📐 A megoldás menete lépésről lépésre

A célunk az, hogy megkeressük azokat a 2027-nél kisebb p prímeket, amelyekre teljesül az alábbi oszthatóság:

$$(2027 - p) \mid (2027 + p^2)$$

1. lépés: Az algebrai trükk

Vezessük be az $n = 2027$ jelölést, hogy tisztábban lássuk a kifejezést:

$$(n - p) \mid (n + p^2)$$

A jobb oldali kifejezést alakítsuk át úgy, hogy megjelenjen benne az $(n^2 - p^2)$ különbség, amit az $(n - p)(n + p)$ azonosság szerint szorzattá tudunk bontani:

$$n + p^2 = -(n^2 - p^2) + n^2 + n = -(n - p)(n + p) + n(n + 1)$$

Mivel az $(n - p)$ osztója az első tagnak, a teljes kifejezésnek akkor és csakis akkor lesz az osztója, ha a megmaradt tagot is osztja. Vagyis a feladat leegyszerűsödik erre:

$$(n - p) \mid n(n + 1)$$

2. lépés: Behelyettesítés és tényezőkre bontás

Írjuk vissza az $n = 2027$ értéket:

$$(2027 - p) \mid 2027 \cdot 2028$$

Mivel 2027 prím, a 2028 prímtényezős felbontása pedig $2^2 \cdot 3 \cdot 13^2$, a jobb oldali szorzat szerkezete nagyon tiszta. Keressük azokat a $d = 2027 - p$ pozitív osztókat, amelyekre teljesül, hogy $0 < d < 2027$ (mivel p egy pozitív prím).

Ekkor a prímeket a $p = 2027 - d$ képlettel kapjuk meg.

3. lépés: Az osztók ellenőrzése

Végigpörgetve a lehetséges d osztókat, három olyan esetet találunk, ahol a kapott p érték valóban prímszám lesz:

- Ha $\boldsymbol{d = 1014}$ (ami osztója a 2028-nak):

$$p = 2027 - 1014 = 1013 \quad \rightarrow \quad \textbf{Prím!}$$

- Ha $\boldsymbol{d = 156}$ (ami $12 \cdot 13$):

$$p = 2027 - 156 = 1871 \quad \rightarrow \quad \textbf{Prím!}$$

- Ha $\boldsymbol{d = 78}$ (ami $6 \cdot 13$):

$$p = 2027 - 78 = 1949 \quad \rightarrow \quad \textbf{Prím!}$$

Minden más megfelelő d osztó esetén p összetett számot adna.

Végeredmény ✅

A feltételnek eleget tevő prímek a **1013, 1871 és 1949**.
