КВАНТИФИКАТОРИ

Реченица $x^2 = 5$ очигледно није исказ, јер њена истинитосна вредност зависи од променљиве x.

Да ли су искази следеће реченице?

p: **За сваки** x је $x^2 = 5$ $\longrightarrow$ $(\forall x)(x^2 = 5)$

q: **Постоји** x тако да је $x^2 = 5$ $\longrightarrow$ $(\exists x)(x^2 = 5)$

Истинитосна вредност ових реченица више не зависи од x – прва реченица је нетачна, а друга тачна, па су реченице p и q искази.

Речи "(за) **сваки**", односно "**постоји**", због којих је једначина постала исказ, су **КВАНТИФИКАТОРИ.**

Постоје две врсте квантификатора:

(1) **УНИВЕРЗАЛНИ КВАНТИФИКАТОР** који означавамо са $\forall$ и читамо **сваки, за сваки, сви**,....

(2) **ЕГЗИСТЕНЦИЈАЛНИ КВАНТИФИКАТОР** који означавамо са $\exists$ и читамо **има, постоји, неки, за неки**,...

КВАНТИФИКАТОРИ

У употреби су и тзв. **ОГРАНИЧЕНИ (УСЛОВНИ) КВАНТИФИКАТОРИ.** Они се односе на ограничења или услове под којима важе одговарајућа тврђења. Нпр.

Квадрат **СВАКОГ** <u>**РЕАЛНОГ БРОЈА**</u> је ненегативан.

Реченица је ограничена на скуп РЕАЛНИХ БРОЈЕВА

$$(\forall x)\left(x \in R \Rightarrow x^2 \geq 0\right)$$

Слаже се, природно, са ИМПЛИКАЦИЈОМ (ради се о особини СВИХ реалних бројева – ако је број реалан, он аутоматски има одговарајућу особину)

ПОСТОЈИ <u>**ЦЕО БРОЈ**</u> чији је квадрат једнак 2.

Реченица је ограничена на скуп ЦЕЛИХ БРОЈЕВА

$$(\exists x)\left(x \in Z \wedge x^2 = 2\right)$$

Слаже се, природно, са КОНЈУНКЦИЈОМ (то је само једна у низу особина броја)

КВАНТИФИКАТОРИ

Записати симболима следеће реченице:

(1) Сваки природан број је цео број.

(2) Неки цели бројеви су природни.

(3) Сваки природан број дељив са 4 је паран.

(4) Једначина 3x+2=0 има решење у скупу рационалних бројева.

(5) Апсолутна вредност сваког реалног броја је ненегативна.

(6) Неки цели бројеви су дељиви са 5.

Решења:

(1) $(\forall x)(x \in N \Rightarrow x \in Z)$

(2) $(\exists x)(x \in Z \wedge x \in N)$

(3) $(\forall x)(x \in N \ \wedge \ 4 | x \ \Rightarrow \ 2 | x)$

(4) $(\exists x)(x \in Q \ \wedge \ 3x + 2 = 0)$

(5) $(\forall x)(x \in R \ \Rightarrow \ |x| \geq 0)$

(6) $(\exists x)(x \in Z \ \wedge \ 5 | x)$

КВАНТИФИКАТОРИ

Одредити истинитосну вредност следећих реченица:

(1) $(\forall x)(x \in N \Rightarrow -x \in N)$

(2) $(\forall x)\left(x \in R \Rightarrow x^2 = (-x)^2\right)$

(3) $(\exists x)\left(x \in N \wedge (\forall y)(y \in N \Rightarrow x \leq y)\right)$

(4) $(\exists x)\left(x \in R \wedge (\forall y)(y \in R \Rightarrow y \leq x)\right)$

(5) $(\forall x)\left(x \in R \Rightarrow (\exists y)(y \in R \wedge y < x)\right)$

(6) $(\exists x)\left(x \in Z \wedge (\forall y)(y \in Z \Rightarrow x \cdot y = x)\right)$

Решења:

(1) Супротан број сваког природног броја је природан број. - нетачно

(2) Квадрати супротних реалних бројева су једнаки. - тачно

(3) Постоји најмањи природан број. - тачно

(4) Постоји највећи реалан број. - нетачно

(5) Не постоји најмањи реалан број (од сваког постоји мањи). - тачно

(6) Постоји цео број који остаје непромењен ако се помножи било којим целим бројем. – Тачно, x=0.

НЕГАЦИЈА КВАНТИФИКАТОРА

Означимо са D(x) реченицу “x је добар човек”.

“Сваки човек је добар” тада ће бити $(\forall x)\ D(x)$

Сваки човек је добар

Негација ове реченице је “Није сваки човек добар”, односно $\neg(\forall x)D(x)$

Чињеница да није сваки човек добар, у ствари, значи да има људи који нису добри. Записано симболима то је $(\exists x)\neg D(x)$

$$\boxed{\neg(\forall x)D(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg D(x)}$$

Правило негације универзалног квантификатора

НЕГАЦИЈА КВАНТИФИКАТОРА

Означимо са D(x) реченицу "x је добар човек".

"Постоји човек који је добар" тада ће бити $(\exists\, x)\ D(x)$

Постоји
човек
који је добар

Негација ове реченице је "Не постоји добар човек", односно $\neg\,(\exists x) D(x)$

Чињеница да не постоји добар човек, у ствари, значи да ниједан човек није добар. Записано симболима то је $(\forall\ x) \neg\, D(x)$

Проблем са двојном негацијом у нашем језику!!!

Сваки (Ниједан)
човек
је лош (није добар)

Српски језик трпи двојну негацију, па не кажемо "Сваки човек није добар", него "Ниједан човек није добар", што је у ствари "Сви људи су лоши"

$$\neg\,(\exists x) D(x) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x) \neg\, D(x)$$

Правило негације егзистенцијалног квантификатора

НЕГАЦИЈА КВАНТИФИКАТОРА

ПРИМЕРИ

$\neg(\forall x)D(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg D(x)$

$\neg(\exists x)D(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg D(x)$

$$\neg(\exists x)\left(x\in R \wedge x^2<0\right) \Leftrightarrow (\forall x)\neg\left(x\in R \wedge x^2<0\right)$$

правило негације

Не постоји реалан број чији је квадрат негативан.

$$\Leftrightarrow (\forall x)\left(\neg x\in R \vee \neg x^2<0\right)$$

де Морганов закон

$$\Leftrightarrow (\forall x)\left(\neg x\in R \vee x^2\geq 0\right)$$

Универзални квантификатор слаже се са импликацијом.

$$\neg p \vee q \Leftrightarrow (p\Rightarrow q)$$

"превођење" дисјункције у импликацију

$$\Leftrightarrow (\forall x)\left(x\in R \Rightarrow x^2\geq 0\right)$$

Квадрат сваког реалног броја је ненегативан.

НЕГАЦИЈА КВАНТИФИКАТОРА

ПРИМЕРИ

$\neg(\forall x)D(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg D(x)$ $\neg(\exists x)D(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg D(x)$

$$\neg(\forall x)(x\in Z \Rightarrow x\in N) \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x\in Z \Rightarrow x\in N)$$

правило негације

Није сваки цео број природан број.

Импликацију није могуће негирати – "преводимо је у дисјункцију".

$$(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow \neg p \vee q$$

"превођење" импликације у дисјункцију

$$\Leftrightarrow (\exists x)\neg(\neg x\in Z \vee x\in N)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\neg(\neg x\in R) \wedge \neg x\in N)$$

де Морганов закон

$$\Leftrightarrow (\exists x)(x\in Z \wedge \neg x\in N)$$

закон двојне негације

Има целих бројева који нису природни.

НЕГАЦИЈА КВАНТИФИКАТОРА

Негирати следеће реченице:

(1) $(\forall x)(x \in N \Rightarrow x \leq 0)$

(2) $(\forall x)\left(x \in R \Rightarrow x^2 = (-x)^2\right)$

(3) $(\exists x)\left(x \in N \wedge (\forall y)(y \in N \Rightarrow x \leq y)\right)$

(4) $(\exists x)\left(x \in R \wedge (\forall y)(y \in R \Rightarrow y \leq x)\right)$

(5) $(\forall x)\left(x \in R \Rightarrow (\exists y)(y \in R \wedge y < x)\right)$

(6) $(\exists x)\left(x \in Z \wedge (\forall y)(y \in Z \Rightarrow x \cdot y = x)\right)$

За проверу решења кликнути на одговарајућу реченицу:

(1) $(\exists x)(x \in N \wedge x > 0)$

(2) $(\exists x)\left(x \in R \wedge x^2 \neq (-x)^2\right)$

(3) $(\forall x)\left(x \in N \Rightarrow (\exists y)(y \in N \wedge x > y)\right)$

(4) $(\forall x)\left(x \in R \Rightarrow (\exists y)(y \in R \wedge y > x)\right)$

(5) $(\exists x)\left(x \in R \wedge (\forall y)(y \in R \Rightarrow y \geq x)\right)$

(6) $(\forall x)\left(x \in Z \Rightarrow (\exists y)(y \in Z \wedge x \cdot y \neq x)\right)$

ВАЖНА НАПОМЕНА

Одредимо истинитосну вредност следећих реченица у скупу R:

$$(1)\quad (\forall x)(\exists y)(\,y \le x) \qquad\qquad (2)\quad (\exists y)(\forall x)(\,y \le x)$$

Реченице на први поглед делују идентично – разликују се само по редоследу квантификатора. Размотримо сваку од њих.

$(\forall x)$ $(\exists y)$ $(\,y \le x)$

Од сваког реалног броја (x) | постоји | мањи или једнак њему реалан број (y)

Или, што је еквивалентно, "Сваки реалан број већи је или једнак неком реалном броју." – па је реченица тачна.

$(\exists y)$ $(\forall x)$ $(\,y \le x)$

Постоји реалан број (y) | од сваког реалног броја (x) | мањи (или једнак)

Или, што је еквивалентно, "Постоји најмањи реалан број." – реченица која је очигледно нетачна.

ПРИ ЗАПИСИВАЊУ И ЧИТАЊУ РЕЧЕНИЦЕ НЕОПХОДНО ЈЕ ВОДИТИ РАЧУНА И О РЕДОСЛЕДУ КВАНТИФИКАТОРА.