4 Algebraické operace s maticemi

4.1 Rovnost matic

$$A = B$$

Dvě matice se rovnají, jsou-li téhož typu a rovnají-li se jejich vzájemně si odpovídající prvky, tj. $a_{ij} = b_{ij}$.

Příklad 17.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

4.2 Sčítání matic

$$A + B$$

Odčítání matic $A - B$ definujeme pomocí ščítání a opačné matice k B:

$$A - B = A + (-B).$$

Sčítat (odčítat) můžeme pouze matice téhož typu. Výsledkem je matice, jejíž prvky jsou součtem (rozdílem) vzájemně si odpovídajících prvků daných matic.

Příklad 18. *Sčítání a odčítání matic:*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ NELZE,

d) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ NELZE.

Vlastnosti operace sčítání matic na množině matic typu (m, n):

i) neomezeně definovaná,

ii) komutativní

$$A + B = B + A,$$

iii) asociativní

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

iv) s neutrálním prvkem (nulová matice)

$$A + O = O + A = A.$$

v) s inverzními prvky (opačné matice)

$$A + (-A) = O.$$

Množina $M_{(m,n)}$ matic typu (m, n) tvoří spolu s operací sčítání matic **komutativní grupu**, zapisujeme $(M_{(m,n)}, +)$.

4.3 Násobení matice reálným číslem

$$k \cdot A,\ k \in R$$

Číslem k násobíme každý prvek matice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ k \in R,\ \text{potom k} \cdot \text{A} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{bmatrix}$$

Příklad 19.

a) $2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 10 & 14 \\ -16 & 18 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 5 & 35 & 10 \\ 15 & 20 & 80 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 16 \end{bmatrix}$.

Příklad 20. *Vypočtěte:*

$$-3\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vlastnosti operace násobení matice reálným číslem (skalární násobení matice):

i) neomezeně definovaná,

ii) komutativní

$$kA = Ak,$$

iii) asociativní

$$k(lA) = (kl)A,$$

iv) distributivní

$$k(A + B) = kA + kB,$$

$$(k+l)A = kA + lA,$$

v) s jednotkovým prvkem (skalárem)

$$1A = A,$$

vi) násobení -1 (vznikne matice opačná):

$$(-1)A = -A,$$

vii) násobení 0 (vznikne matice nulová):

$$0A = O_{(m,n)}.$$

Příklad 21. *Vypočtěte hodnotu výrazu (výsledkem je matice)* $2A+3B$, *jsou-li dány matice:* $A = \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -11 & 1 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$.

Příklad 22. *Zjednodušte výraz:* $2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Příklad 23. *Pro* $A = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 20 & 0 \\ -20 & 13 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ *určete* $A + 2(B - 2C)$

Příklad 24. *Pro* $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ *určete neznámou matici* X *v rovnici* $X + A = 0$.