Sección 3.3

19. $y^{(3)} + y'' - y' - y = 0$

Ecuación auxiliar $r^3 + r^2 - r - 1 = 0$

$r^2(r+1) - (r+1) = 0$

$(r+1)(r^2-1) = 0$

$(r+1)(r-1)(r+1) = 0$

$(r+1)^2(r-1) = 0$

las raíces de la ecuación auxiliar sea $r_1 = 1$

$r_2 = r_3 = -1$

La solución general

$y(x) = C_1 e^{1x} + C_2 e^{-1x} + C_3 x e^{-1x}$ → solución general

39. $y(x) = (A + Bx + Cx^2) e^{2x}$

$y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + Cx^2 e^{2x}$

las raíces de la ecuación auxiliar son $r = 2$, multiplicidad $k = 3$

ecuación auxiliar $(r-2)(r-2)(r-2) = 0$

$(r-2)^3 = 0$

$r^3 - 3r^2 \cdot 2 + 3r \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 0$

$r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0$

La edo de orden superior lineal homogenea de coeficientes constantes

$y^{(3)} - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

42.

$y(x) = (A + Bx + Cx^2)\cos 2x + (D + Ex + Fx^2)\operatorname{sen} 2x$

$y(x) = A\cos 2x + Cx^2\cos 2x + D\operatorname{sen} 2x + Ex\operatorname{sen} 2x + Fx^2\operatorname{sen} x$

$y(x) = [A\cos 2x + D\operatorname{sen} 2x] + x[B\cos 2x + E\operatorname{sen} 2x] + x^2[C\cos 2x + F\operatorname{sen} 2x]$

$y(x) = e^{0x}[A\cos 2x + D\operatorname{sen} 2x] + e^{0x}x[B\cos 2x + E\operatorname{sen} 2x] + e^{0x}x^2[C\cos 2x + F\operatorname{sen} 2x]$

Por el teorema 4, las raíces de la ecuación auxiliar son

$r = 0 \pm 2i$ → $r = 0 + 2i$

$r = 0 - 2i$

multiplicidad $k = 3$ → ecuación auxiliar

$[(r - (0+2i)][r - (0 - 2i)]^3 = 0$

$[((r-0) - 2i)((r-0) + 2i)]^3 = 0$

$$[(r-0)^2-(2i)^2]^3=0 \qquad i=\sqrt{1}$$
$$[r^2-4i^2]^3=0 \qquad i^2=-1$$
$$[r^2+4]=0$$

$$(r^2)^3+3(r^2)^2\cdot 4+3(r^2)4^2+4^3=0$$
$$r^6+12r^4+48r^2+64=0$$

La edo de orden superior lineal homogenea de coeficientes costantes sería

$$y^{(6)}+12y^{(4)}+48y''+64y=0$$

51.
$$ax^3y'''+bx^2y''+cxy'+dy=0$$
(donde a, b, c son constantes) en la ecuación de coeficientes constantes

$$a\frac{d^3y}{dv^3}+(b-3a)\frac{d^2y}{dv^2}+(c-b+2a)\frac{dy}{dv}+dy=0$$

Sea $v=\ln x$ entonces por regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\frac{1}{x}$$

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv} \quad (A)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dv}\right)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dv}\right)$$

$$1\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dv}\left(\frac{dy}{dv}\right)\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dv^2}\frac{1}{x}$$

$$x\frac{dy}{dx}+x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dv^2}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dv^2} - x\frac{dy}{dx}$$ → paso a restar pero por (A)

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dv^2} - \frac{dy}{dv} \quad (B)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dv^2} - \frac{dy}{dv}\right)$$

$$2x\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dv}\left(\frac{d^2y}{dv^2} - \frac{dy}{dv}\right)\frac{dv}{dx}$$

$$2x\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{d^3y}{dv^3} - \frac{d^2y}{dv^2}\right)\cdot\frac{1}{x}$$

$$2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2y}{dv^2} - 2x^2\frac{d^2y}{dx^2}$$ por (B) paso a restar

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dv^3} - \frac{d^2y}{dv^2} - 2\left(\frac{d^2y}{dv^2} - \frac{dy}{dv}\right)$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dv^3} - 3\frac{d^2y}{dv^2} + 2\frac{dy}{dv} \quad (C)$$

Ahora reemplazamos A, B y C en

$$ax^3y''' + bx^2y'' + cxy' + dy = 0$$

$$a\left[\frac{d^3y}{dv^3} - 3\frac{d^2y}{dv^2} + 2\frac{dy}{dv}\right] + b\left[\frac{d^2y}{dv^2} - \frac{dy}{dv}\right] + c\frac{dy}{dv} + dy = 0$$

$$a\frac{d^3y}{dv^3} + (-3a+b)\frac{d^2y}{dv^2} + (2a-b+c)\frac{dy}{dv} + dy = 0$$

55.

$$x^3y''' - x^2y'' + xy' = 0$$ donde $a=1$, $b=-1$, $c=1$, $d=0$

$$\frac{d^3y}{dv^3} - 4\frac{d^2y}{dv^2} + 4\frac{dy}{dv} = 0$$

Ecuacion auxiliar → $r^3 - 4r^2 - 4r = 0$

$r(r^2 - 4r + 4) = 0$ → $\sqrt{1} = 0$

$\sqrt{2} = \sqrt{3} = 2 \quad (K=2)$

Solucion general

$y(v) = Ae^{0v} + Be^{2v} + C v e^{2v}$

$y(v) = A + Be^{2v} + Cve^{2v}$ pero $v = \ln x$

$\Rightarrow y(x) = A + Be^{2\ln x} + C\ln x\, e^{2\ln x}$

$y(x) = A + Be^{\ln x^2} + C\ln x\, e^{\ln x^2}$

$y(x) = A + Bx^2 + Cx^2 \ln x$

58.

$x^3 y''' + 6x^2 y'' + 7xy' + y = 0$

donde $a=1$, $b=6$, $c=7$, $d=1$

Se realizo la sustitución $v=\ln x$ en el ejercicio 51, con el fin de encontrar la solución general ($x>0$) de las ecuaciones de Euler de los problemas 55 y 58

Entonces por el ejercicio 51. tambien resuelto, se demostro que la sustitucion $v=\ln x$ convierte la ecuacion de euler de orden tres en la siguiente edo de orden 3 de coeficientes constantes (homogenea)

$$\frac{d^3y}{dv^3} + \frac{3d^2y}{dv^2} + \frac{3dy}{dv} + y = 0$$

Cuya ecuacion auxiliar es $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$

$(r+1)(r+1)(r+1) = 0$

$(r+1)^3 = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = r_3 = -1$ $(k=3)$

Solución general $\rightarrow y(v) = Ae^{-1v} + Bve^{-1v} + Cv^2 e^{-1v}$

$v = \ln x$ $\quad y(x) = Ae^{-\ln x} + B\ln x\, e^{-\ln x} + C(\ln x)^2 e^{-\ln x}$

$y(x) = Ae^{\ln x^{-1}} + B\ln x\, e^{-\ln x} + C(\ln x)^2 e^{\ln x^{-1}}$

$y(x) = \frac{A}{x} + B\frac{\ln x}{x} + C\frac{(\ln x)^2}{x}$ si $x>0$

$\downarrow$

Solucion general para $x>0$