EL TRAPECIO ISÓSCELES DE DIAGONALES PERPENDICULARES

Pablo Flores Martínez
SAEM THALES, Granada

Introducción

Las Olimpiadas Matemáticas para alumnos de Educación Secundaria constituyen una de las actividades más importantes de las que organiza la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Para ello, los coordinadores provinciales de olimpiada realizan un trabajo callado, durante todo el año, para plantear los problemas, organizar las pruebas, etc.. La Junta Directiva Regional de la Sociedad, consideró que este esfuerzo debería verse prolongado, realizando algún estudio de las respuestas que dan los alumnos a los problemas de la prueba. Fruto de este interés de la directiva es este artículo, que trata de examinar las respuestas que los alumnos han dado a uno de los problemas planteados en la fase provincial de la olimpiada celebrada en 2001. Esperamos que este esfuerzo se vea continuado, y todos podamos sacar más provecho de nuestra olimpiada, que tantas satisfacciones nos está dando.

El problema seleccionado pide a los alumnos calcular la superficie de un trapecio isósceles, de diagonales perpendiculares, conocidas las longitudes de las bases. El enunciado se encierra de lleno en la geometría de formas y medidas, tan destacada en el Decreto de Matemáticas de Secundaria (Junta de Andalucía, 1992, MEC, 1991), y en los documentos curriculares de los años 90 (Bishop, 1999, Cockcroft, 1985, Romberg, 1991 y 1993). Sin embargo, las calificaciones asignadas a los alumnos en este problema han sido muy bajas, lo que nos ha llevado a fijarnos en él para este primer análisis.

El enunciado del problema suministra como datos las longitudes de las bases, lo que resulta adecuado para aplicar la fórmula del área, pero para calcular la altura hay que emplear el otro dato, que es más cualitativo (perpendicularidad), y además se refiere a las diagonales, que no son muy empleadas en los problemas elementales de geometría métrica. Suponemos que esta ha debido ser una de las causas de las bajas calificaciones obtenidas por los alumnos. Se da la circunstancia de que la construcción puramente geométrica de la figura podría llevar a soluciones más sencillas. En este artículo trataremos de estudiar si ha prevalecido la disposición a emplear relaciones métricas algebraicas, por encima de las construcciones figurales.

Los organizadores han elaborado un CD (Thales Córdoba, 2001) con las respuestas a los problemas, en el que se incluyen varias formas de resolver cada problema, en este artículo hemos querido hacer una reflexión más amplia sobre el área del trapecio, para así poder situar este problema en particular, y luego las respuestas de los alumnos. Así pues, el artículo comienza con un análisis teórico del problema, y posteriormente se hace una clasificación de las respuestas atendiendo a tres dimensiones: los datos que utilizan los alumnos para resolver el problema, los métodos empleados para ello y si la respuesta es o no correcta. El artículo termina con unas conclusiones extraídas a partir de las respuestas de los alumnos, de las que se sacan algunas consecuencias didácticas.

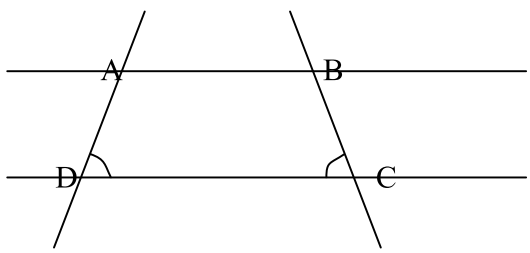
Estudio teórico del problema

Para realizar el estudio teórico del problema vamos a comenzar por caracterizar el trapecio isósceles, posteriormente estudiaremos su superficie, las particularidades del trapecio isósceles de diagonales perpendiculares y formas de resolver el problema.

En los libros de texto se encuentran las siguientes definiciones de trapecio y trapecio isósceles: *Trapecio*: "Cuadrilátero que tiene dos lados paralelos" (con lo que el paralelogramo es un caso particular de trapecio), o "sólo dos lados paralelos" (con lo que el paralelogramo no es un trapecio, García y Bertrán, 1988, p. 41). *Trapecio isósceles*: "Los lados no paralelos son iguales” (Castelnuovo, 1966, pp. 30). Vemos, pues, que la primera cuestión es la definición excluyente o no de las figuras con más regularidades. Nosotros consideremos la definición más restrictiva, según la cual un paralelogramo no es un trapecio.

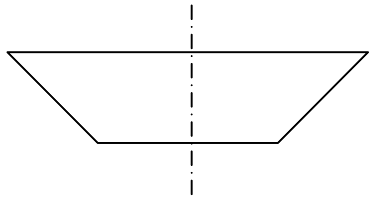
Veamos algunas características del trapecio isósceles.

Ángulos: El trapecio se construye sobre una banda de rectas paralelas. Al ser isósceles, las otras dos rectas que lo forman tienen que tener la misma inclinación sobre las rectas, aunque de diferente sentido. Por tanto los ángulos interiores que corresponden a la misma recta de las paralelas tienen la misma amplitud. Como cada segmento no paralelo está sobre dos rectas paralelas, los ángulos que determina con cada una de ellas son iguales, por lo que los ángulos correspondientes a un lado no paralelo son suplementarios, al igual que los ángulos opuestos.

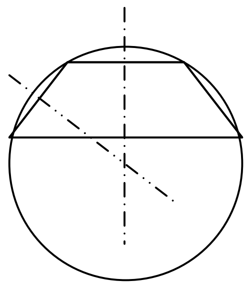


A = B, C = D; A+D = 180º
A+C = 180º

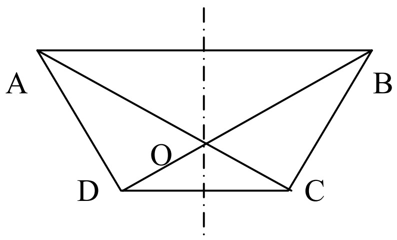
Simetría. Las rectas paralelas son invariantes respecto a las simetrías de eje perpendicular a ellas. Como además los otros dos segmentos tienen la misma inclinación, y la misma longitud, se transforman el uno en el otro por una simetría de eje perpendicular a la banda que sea mediatriz común de los lados paralelos. Este es el único eje de simetría del trapecio isósceles, que es así, el único trapecio con un eje de simetría.



Inscribible. El trapecio isósceles es un cuadrilátero convexo (ningún ángulo interior mide más de 180º), que además es inscribible en una circunferencia, cuyo centro estará en el eje de simetría (ya que este eje es mediatriz de los vértices dos a dos, y existirá un punto sobre ella que esté a la misma distancia de los cuatro). Este centro estará en la intersección del eje con la mediatriz de un lado no paralelo. El trapecio isósceles es el único trapecio inscribible en una circunferencia.

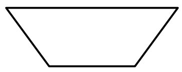


Relaciones métricas entre diagonales. Todo cuadrilátero tiene dos diagonales. Las diagonales del trapecio isósceles se cortan en el eje de simetría. El trapecio isósceles queda dividido por sus diagonales en dos triángulos isósceles semejantes (AOB y COD), unidos por el vértice correspondiente al ángulo desigual (O), y en dos triángulos iguales (AOD y BOC), igualmente unidos por un vértice.

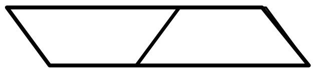


Superficie del trapecio

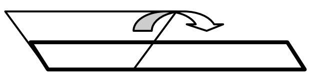
Para determinar la superficie del trapecio podemos compararlo con otras figuras y obtener, por descomposición y recomposición, un polígono equivalente. Esta figura acepta muchos procesos de descomposición y composición, por lo que vamos a clasificarlas según la figura que se obtiene o con la que se compara, y luego estudiaremos las relaciones métricas que aparecen, y el grado en que estas se perciben.

Partamos del siguiente trapecio isósceles: 

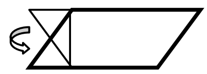
1. Obtención de un Paralelogramo equivalente:



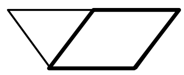
i) Duplicar el trapecio



ii) Dividir el trapecio por una paralela media

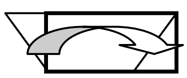


iii) Descomponer en trapecio rectángulo y triángulo rectángulo y trazar el simétrico del triángulo

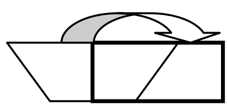


iv) Descomponer en un paralelogramo y un triángulo isósceles.

2. Rectángulo equivalente:



i) Descomponer en trapecio rectángulo y triángulo rectángulo y cambiar de sitio el triángulo.



ii) Descomponer el trapecio en dos trapecios rectángulos iguales y cambiar uno de sitio

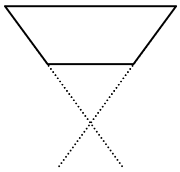
iii) Descomponer en hexágono y dos triángulos rectángulos

y cambiar estos de sitio

3. Triángulo.

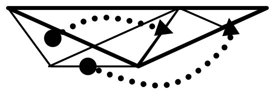
i) Prolongar los lados no paralelos hasta que

se corten



ii) Trazar las diagonales, descomponerlo en triángulos

y componer estos para formar un triángulo.



Para obtener las longitudes de los lados de las figuras equivalentes en algunos casos tenemos que hacer operaciones muy sencillas, y en otros tenemos que realizar cálculos algebraicos. En el siguiente cuadro aparecen las operaciones y relaciones que se han empleado, y la relación que existe entre la superficie del trapecio isósceles y la nueva figura, siendo B la base mayor del trapecio, b la menor, y h la altura del trapecio, y Bp la base del paralelogramo, Ap, la altura del paralelogramo, Br y Ar la base y altura del rectángulo, y Bt y At las del triángulo.

Descomposición	Relación entre base y altura	La superficie del trapecio isósceles es
1.i	Por construcción: Bp = B+b Ap = h	la mitad de la del paralelogramo que tiene de base la suma de sus bases y su misma altura
1.ii	Por construcción: Bp = B+b Ap = h/2	la de un paralelogramo de base la suma de sus bases y de altura la mitad de la suya

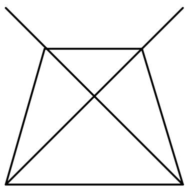
1.iii	Cálculos algebraicos. Bp. = b+(B-b)/2 Ap = h	La de un paralelogramo de base la semisuma de sus bases y de altura la misma
1.iv	Por construcción Bp=b; Bt=B-b Ap=h=At	La de un paralelogramo de base la base pequeña y su misma altura más la de un triángulo de base la diferencia y su altura
2.i	Cálculos algebraicos. Br = b+(B-b)/2 Ar=h	La de un rectángulo de base la semisuma de las bases y la misma altura
2.ii	Por construcción Br =B/2 + b/2 Ar=h	La de un rectángulo de base la suma de las mitades de las bases y altura la misma
2.iii	Cálculos algebraicos Br=b+2(B-b)/4 Ar=h	La de un rectángulo de base la semisuma de las bases y altura la misma
3.i	Cálculos algebraicos Bt1=B; Bt2=b At1=h+x; At2=x	La diferencia entre la superficie de un triángulo isósceles con sus mismos ángulos de base su base mayor y la de un triángulo semejante a éste, con base su base menor
3.ii	Por construcción Bt=B+b At = h	La de un triángulo de base la suma de sus bases y altura la misma que el trapecio

Observamos que los cálculos más sencillos son los que corresponden a las descomposiciones en paralelogramos, salvo la 1iii, la obtención de rectángulo 2.ii y la del triángulo 3.ii, en las que se exige prestar atención a la construcción, mientras que en las otras la complicación proviene al determinar las longitudes de los lados. Quizá la que más dificultades presenta es la 3.i, que exige la aplicación de una distributiva para eliminar la molesta “x”.

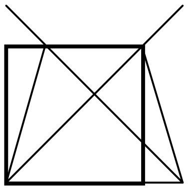
En este desarrollo podemos observar que la única construcción que ha empleado las diagonales para la obtención de la equivalencia, y por tanto de la superficie, en el 3.ii.

Características del trapecio de diagonales perpendiculares

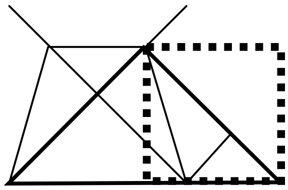
Según las propiedades anteriores, el trapecio isósceles que tiene las diagonales perpendiculares se descompone en dos triángulos rectángulos e isósceles, y dos triángulos rectángulos iguales.



Por tanto, las diagonales formarán con las bases ángulos de 45º. Si trazamos el eje de simetría, aparecerán cuatro triángulos rectángulos e isósceles, iguales dos a dos, cuyos catetos iguales medirán la mitad de las bases del trapecio, respectivamente, con lo que la altura del trapecio será la suma de las dos mitades de los lados. Tal como hemos visto, el trapecio es convertible en un rectángulo equivalente (2) de base la semisuma de las bases, y altura la del trapecio, por lo que en este caso, el trapecio isósceles de diagonales perpendiculares es transformable en un **cuadrado** de lado la semisuma de las bases, que coincide con su altura.



Lo podemos confirmar estudiando su transformación en triángulo (3ii).



El triángulo en que se convierte es rectángulo e isósceles, que dividiéndolo por la altura correspondiente a la hipotenusa da lugar a un cuadrado. Por tanto, podemos afirmar que *el trapecio isósceles de diagonales perpendiculares se transforma en un cuadrado equivalente, de lado la semisuma de las bases*(*).

Resolución de problema

El problema estudiado tenía el siguiente enunciado:

<u>Bonito trapecio</u>
Determinar la superficie de un trapecio isósceles cuyas bases miden 12 y 20 cm. Y cuyas diagonales son perpendiculares.

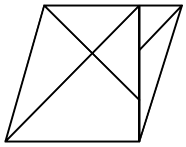
<u>Pista</u>: Para calcular la superficie del trapecio puedes utilizar la fórmula:

$$S = \frac{(B+b)xh}{2}$$

B.-base mayor; b.- base menor; h.- altura

Vamos a resolver el problema empleando las propuestas que hemos hecho para determinar la superficie de un trapecio, que puedan aplicarse en las condiciones del problema (diagonales perpendiculares).

Si hacemos las descomposiciones y composiciones previstas en 1.2 van a aparecer figuras que, la mayoría de las veces, no van a dar información pertinente para su resolución. Así, por ejemplo, al transformar el trapecio de diagonales perpendiculares en un paralelogramo, según la forma 1.iii, aparece la siguiente figura:

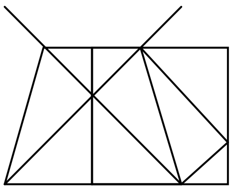


B-(B-b)/2, ¿h?

En la que no podemos directamente calcular la superficie del paralelogramo, ya que desconocemos la altura, y no hay un método gráfico sencillo para determinarla.

Los únicos casos en los que resulta una figura que permite calcular la superficie de manera sencilla son:

2.iii



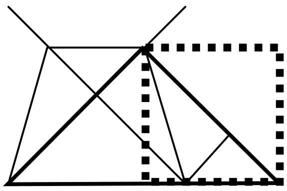
Br=B/2+b/2

Hr=B/2+b/2

3.ii.

Bt=B+b

ht=(B+b)/2

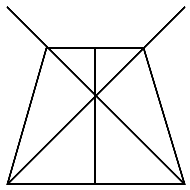


En los que la altura se obtiene por la propiedad que hemos visto (*), y no sería necesario aplicar la fórmula de la superficie del trapecio, ya que lo hemos convertido en otra figura de superficie conocida.

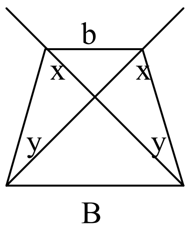
Como se puede observar, al aplicar estos procedimientos no es necesario el cálculo métrico aplicando el teorema de Pitágoras, sino que basta las construcciones.

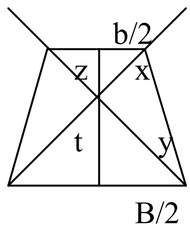
Si queremos aplicar la fórmula del área que aparece en el enunciado del problema, debemos comenzar por calcular la altura del trapecio, basándonos para ello en la propiedad de tener las diagonales perpendiculares. Para ello podemos recurrir a un dibujo y a aplicar las propiedades del trapecio (buscando una propiedad particular, aplicable a este caso, pero no necesariamente a otros), o aplicar propiedades genéricas que abarquen campos amplios de aplicación.

Al descomponer el trapecio en triángulos, por medio de las diagonales, llegamos a ver que la altura es la suma de dos catetos iguales de dos triángulos rectángulos e isósceles, en los que el otro cateto mide la mitad de la base correspondiente, con lo que la altura es B/2+b/2.



El procedimiento más complejo, pero también más general, se basa en aplicar el teorema de Pitágoras, para calcular los trozos de diagonales que son catetos de los triángulos rectángulos e isósceles, y la altura de estos triángulos, o volver a aplicar el teorema de Pitágoras para calcular el cateto del triángulo de área mitad[1].





La primera aplicación del teorema de Pitágoras resuelve una ecuación[2], ya que se desconocen dos datos (aunque sean iguales): $B^2=x^2+x^2=2x^2$

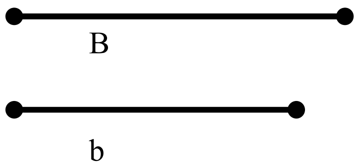
La segunda aplicación es inversa, pero puede hacerse de manera aritmética: $z^2=x^2-(b/2)^2$.

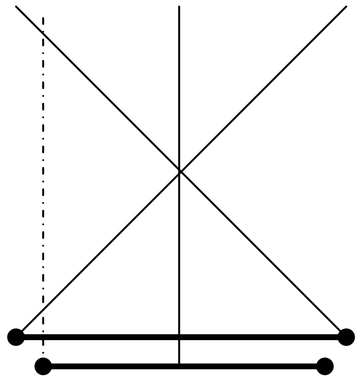
También se puede resolver el problema dibujando el trapecio y midiendo la altura. La construcción más sencilla del trapecio del problema, tendría en cuenta que las diagonales forman ángulos de 45º con la base, lo que permite dibujarlas a partir de una base, y luego

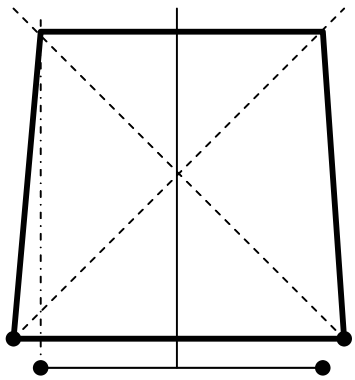
[1] Sabiendo que estos triángulos tienen de superficie la mitad de la de los anteriores se podría obtener la relación de semejanza entre lados y aplicarla, con lo que no habría necesidad de volver a aplicar el teorema.

[2] La aplicación directa del Teorema de Pitágoras es meramente aritmética: dados las medidas de los catetos, calcular la raíz cuadrada de la suma de sus cuadrados. Cuando se aplica de manera inversa (conocida la hipotenusa), se puede reducir a aritmética, si se transforma la suma en resta. Pero si se despeja a partir de la forma directa, o se utilizan dos datos (iguales) como incógnitas, los alumnos suelen resolver de manera algebraica.

buscar la otra base trazando paralelas al eje de simetría que a una distancia la mitad de la base buscada.







Resolución de los alumnos

El problema planteado exige de los alumnos que calculen el área, para lo que es imprescindible que tomen en consideración todos los datos, es decir:

I. Que la figura es un **trapecio isósceles**, con sus definición y propiedades correspondientes. En el enunciado del problema aparece el dibujo de un trapecio aparentemente isósceles, en el que están trazadas sus diagonales, casi perpendiculares; esto supone una pista para los alumnos, que no tienen qué es un trapecio isósceles. Pero el dibujo también puede ser tomado como una representación a escala del trapecio pedido. Con ello las medidas del trapecio del dibujo pueden dar informaciones no pertinentes.

II. Que las **bases miden 12 y 20 cm.**

III. Que sus **diagonales son perpendiculares**.

Vamos a clasificar las respuestas de los alumnos de acuerdo con tres dimensiones: las informaciones que emplean, el método que usan y si la respuesta es correcta. Se resumen en el siguiente cuadro estas dimensiones y algunas categorías de las mismas:

<table>
<tr><td></td><td colspan="4">Dimensiones</td></tr>
<tr><td></td><td>INF:
Informaciones que emplean</td><td colspan="2">MET:
Método que usan para resolver el problema</td><td>COR:
Corrección de la respuesta</td></tr>
<tr><td>Categorías</td><td>P (perpendicular): Tienen en cuenta que las diagonales son perpendiculares
NP: No emplean esta perpendicularidad.</td><td>Métodos algebraicos: A, B, C, D y E
Métodos gráficos: F y G</td><td>TPB: Aplican bien el teorema de Pitágoras.
TPM: Aplican mal el Teorema de Pitágoras</td><td>C (correcta): Respuesta es 256 cm2

INC (incorrecta): Respuesta no es 256</td></tr>
</table>

Veamos el significado de cada dimensión y de las categorías dentro de ellas:

INF. Esta dimensión recoge los datos o **informaciones** que han tomado en cuenta los alumnos al resolver el problema. En el enunciado aparece dibujado el trapecio isósceles, así como la fórmula de su área. Los únicos datos a emplear son, pues, las medidas de las bases y la perpendicularidad de las diagonales. Vamos a fijarnos si tienen en cuenta la perpendicularidad de las diagonales (P) o no (NP).

MET: Esta dimensión recoge el **método** empleado por el alumno para la resolución. Vamos a diferenciar si en la resolución ha predominado la operatoria con los datos numéricos (o literales), (***método algebraico***), o si el proceso de resolución se basa en el dibujo de la figura (***método gráfico***). En uno y otro caso pueden emplear el teorema de

Pitágoras, por lo que vamos a diferenciar si lo emplean, y si lo hacen bien o mal. Cruzando estas dimensiones hemos encontrado las siguientes categorías de respuestas:

Métodos algebraicos:

A: *Resoluciones algebraicas basadas en el Teorema de Pitágoras*: El principal método algebraico para resolver el problema es ***emplear el teorema de Pitágoras*** (correctamente TPB, o en triángulos no rectángulos TPM) a partir de los datos numéricos, y de las informaciones literales.

B: *Sustitución en la fórmula del área*: Otro método de resolución que emplean los alumnos consiste en ***sustituir*** *los datos* ***en la fórmula del área***, con la que ***la altura*** se convierte en una incógnita, que ***despejan*** de manera incorrecta, sin tomar en cuenta el área. Posteriormente ***sustituyen*** esta ***altura*** de nuevo en la ***fórmula***.

C: *Área según altura*: Algunos alumnos no toman en cuenta la información que alude a que las diagonales son perpendiculares, y no tienen informaciones suficientes para calcular la altura. Entonces ***escriben la superficie en función de la altura***, ***o*** bien ***ponen ejemplos hipotéticos*** de altura. Algunos de estos alumnos afirman que no hay datos suficientes para obtener la solución.

D: *Cálculo erróneo de la altura*: Otros alumnos que tampoco toman en consideración la perpendicularidad de las diagonales, ***obtienen la altura*** por ***operaciones*** diversas, todas ellas ***erróneas***, de carácter algebraico (h=20-12=8, por ejemplo), ***o ponen una altura sin justificarla***.

E: *Operaciones sin sentido*: Por último, algunos alumnos ***hacen operaciones difíciles de entender***, gracias a las cuales, alguna vez obtienen la altura, pero no llegan a resultados finales.

Métodos gráficos:

F: *Dibujo del trapecio*: Otros alumnos recurren a ***dibujar el trapecio***, empleando todos o parte de los datos del problema, llegando a construir el trapecio y ***miden la altura*** en ese dibujo. Finalmente sustituyen esta altura en la fórmula del área.

G: *Medida del trapecio del dibujo del enunciado*: También emplean métodos gráficos aquellos alumnos que ***miden las longitudes de los lados del trapecio del dibujo que aparece en el enunciado***. Algunos de ellos aplican un cambio de escala para adoptarlo a las condiciones del problema.

H: *Sin respuesta*: Por último, otros alumnos ***dejan en blanco***, o sólo escriben alguna frase para indicar que no lo saben resolver.

COR: Esta dimensión recoge si la respuesta es **correcta** o incorrecta, independientemente de que el razonamiento sea adecuado, es decir, si responden que el área es 256 cm^2.

Hemos analizado las respuestas de 584 ejercicios, de las pruebas realizadas en la fase provincial en Granada y Jaén, clasificándolas con las dimensiones descritas. Los resultados aparecen en la tabla siguiente:

Métodos de resolución e informaciones que emplean para ello:

INF / MET		Totales		Perpendicularidad		Teorema de Pitágoras	
		Nº	%	P (usan)	NP (no usan)	Bien	Mal
Algebraicos Aritméticos (77,2 %)	A	76	13	25	51	36	39
	B	68	11,6	-	68	-	-
	C	74	12.6	-	74	-	1
	D	193	33	2	191	-	-
	E	43	7	-	43	-	-
Gráfico (13%)	F	48	8,3	34	14	3	1
	G	28	5	-	28	3	1
Blanco	H	54	9,3	-	54	-	-
Total		584	100	61 (10,5%)	523(89,5 %)	42 (7,1%)	43 (7,3%)

Respuestas correctas e incorrectas en cada método.

MET / COR	Métodos aritméticos / algebraicos					Gráficos		Blanco	Total
	A	B	C	D	E	F	G	H	
Correctas	9	29	-	29	1	21	1		90 (15,4%)
Incorrect.	68	39	74	164	42	27	27	54	494 (84,6%)
Total	76	68	74	193	43	48	28	54	584

Comentarios sobre las respuestas de cada método:

Se observa que hay muchas más resoluciones que se basan en realizar cálculos aritmético-algebraicos (77,2 %), que las que miden en un dibujo, que sólo es realizado por un 22 por ciento de los alumnos.

Más llamativo resulta este dato, al fijarnos en que una abrumadora mayoría de los alumnos no emplean la perpendicularidad de las diagonales (casi un 90 por ciento). Analizando los que la utilizan, vemos que de los que tratan de resolver el problema por métodos aritmético-algebraicos, sólo 27 (el 4,6 por ciento de los alumnos, o 6 por ciento de los que emplean este método) toma en consideración la perpendicularidad. De los 76 alumnos que miden el dibujo, 34 usan la perpendicularidad, un número que, si bien es similar en porcentaje al de los que la emplean cuando resuelven por métodos aritméticos (el 5,8), sin embargo es el 44 por ciento de los que optan por este método gráfico. Y es que el método gráfico les permite utilizar los datos cualitativos del problema.

Dentro de las resoluciones con base aritmético-algebraica, la que más éxitos consigue es la que emplea del Teorema de Pitágoras, que es la única forma que encuentran para utilizar el dato de la perpendicularidad de las diagonales.

Pasamos a continuación a analizar los métodos empleados por los alumnos, atendiendo a las categorías anteriores:

Método A: Hemos incluido en esta categoría aquellas resoluciones que tienen como principal recurso ***el teorema de Pitágoras***, probablemente sugerido por la información del problema relativa a la perpendicularidad de las diagonales, aunque también se sugiere su empleo al trazar la altura y tratar de calcularla a partir de los otros datos.

Los alumnos que ponen en juego esta estrategia alcanzan las mejores calificaciones, lo que les exige determinar un triángulo rectángulo adecuado, y usar correctamente el Teorema de Pitágoras.

Si bien ha habido 36 alumnos que han aplicado correctamente el Teorema de Pitágoras, otros 40 han tratado de utilizar todos los datos (longitud de las bases y perpendicularidad de las diagonales) haciendo aplicaciones disparatadas del Teorema. 17 alumnos han utilizado las bases del trapecio como catetos del triángulo rectángulo, pasando a calcular la hipotenusa. Otros 21 alumnos aplican este teorema a triángulos no rectángulos. 29 lo aplican a triángulos rectángulos, de los que sólo 17 lo hacen a los triángulos que permiten resolver el problema. Se muestra, pues, la importancia de hacer un dibujo adecuado del problema antes de aplicar las relaciones aritmético-algebraicas.

Método B: Todos los alumnos que ***despejan la altura a partir de la propia fórmula*** para luego volver a sustituir en ella, dejan de lado la información sobre la perpendicularidad de las diagonales. 29 de los alumnos hacen el siguiente razonamiento:

$$S = \frac{(B+b)}{2} * h \Rightarrow S = \frac{32}{2} * h \Rightarrow S = 16 * h \Rightarrow h = 16 \Rightarrow S = \frac{(20+12)}{2} * 16 \Rightarrow S = 256$$

Como se observa, llegan a un resultado correcto, pero obtenido por un procedimiento recursivo, que desde luego no emplea las informaciones principales, es decir, que el trapecio es isósceles y las diagonales perpendiculares. Otros 39 despejan de otras relaciones, y en este caso sus resultados tampoco son correctos.

Método C: 73 alumnos optan por ***dejar la superficie en función de la altura***, ***o dan un valor a la altura***. En este caso no hacen uso de ninguna recursividad, y, en general, emplean un cálculo correcto pero insuficiente, ya que no saben cómo emplear la perpendicularidad de las diagonales. Se puede considerar que estos alumnos son más conscientes de su incapacidad para resolver, aunque algunos se atreven a indicar que no tienen datos suficientes.

Método D: Hemos incluido en este apartado las resoluciones que ***realizan cálculos y sustituciones sin justificar***, empleando los datos de alguna manera. En esta categoría se incluyen la mayoría de los alumnos (34%). Todos ellos determinan la altura de manera inexplicable. Por ejemplo, muchos dicen que la altura es la resta de las bases, o el doble o la mitad de esta diferencia, con lo que 29 de ellos dan con la solución adecuada, aunque ni justifican ni se puede decir que hayan obtenido esta relación por medio de algún razonamiento que tome en consideración la perpendicularidad de las diagonales. Es de destacar que al menos un par de alumnos dice que al ser las diagonales perpendiculares la altura es la semisuma de las bases, utilizando esto como una propiedad conocida en geometría. Sólo en dos de las respuestas (de las 193 contabilizadas con este método), indican explícitamente que están empleando la perpendicularidad de las diagonales.

Método E: Si en los catalogados en D era a veces difícil interpretar las operaciones que llevan a los alumnos a la solución, en los 43 casos clasificados en esta categoría aparecen ***operaciones sin sentido***, ya que relacionan algunos datos del problema de manera absolutamente ***incomprensible e incoherente***. En todos ellos, los alumnos emplean los datos numéricos y apenas tienen en cuenta las informaciones literales, especialmente ninguno utiliza la perpendicularidad. Naturalmente, sus respuestas son erróneas y disparatadas.

Métodos gráficos: 76 alumnos han utilizado el dibujo para obtener la longitud de la altura, y luego sustituir en la fórmula.

Método F: 48 alumnos han utilizado la regla para ***dibujar el trapecio*** pedido y medir la altura. Para ello suelen dibujar la mediatriz de la base mayor, con objeto de que en ella se corten las diagonales. No se aprecia que utilicen estrategias gráficas específicas para asegurar que las diagonales son perpendiculares, aunque en 34 de los casos se pueden apreciar que las diagonales parecen perpendiculares (dibujadas seguramente empleando dos lados consecutivos de la regla o el cartabón). Otros 27 dibujan las dos bases y una altura arbitraria, sin preocuparse de la perpendicularidad de las diagonales. Hay que destacar que dos alumnos parten de un cuadrado de lado la base mayor para dibujar las diagonales perpendiculares, y luego buscan una paralela que determine con las diagonales un segmento de longitud la base menor. Destaquemos también que muchos alumnos de los incluidos en esta categoría emplean un dibujo a escala, para que les quepa en el papel. La media de las calificaciones de los alumnos de esta categoría es la más alta, un 3, aunque también lo es su desviación típica (3,05), lo que indica que los correctores le han asignado calificaciones diversas, y, sobre todo, menos proporción de ceros que en las otras categorías.

Método G: 28 alumnos ***han medido las dimensiones del dibujo de la ilustración del problema***, sin tomar en consideración que en este trapecio las diagonales son evidentemente no perpendiculares, e incluso de que no parece isósceles. Para determinar la altura suelen emplear la regla de tres, que supone considerar que el trapecio dibujado es una representación a escala del que se enuncia en el problema.

Finalmente casi el 10 por ciento de los alumnos dejan en blanco completamente el ejercicio.

Conclusiones

A partir del análisis realizado, podemos llegar a algunas conclusiones. Se observa en primer lugar que sigue predominando la cultura algebraico-aritmética, que lleva a trabajar con los datos numéricos, a los que se añaden las informaciones literales de origen geométrico por medio de fórmulas, bien sea la del área, o la del teorema más empleado en la resolución algebraica aritmética en geometría, el teorema de Pitágoras. Con ello se observa que prevalece la geometría métrica, sobre la geometría de formas, que podría permitir hacer conjeturas sobre los lados y altura del trapecio, tal como se ha mostrado en la primera parte de este artículo. En ningún caso se ha hecho una descomposición del trapecio en figuras parciales, ni se ha intentado obtener figuras de superficies equivalentes. Se diría que los alumnos están influenciados por la metrización temprana de la geometría (Flores, 1999), que se alcanza por las fórmulas, pese a su dificultad de demostración (Segovia, Castro y Flores, 1996) y de captación del significado (Castro, Flores y Segovia, 1998).

En el enunciado del problema se suministra la fórmula del área del trapecio. Con ello se trata de evitar que los alumnos dejen de hacer el problema si no la recuerdan, además de que centren su atención en el proceso de obtención de la altura. La intención es buena, pero puede causar un efecto perverso, ya que enfatiza el cálculo de la medida de superficie por métodos indirectos, de carácter algebraico-aritmético, aunque para ello tengan que hacer uso de alguna propiedad geométrica que le permita calcular el dato que falta, la altura.

Es evidente que la medida directa de superficies por comparación con la unidad cuadrada da lugar a un proceso trabajoso y con un amplio margen de error. Pero parece que en la enseñanza se hace un paso rápido a la medida de superficies por medio de operaciones con longitudes (Olmo y otros, 1989), sin pasar siquiera por la transformación de figuras, lo que hace que los alumnos se queden con las operaciones aritmético-algebraicas como métodos por excelencia de la matemática, perdiendo de vista la riqueza formativa de los gráficos y los métodos de la geometría afín, que tanta falta le van ha hacer para poder aplicar adecuadamente el teorema de Pitágoras o las relaciones métricas a las figuras adecuadas.

Hemos tratado de mostrar en este artículo la riqueza de descomposiciones del trapecio isósceles, gracias a las que se pueden obtener relaciones entre los datos, y con ello calcular su área. Sin embargo, no parece que los alumnos hayan trabajado estos métodos, o bien los han dejado de lado para resolver problemas en los que se pide y sugiere el cálculo del número, aplicando para ello una fórmula que aparece en el enunciado.

Las fórmulas y el teorema de Pitágoras se constituyen pues, en los referentes principales. Sin embargo, se observa que los alumnos tampoco los utilizan con soltura, ya que muchos de ellos lo aplican a triángulos no rectángulos. Parece como si la hipótesis del teorema (*en todo triángulo rectángulo*) no recibiera la atención precisa.

Es de destacar la cantidad de alumnos que ha empleado relaciones extrañas para calcular el dato que falta. Gran parte de ellos pueden explicarse por lo que Chevallard, Bosch y Gascón (1997) llaman *irresponsabilidad matemática*, es decir, su disponibilidad a emplear los datos con objeto de determinar el resultado, de cualquier manera. Especialmente llamativa resulta aquella por la que despejan la altura de su relación con el área (S=16*h, luego h=16; que equivale a una ecuación resuelta perversamente: ¿0=16*h? ¿1=16*h?). La introducción temprana del álgebra da lugar a este tipo de errores, que se refuerzan al obtener un valor que en este caso es correcto (S=256).

En resumen, creemos que con este estudio se ha puesto de manifiesto que si bien la dificultad del problema supera el nivel de competencia medio de los alumnos de esta edad, es posible utilizarlo en una prueba que trata de que los alumnos razonen. Lo que se hace preciso es recomendar a los profesores que promuevan en clase un mayor trabajo con las formas y sus propiedades, de favorecer que los alumnos realicen investigaciones sobre ellas (Alsina y otros, 1987) que les permitan llegar a establecer relaciones entre lados, diagonales, superficies, otros polígonos, etc., gracias a las cuales podrán superar visiones particulares de las figuras (por ejemplo dejar de ver el trapecio isósceles como un cuadrado con dos triángulos a los lados), y obtener estrategias válidas para obtener el área, aplicando las fórmulas sólo cuando sea necesario.

Bibliografía

ALSINA, C., BURGUÉS, C. y FORTUNY, J.M. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid, Síntesis.

BISHOP, A. J. (1999). *Enculturación matemática*. Barcelona, Paidós.

CASTELNUOVO, E. (1963). *Geometría intuitiva*. Barcelona, Labor.

CASTRO, E., FLORES, P. y SEGOVIA, I. (1998). Relatividad en las fórmulas de cálculo de superficie de figuras planas. *SUMA 26*. 26-32.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997). *Estudiar matemáticas*. Barcelona, Horsori.

COCKCROFT, W. (1985). *Las matemáticas si cuentan*. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

FLORES, P. (1999). Paradojas matemáticas para la formación de profesores. *SUMA 31.* 27-35

GARCÍA, J. y BERTRÁN, C. (1988). *Geometría y experiencias*. Madrid, Alhambra Logman.

JUNTA DE ANDALUCÍA (1992). *Decreto 106/1992, de 9 de junio por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la ESO en Andalucía*. BOJA nº 56, 20/06/1992.

MEC. (1991). *Real Decreto 1345/1991 de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria*. BOE nº 220, de 13 de septiembre 1991.

OLMO, M.A., MORENO, M.F. y GIL, F. (1989). *Superficie y medida: algo más que le trabajo con fórmulas*. Madrid, Síntesis.

ROMBERG, T. (1991a). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, Sevilla.

ROMBERG, T. A. (1993). Cómo uno aprende: Modelos y teorías del aprendizaje de las matemáticas. *Sigma* 15, 3-17.

SEGOVIA, I., CASTRO, E. y FLORES, P. (1996). El área del rectángulo. *UNO 10.* 63-78.

THALES CÓRDOBA (2001). *Problemas propuestos: Olimpiadas Thales*. CD.