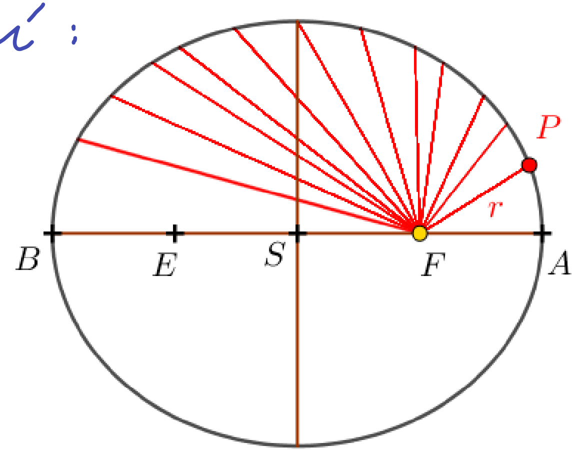
Střední vzdálenost planety od Slunce

- Výklad můžeme sledovat v apletu:

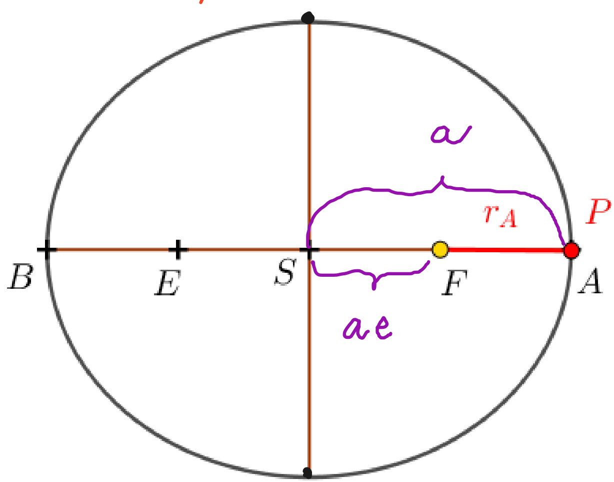
https://www.geogebra.org/m/pmf7fp7q

- Planeta obíhá kolem Slunce po elipse, které je v jejím ohnisku F → vzd. planety r od Slunce se mění:



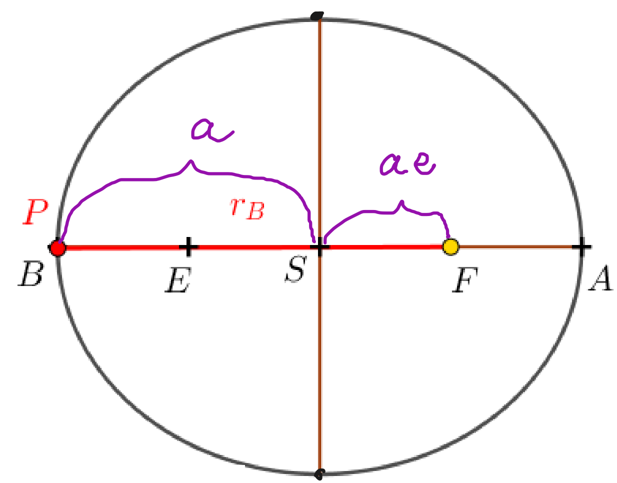
- r je v perihéliu A nejmenší:

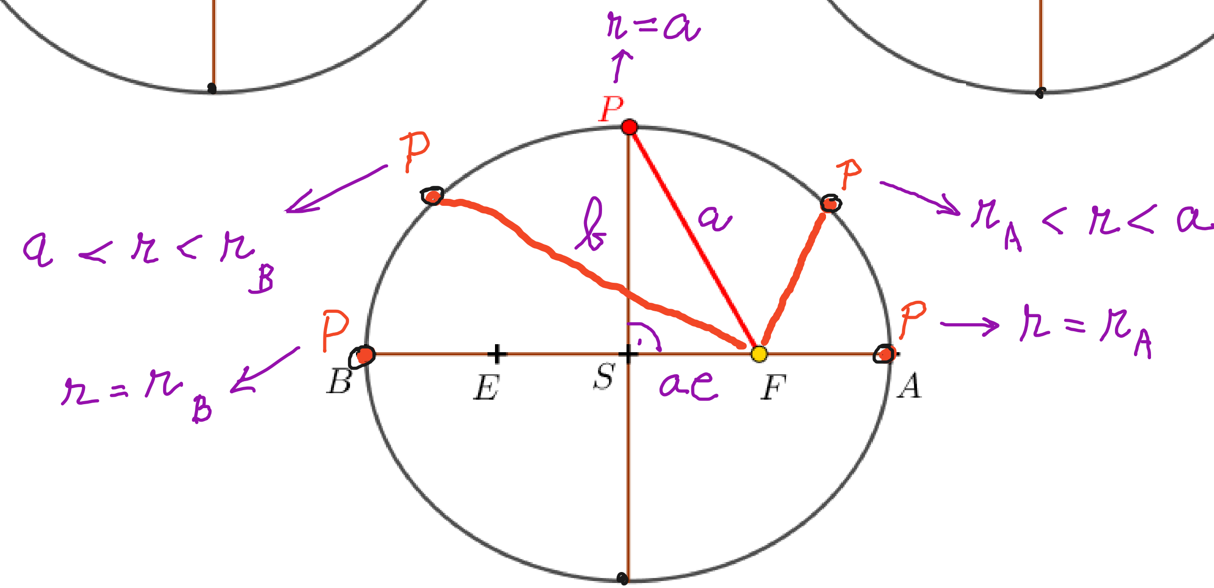
$$r_A = a - ae$$



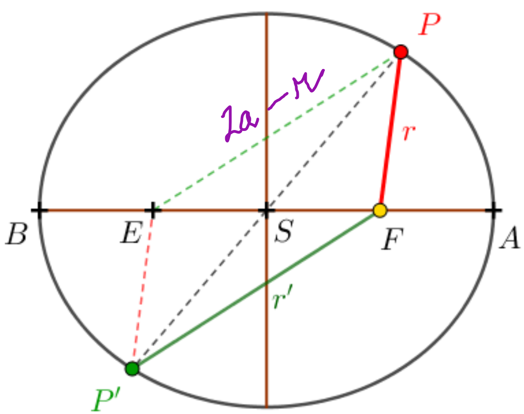
- r je v aféliu B nejmenší:

$$r_B = a + ae$$





- Jaká je střední hodnota r?
- Hypotéza: $\boxed{\text{Není to náhodou } \bar{r} = a\text{?}}$
- Geometrický důkaz:

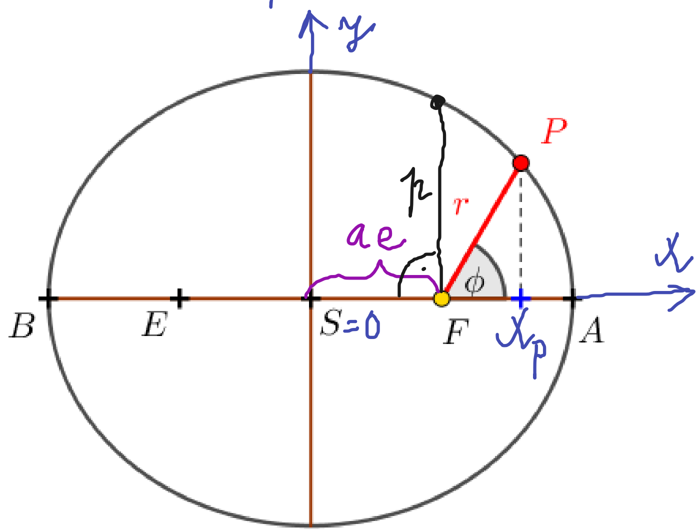


- Ke každé poloze planety P lze najít polohu P' souměrně sdruženou podle středu elipsy S.
- Dle definice elipsy platí, že $|EP| = 2a - r$
- Díky stř. souměrnosti je PEP'F rovnoběžník $\Rightarrow r' = 2a - r$
- Pro dvojici poloh planety P a P' je střední vzd. rovna aritm. průměru r, r':

$$\bar{r} = \frac{r + r'}{2} = \frac{r + 2a - r}{2} = a$$

- Proto i střední vzd. planety od Slunce pro všechny její polohy je rovna a

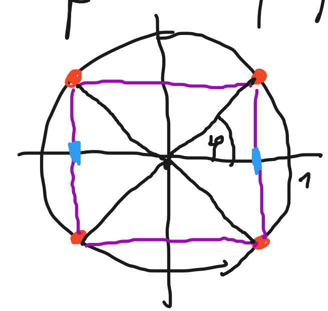
Důkaz pomocí integrálu:



- Zavedeme souř. soustavu (viz obr.)
- Vyjádříme závislost (r) na x-ové souřadnici planety (x_P):
- Z obrázku vidíme, že:

$$x_P = ae + r\cdot\cos\varphi \quad (1)$$

- Vztah (1) bude vzhledem k vlastnostem fce $\cos\varphi$ platit pro libovolný úhel $\varphi \in \langle 0°, 360°)$:



- Pro elipsu platí polární rovnice

$$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi} \quad (2)$$

kde p je parametr elipsy: $p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2-a^2e^2}{a} = \underline{a-ae^2}$ (3)

- z (1) vyjádříme $\cos\varphi = \dfrac{x_p - ae}{r}$ (4)

- z (2): $r(1 + e\cos\varphi) = p$ → sem dosadíme (3) a (4):

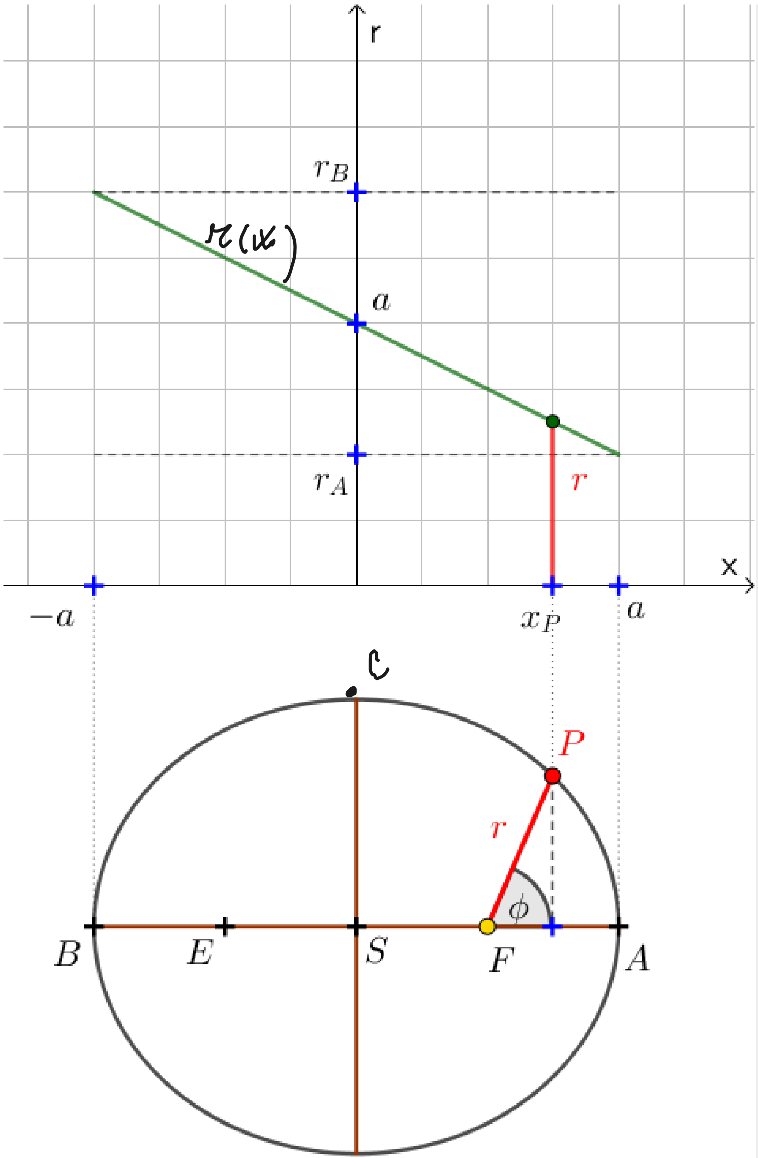
- $$r + \cancel{r}e \cdot \frac{x_p - ae}{\cancel{r}} = a - ae^2$$

$$r + ex_p - \cancel{ae^2} = a - \cancel{ae^2}$$

$$\boxed{r = a - e \cdot x_p} \quad (5)$$

- Je zajímavé, že r závisí na x_p lineárně!

- Závislost $r = f(x_p)$ danou vztahem (5) vyneseme do grafu. Přitom $x_p \in \langle -a; a \rangle$



- Vlevo je graf funkce

  $$\boxed{r(x) = a - e x}$$

- Kontrola:

  <u>bod A</u>: $x = a \rightarrow r = \underbrace{a - ea}_{} = r_A$ OK

  <u>bod C</u>: $x = 0 \rightarrow r = a \rightarrow$ OK

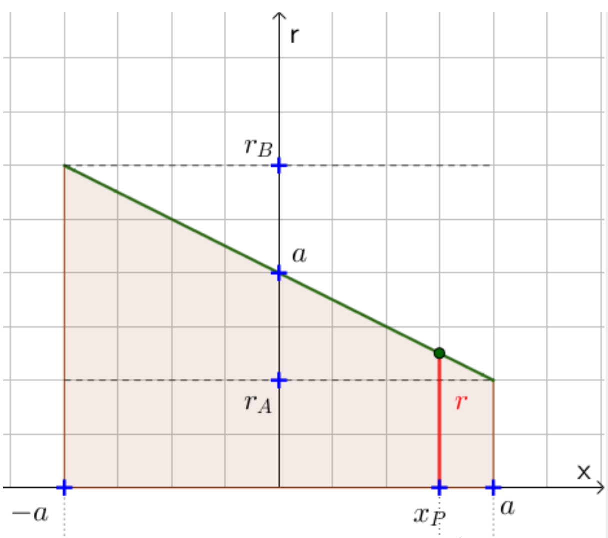
  <u>bod B</u>: $x = -a \rightarrow r = \underbrace{a + ea}_{r_B}$ OK

- Střední hodnota funkce $r(x)$ na intervalu $\langle a;a\rangle$ je rovna integrálu z této fce na tomto intervalu vydělenému délkou intervalu, tedy $2a$

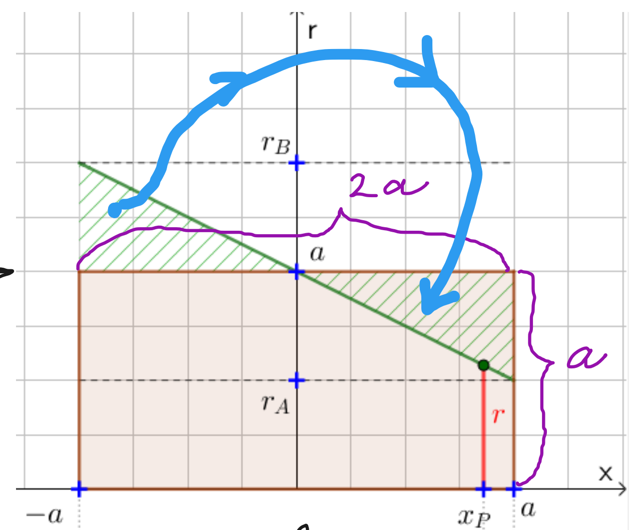
- $\boxed{\bar{r}} = \dfrac{\int_{-a}^{a} r(x)\,dx}{2a} = \dfrac{1}{2a}\cdot\int_{-a}^{a}(a-ex)\,dx = \dfrac{1}{2a}\left[ax - \dfrac{e}{2}x^2\right]_{-a}^{a} =$

$$= \frac{1}{2a}\left[\left(a^2 - \frac{e}{2}a^2\right) - \left(-a^2 - \frac{e}{2}a^2\right)\right] = \frac{1}{2a}\left[a^2 - \cancel{\frac{e}{2}a^2} + a^2 + \cancel{\frac{e}{2}a^2}\right] = \frac{\cancel{2}a^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\cancel{a}} = \boxed{a}$$

- Integrál můžeme také určit jednoduše z grafu jako velikost plochy pod grafem funkce:



Integrál je roven ploše lichoběžníku



Přeměníme ho na obdélník o stranách $a \times 2a$

- Velikost plochy je tedy $a \cdot 2a = 2a^2$
- Střední hodnota je $\frac{2a^2}{2a} = \boxed{a}$

- Závěr:

Střední vzdálenost planety od Slunce je rovna velikosti hlavní poloosy a. Tedy aritm. průměru nejmenší a největší vzdálenosti planety od Slunce:

$$\bar{r} = a = \frac{r_A + r_B}{2}$$