2.1.3. Las soluciones de los modelos exponenciales cumplen con ciertas regularidades periódicas: pasado un período de tiempo T, la cantidad "actual" se afectará por un factor positivo F_T; esto es: $A(t+T) = F_T A(t)$. Claramente existe una relación entre los valores de k, T y F_T, ¿puede deducirla? (cuando $F_T = 0.5$, a T se le denomina tiempo de vida media del objeto de estudio).

R//

Los modelos exponenciales presentan ciertos patrones predecibles los cuales se evalúan en un tiempo específico, que a la hora de tomar la medición siempre será un valor mayor o igual a 0. Como se está abordando una ecuación en función del tiempo existe una relación entre las expresiones. Pero, al tratarse de ecuaciones diferenciales, si queremos encontrar la ecuación general a partir de una EDO, será necesario un procedimiento riguroso que involucrará integrales que al final obtendremos una constante de integración, la cual se podrá dejar expresada o si el ejercicio contiene más información tal como in PVI podríamos hallar dichas constantes.

2.1.4. Las ecuaciones lineales ordinarias de primer orden tienen la forma:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

que, bajo ciertas condiciones (¿cuáles?) se pueden reescribir como $y' + p(x)y = f(x)$. Escrita en esta forma "canónica", es fácil deducir una técnica de solución para la ecuación a partir de calcular la derivada: $\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx}y\right)$. Asuma como un reto deducir la técnica antes de encontrarla descrita en la literatura.

La ecuación se puede escribir de dicha forma siempre que se cumpla la condición de que sea posible despejar y' y exista una variable exclusivamente una variable "y". Además, también debe ser una ecuación de primer orden.

El factor integrante hace de la siguiente forma:

$$\frac{d(uy)}{dx} = u\left(\frac{dy}{dx} + P(x)y\right)$$

$$\cancel{u\frac{dy}{dx}} + y\frac{du}{dx} = \cancel{u\frac{dy}{dx}} + u\,p(x)\,y$$

$$y\frac{du}{dx} = u\,P(x)\,y$$

$$\int\frac{du}{u} = \int P(x)dx \rightarrow \ln|u| = \int p(x)dx \rightarrow u = e^{\int p(x)dx}$$

Ejemplo de una E.DO Lineal:

22. Resolver $y' = 2xy + 3x^2 \exp(x^2)$, $y(0) = 5$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy + 3x^2 e^{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 3x^2 e^{x^2}$$

$$e^{-x^2}\left(\frac{dy}{dx} - 2xy\right) = e^{-x^2}\left(3x^2 e^{x^2}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} y\right) = 3x^2$$

$$\int \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} \cdot y\right) dx = \int 3x^2\, dx$$

$$e^{-x^2} y = x^3 + C$$

$$y(x) = e^{x^2}(x^3 + C)$$

$y(x) = x^3 e^{x^2} + C e^{x^2}$ → solución general

$$\rho(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

$$\rho(x) = e^{\int -2x\, dx}$$

$$\rho(x) = e^{-x^2}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} \cdot y\right)$$

$$= e^{-x^2}(-2x) \cdot y + e^{-x^2}\, dy/dx$$

$$= e^{-x^2}(-2xy + dy/dx)$$

$$= e^{-x^2}(dy/dx - 2xy)$$

Como $y(0) = 5$, se reemplaza en la solución general

$$y(0) = 0^3 e^{0^2} + C e^{0^2} = 5 \to C = 5$$

$$y(x) = x^3 e^{x^2} + 5 e^{x^2}$$

$y(x) = e^{x^2}(x^3 + 5)$,, → solución particular