SISTEMAS DE ECUACIONES HOMOGÉNEOS

Ejemplo 1: sistema homogéneo con solución única (trivial).

$$-3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0$$
$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0$$

Su matriz aumentada queda como

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -7 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolvemos por cualquier método de reducción.

$$\begin{bmatrix} -3 & -7 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} R1 \leftrightarrow R3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ -3 & -7 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$ intercambiamos los renglones 1 y 3

generamos ceros debajo del uno principal de la primera columna

$$\frac{R2 - 2R1 \to R2}{R3 + 3R1 \to R3} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

obtenemos el uno principal de la segunda fila o renglón

$$-\frac{1}{3} R2 \to R2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

generamos ceros arriba y abajo en la columna del uno principal del segundo renglón

$$\frac{R1-4R2\to R1}{R3-5R2\to R3}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-2&0\\0&1&1&0\\0&0&6&0\end{bmatrix}$$

obtenemos el uno principal del tercer renglón

$$-\frac{1}{6}R3\to R3\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-2&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

generamos ceros en la columna del uno principal de la tercera fila

$$\frac{R1+2R3\to R1}{R2-R3\to R2}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}$$ llegamos a la **solución del sistema**.

Ejemplo 2: sistema homogéneo con múltiples soluciones.

$$-3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0$$
$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0$$

Su matriz aumentada queda como

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -7 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolvemos por cualquier método de reducción.

$$\begin{bmatrix} -3 & -7 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -6 & 0 \end{bmatrix} R1 \leftrightarrow R3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ -3 & -7 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$ intercambiamos los renglones 1 y 3

generamos ceros debajo del uno principal de la primera columna

$$\frac{R2 - 2R1 \to R2}{R3 + 3R1 \to R3} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 13 & 0 \\ 0 & -1 & -13 & 0 \end{bmatrix}$$

generamos ceros arriba y abajo en la columna del uno principal del segundo renglón

$$\frac{R1 - 2R2 \to R1}{R3 + R2 \to R3} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -32 & 0 \\ 0 & 1 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obtenemos un tercer renglón de ceros

la matriz equivalente representa al sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -32 & 0 \\ 0 & 1 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 32x_3 = 0 \\ x_2 + 13x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 32x_3 \\ x_2 = -13x_3 \end{cases}$$

las **soluciones del sistema** quedan de la forma ($32x_3$, $-13x_3$, x_3)

por ejemplo: (0,0,0), (32,-13,1), (-32,13,-1),etc.