Ziekteverspreidingsmodellen

Inleiding

Eén van de eenvoudigste wiskundige modellen om de verspreiding van besmettelijke ziekten te beschrijven is het zogenaamde SIR-model.

Dit zogenaamde SIR-model verdeelt de populatie in drie groepen:

- S (Susceptable) mensen die vatbaar zijn voor de ziekte
- I (Infected) mensen die besmettelijk zijn
- R (Recovered) mensen die genezen zijn (of gestorven)

Bij aanvang is iedereen vatbaar voor de nieuwe ziekte.

Het aantal binnen elk groep wijzigt voortdurend.

Er is namelijk een overgang van de groep S naar I en van I naar R.

Bij de start van de verspreiding is een beperkt aantal mensen besmettelijk.
Dit aantal kan erg beperkt zijn.

Omdat een besmette patiënt uit groep I andere mensen uit groep S besmet zal de groep S kleiner worden en de groep I groter.

Daarnaast zijn er ook mensen uit de groep I die genezen (of sterven) en immuniteit voor de ziekte opbouwen en uiteindelijk in de groep R terecht komen.

Het SIR-model bestaat uit 3 (differentiaal)vergelijkingen die de veranderingen van de aantallen in elke groep beschrijven. Deze vergelijkingen zijn met elkaar verbonden.

$$\frac{dS(t)}{dt} = -b.S(t).I(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = b.S(t).I(t) - c.I(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = c.I(t)$$

Elk van deze vergelijkingen geeft weer hoe het aantal mensen in elke groep wijzigt doorheen de tijd t.

Deze vergelijkingen zijn gekoppeld aan overgangssnelheden b en ook c die de ons vertellen hoe waarschijnlijk het is om van de ene groep naar de andere over te gaan.

De overgangssnelheid b van vatbaar (S) naar besmettelijk (I) hangt af van het contact tussen een geïnfecteerd persoon en een vatbaar persoon.

Het min-teken in de formule voor S duidt aan dat het aantal in de groep S vermindert.

De differentiaalvergelijkingen van dit (eenvoudig) SIR-model kunnen niet exact worden opgelost.
Men moet een numerieke benadering proberen te vinden.

Hierbij kan men dankbaar gebruik maken van GeoGebra.

Simulatie met GeoGebra

Na het opstellen van de vergelijkingen kan men voor het rekenwerk en het tekenen van de bijhorende grafieken voor S, I en R handig gebruik maken van ICT-tools zoals GeoGebra.

Start GeoGebra en activeer het Algebravenster voor het ingeven van de formules en ook het Tekenvenster voor het weergeven van de grafieken.

Wij definiëren vooreerst een aantal variabelen en gaan uit van een aantal veronderstellingen/

N=1 stelt de totale populatie voor (relatief).

Wij nemen aan bij het begin 1% van de populatie besmet is.

Istart=0.01

Dit betekent dat nog 99% vatbaar is.

Sstart=N-Istart

Bij het begin zijn er nog geen mensen die genezen zijn.

Rstart=0

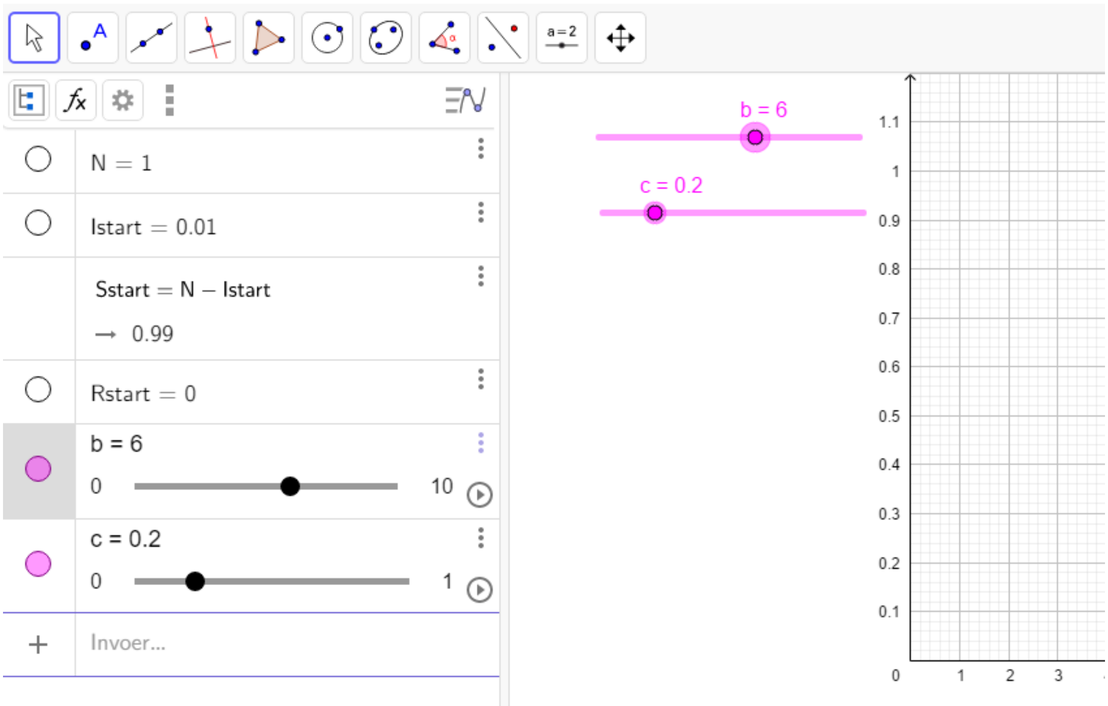
Wij maken ook twee schuifknoppen b en c voor de overgangssnelheden.

Schuifknop b tussen 0 en 10 met stapgrootte 0.01

Schuifknop c tussen 0 en 1 met stapgrootte 0.01

Tenslotte maken wij nog een schuifknop voor de maximalen tijd dat het model zal lopen.

Schuifknop maxT tussen 0 en 20 met stapgrootte 0.01



Vervolgens geven wij in het algebravenster de drie differentiaalvergelijkingen in.

$$S'(t, S, I, R) = -b\, S\, I \;\rightarrow\; -4\, S\, I$$

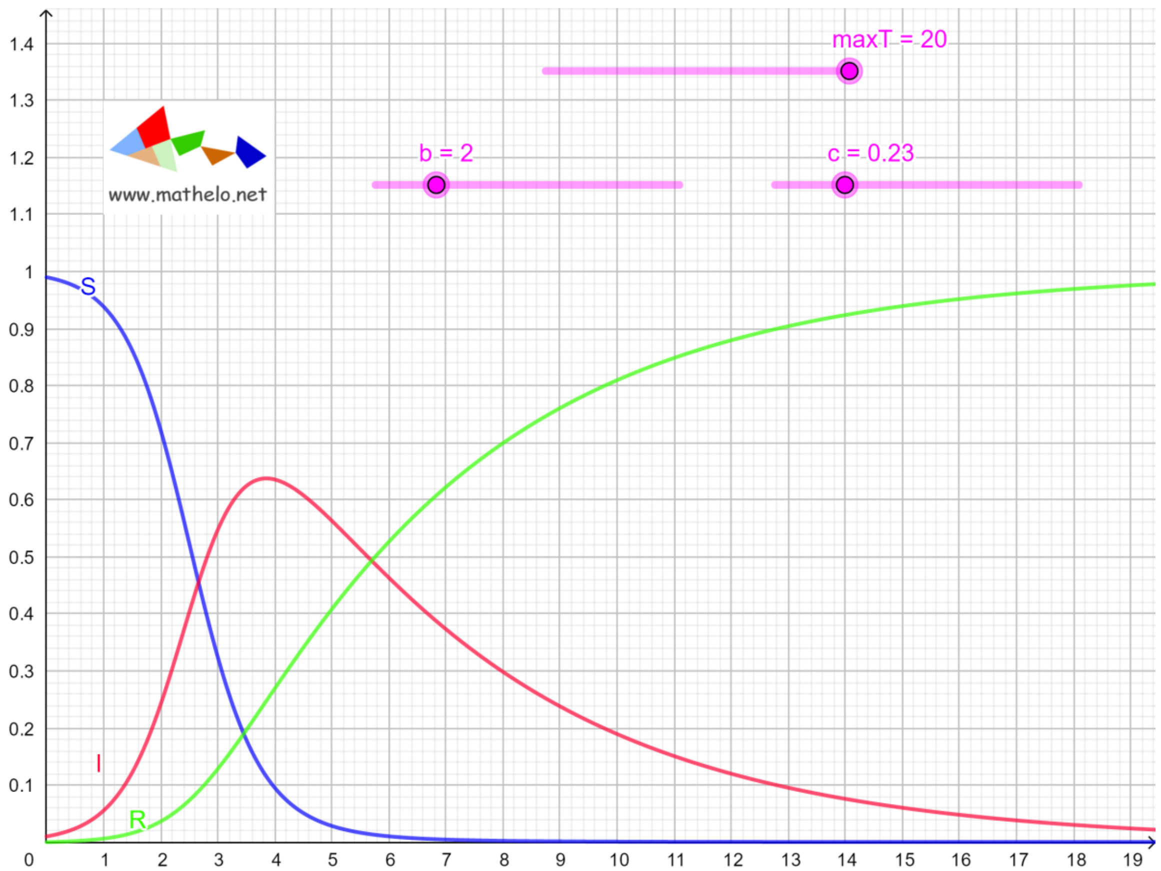
$$I'(t, S, I, R) = b\, S\, I - c\, I \;\rightarrow\; 4\, S\, I - 0.2\, I$$

$$R'(t, S, I, R) = c\, I \;\rightarrow\; 0.2\, I$$

GeoGebra beschikt over een commando om deze differentiaalvergelijkingen numeriek op te lossen.

NOplossenODE({S', I', R'}, 0, {Sstart, Istart, Rstart}, maxT)

ODE staat voor Ordinary Differential Equation



Betekenis van de parameters b en c

Voor een beter inzicht in deze formules en de interpretatie van de grafieken kun je de waarde van de schuifknoppen b en ook c wijzigen.

1. Wat is de betekenis van de overgangssnelheden van S naar I en van I naar R ?

2. Geef een omschrijving de volgende situaties van het SIR-model.
   - Stel c = 0,2 en wijzig de waarde van b van 2 tot 10
   - Stel b = 3 en wijzig de waarde van c van 0,2 tot 1
   - Stel b = 0 en wijzig de waarde van c van 0,2 tot 1
   - Stel c = 0 en wijzig de waarde van b van 2 tot 10
   - Stel b = 0 en ook c =0

   Onderzoek het verloop van de piek van de grafiek van I.

3. Geef de betekenis van de drie grafieken en kun verband.

4. Wat gebeurt er met indien b kleiner wordt?

5. Welke parameter b of c heeft het meeste invloed op het verminderen van de piek van de grafiek van I.

Download interactief GeoGebra bestand via de link

https://www.geogebra.org/m/kcau52jt