

La cantidad invertida en A no puede superar (valor máximo) los 130.000 euros:

$$x \leq 130.000$$

El dinero invertido en B debe ser mayor o igual (como mínimo) la cantidad de 6.000 euros:

$$y \geq 6.000$$

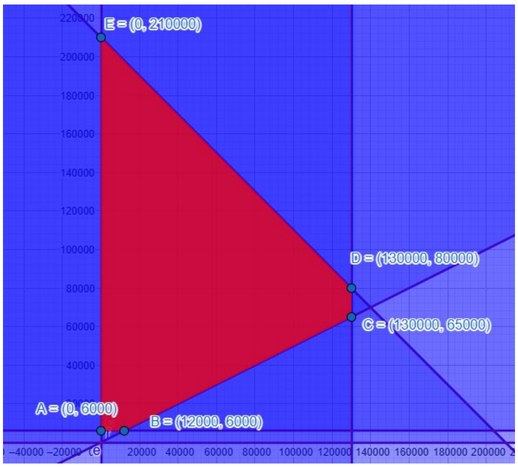
La inversión en A (variable x) es menor o igual que el doble de la inversión en B (variable y).

$$x \leq 2y$$

Condiciones de no negatividad:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$



El máximo interés anual implica sumar el beneficio del dinero invertido en A y el beneficio del dinero invertido en B. El tipo A rinde al 10%. El tipo B rinde al 8%. Por lo tanto:

$$f(x,y) = 0{,}1x + 0{,}08y$$

El Teorema Fundamental de la programación lineal, en una región acotada y convexa, garantiza la solución del problema de maximización. Y esta solución aparece en al menos uno de los vértices de la región factible.

Evaluamos la función en los vértices:

A→$f(0{,}6.000) = 0 + 480 = 480$

B→$f(12.000{,}6.000) = 1.680$

C→$f(130.000{,}65.000) = 18.200$

D→$f(130.000{,}80.000) = 19.400$

D→$f(0{,}210.000) = 16.800$

Interés máximo de 19.400€ invirtiendo 130.000 euros en A y 80.000 euros en B