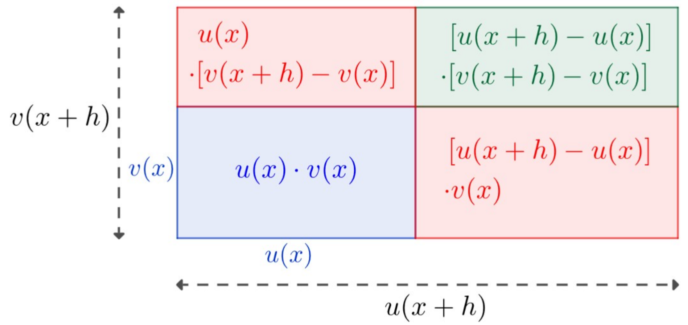
Produktregel der Ableitung

Formel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Herleitung: Die Funktionswerte der stetigen und differenzierbaren Funktionen u und v seien o.B.d.A. an den Stellen x und $x+h$ positiv. Sie sind als Längen im rechten Schaubild verwendet. Die Flächenmaße ergeben sich daraus folgend.
Der gesamte Flächeninhalt ist gleich der Summe der vier Teilflächen.
Bringt man $u(x) \cdot v(x)$ auf die linke Seite folgt:



$$u(x+h)\cdot v(x+h) - u(x)\cdot v(x) = [u(x+h)-u(x)]\cdot v(x) + u(x)\cdot[v(x+h)-v(x)] + [u(x+h)-u(x)]\cdot[v(x+h)-v(x)] \quad | : h \neq 0$$

$$\frac{u(x+h)\cdot v(x+h)-u(x)\cdot v(x)}{h} = \frac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot v(x) + u(x)\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + \frac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot[v(x+h)-v(x)] \quad | \lim_{h\to 0}$$

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v' + \underbrace{u'\cdot[0]}_{=0} \qquad q.e.d.$$

Beispiel: $f(x) = \underbrace{3x^2}_{u} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v}$

$$f'(x) = \underbrace{6x}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v} + \underbrace{3x^2}_{u} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'}$$