Arbeitsblatt 4

Übungen zu §2.2 Quadratische Gleichungen

Gleichungen wie $x^2 = 5$, $x^2 - 6x + 3 = 0$, $2x^2 + 3x = 7$ heißen **quadratische Gleichungen.**

Lösen von reinquadratischen Gleichungen der Form $x^2 = r$

$x^2 = \frac{25}{36}$	$x^2 = 11$	$x^2 = -4$
$x = \frac{5}{6}$ *oder* $x = -\frac{5}{6}$	$x = \sqrt{11}$ *oder* $x = -\sqrt{11}$	Das Quadrat einer Zahl kann nicht negativ sein.
$L = \left\{\frac{5}{6}; -\frac{5}{6}\right\}$	$L = \{\sqrt{11}; -\sqrt{11}\}$	$L = \{\ \}$

1. Bestimme die Lösungsmenge.

a) $x^2 = 81$ **c)** $x^2 = 19$ **e)** $x^2 = -25$ **g)** $x^2 = \frac{196}{81}$ **i)** $x^2 = 1\frac{15}{49}$ **k)** $x^2 = 6{,}25$

b) $x^2 = 121$ **d)** $x^2 = 0$ **f)** $x^2 = \frac{64}{49}$ **h)** $x^2 = -\frac{9}{25}$ **j)** $x^2 = 0{,}81$ **l)** $x^2 = 0{,}04$

2. **a)** $5x^2 = 180$ **c)** $3x^2 = 36$ **e)** $4x^2 = -24$ **g)** $\frac{1}{4}x^2 = 400$ **i)** $2x^2 = 100$

b) $12x^2 = 972$ **d)** $\frac{2}{5}x^2 = 70$ **f)** $3x^2 = \frac{1}{48}$ **h)** $7x^2 = 4{,}48$ **j)** $7x^2 = 0$

3. **a)** $x^2 - 64 = 0$ **c)** $x^2 - \frac{9}{49} = 0$ **e)** $x^2 + 13 = 40$ **g)** $5x^2 - 1{,}25 = 0$

b) $x^2 + 9 = 0$ **d)** $x^2 - 15 = 34$ **f)** $3x^2 - 17 = 91$ **h)** $12x^2 + 4 = 100$

Lösen von gemischtquadratischen Gleichungen der Form $(x + d)^2 = r$

Beispiel: $(x+3)^2 = 25$

Man kann diese Gleichung wie eine reinquadratische Gleichung lösen, wenn man sich nur $(x + 3)$ anstelle von x denkt:

$x + 3 = \sqrt{25}$ *oder* $x + 3 = -\sqrt{25}$
$x + 3 = 5$ *oder* $x + 3 = -5$
$x = 2$ *oder* $x = -8$
$L = \{2; -8\}$

4. Bestimme die Lösungsmenge.

a) $(x - 18)^2 = 625$ **b)** $(x + 7)^2 = 121$ **c)** $\frac{1}{2}(x - 3)^2 = 12{,}5$ **d)** $2(x + 5)^2 - 10{,}58 = 0$

5. Bestimme die Lösungsmenge. Wende zunächst eine binomische Formel an.

a) $x^2 - 10x + 25 = 36$ **c)** $x^2 + \frac{14}{8}x + \frac{49}{64} = \frac{121}{64}$ **e)** $x^2 + 18x + 81 = 0$

b) $x^2 + 14x + 49 = 225$ **d)** $x^2 - 12x + 36 = 13$ **f)** $x^2 - 24x + 144 = -9$

Lösen von gemischtquadratischen Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$

Beispiel: $x^2 + 12x - 28 = 0$

Man formt die Gleichung zunächst so um, dass man den Term auf der linken Seite einer binomischen Formel in ein Quadrat verwandeln kann.

$x^2 + 12x - 28 = 0 \quad | +28$

$x^2 + 12x = 28 \quad | +\left(\frac{12}{2}\right)^2$ (quadratische Ergänzung: Quadrat des Faktors von x)

$x^2 + 12x + \left(\frac{12}{2}\right)^2 = 28 + \left(\frac{12}{2}\right)^2 \quad | \text{T}$

$x^2 + 12x + 6^2 = 28 + 36 \quad | \text{T}$ (1. binomische Formel)

$(x + 6)^2 = 64$

$x + 6 = 8$ *oder* $x + 6 = -8$

$x = 2$ *oder* $x = -14$

$L = \{2; -14\}$

6. Bestimme die Lösungsmenge.

a) $x^2 + 2x = 63$
b) $x^2 + 6x = 91$
c) $x^2 - 11x + 10 = 0$
d) $x^2 - 7x - 30 = 0$
e) $x^2 - 4x + 20 = 0$
f) $x^2 - 17x + 60 = 0$
g) $x^2 + 2x - 1 = 0$
h) $x^2 - 40x + 111 = 0$
i) $x^2 - 6x + 4 = 0$
j) $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$
k) $x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$
l) $x^2 - 3{,}4x + 2{,}8 =$
m) $x^2 + 12x + 35 = 0$
n) $x^2 + 10x + 24 = 0$
o) $x^2 + 18x + 17 = 0$

7. Bestimme die Lösungsmenge. Bringe die Gleichung zunächst auf die Normalform $x^2 + px + q = 0$.

$2x^2 - 12x + 10 =$
$x^2 - 6x + 5 =$

a) $3x^2 - 22x + 35 = 0$
b) $91x^2 - 2x = 45$
c) $2x^2 + 4x + 3 = 0$
d) $15x^2 + 21 = 44x$
e) $3x^2 - 7x + 12 = 0$
f) $2x^2 + 3x - 35 = 0$
g) $14x^2 - 33 = 71x$
h) $\frac{1}{2}x^2 + 6x - 9 = 0$
i) $4x^2 - 8x - 19 = 0$
j) $25x^2 + 2 = 30x$
k) $\frac{4}{5}x^2 - 7x + 8 = 0$

8.
a) $x^2 + x - 56 = 0$
b) $x^2 - 9x - 10 = 0$
c) $x^2 + 13x = -30$
d) $x^2 - 17x + 60 = 0$
e) $x^2 - 2x + 2 = 0$
f) $x^2 - 10x + 32 = 0$
g) $x^2 + x = 1$
h) $x^2 - 7x + 11\frac{1}{2} = 0$
i) $x^2 + \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2}$
j) $x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$
k) $x^2 - \frac{1}{3}x = 8$
l) $x^2 + \frac{1}{7}x - 50 = 0$
m) $3x^2 + 22x + 35 = 0$
n) $91x^2 + 2x = 45$
o) $15x^2 - 21 = -26x$
p) $14x^2 = 33 - 71x$
q) $25x^2 + 2 = -30x$
r) $15x^2 + 527 = 17$
s) $6x^2 + x = 15$
t) $6x^2 - 13x + 6 = 0$
u) $7x^2 + 25x = 12$
v) $6x^2 + 7x = 3$
w) $6x^2 + 5x = 56$
x) $20x^2 + x = 12$

9. Bestimme die Lösungsmenge, möglichst ohne quadratische Ergänzung.

$x^2 + 5x = 0$
$x(x + 5) = 0$
$x = 0$ *oder*
$x = 0$ *oder*
$L = \{0; -5\}$

a) $x^2 - 7x = 0$
b) $x^2 + 10x = 0$
c) $2x^2 - 13x = 0$
d) $\frac{1}{2}x^2 + 9x = 0$
e) $x^2 = 4x$
f) $x^2 = -7x$
g) $2x^2 = 9x$
h) $\frac{1}{2}x^2 + 3\frac{1}{2}x = 0$
i) $2{,}5x^2 - 10x = 0$

10. **a)** $3x = -\frac{3}{5}x^2$ **b)** $-\frac{3}{7}x^2 - 10\frac{1}{2}x = 0$ **c)** $4\frac{3}{4}x = -3\frac{1}{3}x^2$

Diskriminante – Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung

$$
\begin{aligned}
x^2 + px + q &= 0 && \mid -q \\
x^2 + px &= -q && \mid +\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 \text{ (qu.E.)} \\
x^2 + px + \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 &= -q + \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 && \mid \text{ T (1. bin. Formel)} \\
\left(x+\tfrac{p}{2}\right)^2 &= \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q
\end{aligned}
$$

Die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung hängt vom Term $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ ab.
Dieser Term heißt *Diskriminante* (der Normalform).
Man muss eine *Fallunterscheidung* durchführen:

1. Fall:

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$

$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ *oder* $x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ *oder* $x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

(zwei Lösungen)

$L = \left\{-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q};\ -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\}$

2. Fall:

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$

$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0$

$x + \frac{p}{2} = 0$

$x = -\frac{p}{2}$

(eine Lösung)

$L = \left\{-\frac{p}{2}\right\}$

3. Fall:

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$

Das Quadrat einer Zahl ist stets nicht-negativ.

(keine Lösung)

$L = \{\ \}$

Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Falls die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ Lösungen besitzt, erhält man:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}; \qquad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

11. Bestimme mithilfe der Diskriminante die Anzahl der Lösungen. Sofern Lösungen vorliegen, bestimme diese mithilfe der Lösungsformel.

a) $x^2 - 8x - 7 = 0$
b) $x^2 - 7x + 15 = 0$
c) $x^2 - 16x + 64 = 0$
d) $x^2 + 2x + 7 = 0$
e) $x^2 - 7x + 3 = 0$
f) $x^2 - 8x = -10$
g) $x^2 + 5x = 2$
h) $x^2 + 19x + 8 = 0$
i) $\frac{1}{2}x^2 + 6x + 18 = 0$
j) $2x^2 - 3x + 8 = 0$
k) $3x^2 - 15x + 7 = 0$
l) $4x^2 + 28x + 51 = 0$

12.
a) $x^2 + 9x - 52 = 0$; $x^2 - 6x + 187 = 0$
b) $x^2 + 10{,}8x - 63 = 0$; $x^2 + 2{,}55x - 4{,}5 = 0$
c) $x^2 + 13x + 42{,}5 = 0$; $x^2 - 7x + 12{,}5 = 0$
d) $2x^2 - 3x - 104 = 0$; $9x^2 - 66x + 137 = 0$
e) $5y^2 + 14y + 9{,}8 = 0$; $3y^2 - 4{,}4y - 9{,}6 = 0$
f) $\frac{4}{9}z^2 - 2z + \frac{5}{2} = 0$; $\frac{5}{6}z^2 - 4z + \frac{24}{5} = 0$

13. Bringe die Gleichung jeweils zunächst auf die Normalform. Bestimme dann die Lösungsmenge. Überprüfe durch Einsetzen, sofern die Lösungsmenge nicht leer ist.

a) $(x - 5)(x + 7) = 45$; $(x - 8)(x + 8) = 80$
b) $(x - 8)(x - 3) = 1{,}4x$; $(x + 2)(x - 9) = -5{,}6x$
c) $(2x - 3)(3x - 2) = 5(x^2 - 6)$; $(5x + 2)(8 - 3x) = 4x(11 - 4x)$

14.
a) $(7 - 2x)(7x - 9) = (3x - 5)(15 - 4x)$; $(5 - 2x)(3x - 4) = (2x - 12)(2x - 2)$
b) $(2x + 3)(20 - 3x) = (12 - x)(x - 1)$; $(3x + 7)(5x - 2) = (5x + 1)(8x - 3)$

Lösen von Bruchgleichungen, die auf quadratische Gleichungen führen

Beispiel: $\frac{10}{x} - \frac{3}{x-2} = 1$

Sei $x \neq 0$ und $x \neq 2$ (allgemeine Annahme).

$$\frac{10}{x} - \frac{3}{x-2} = 1 \qquad | \cdot x(x-2)$$

$$\frac{10x(x-2)}{x} - \frac{3x(x-2)}{x-2} = x(x-2) \qquad | \text{ T (Kürzen)}$$

$$10(x-2) - 3x = x(x-2) \qquad | \text{ T (Auflösen der Klammern)}$$

$$10x - 20 - 3x = x^2 - 2x \qquad | -x^2 + 2x$$

$$-x^2 + 9x - 20 = 0 \qquad | \cdot (-1)$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0 \qquad | -20 + (\tfrac{9}{2})^2$$

$$x^2 - 9x + (\tfrac{9}{2})^2 = -20 + (\tfrac{9}{2})^2 \qquad | \text{ T (2. binomische Formel)}$$

$$(x - \tfrac{9}{2})^2 = \tfrac{1}{4}$$

$x - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$ *oder* $x - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{10}{2} = 5$ *oder* $x = \frac{8}{2} = 4$

$L = \{4; 5\}$

15. Forme zunächst die Bruchgleichung um in die Normalform einer quadratischen Gleichung. Bestimme dann die Lösungsmenge (Probe!).

a) $\frac{8}{x-3} - \frac{7}{x} = 1$ **c)** $\frac{2}{x-2} + \frac{4}{x+2} = 1$ **e)** $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{5-x} = 2$ **g)** $\frac{3}{1-2x} - \frac{10}{12x-1} = 1$

b) $\frac{9}{x+1} - \frac{8}{x} = -1$ **d)** $\frac{40}{x+3} - \frac{6}{x-3} = 2$ **f)** $\frac{10}{4-x} - \frac{15}{7-x} = 2$ **h)** $\frac{5}{1-3x} - \frac{6}{10x+2} = 2$

14.2 Wurzelgleichungen

Gleichungen wie $\sqrt{x} = 7$; $\sqrt{x} + 2 = 3$, $x + \sqrt{5x-1} = 5$ nennt man **Wurzelgleichungen.**

Lösen von Wurzelgleichungen, die auf lineare Gleichungen führen

Beispiel: $\sqrt{x} + 2 = 5$

Beim Freistellen von x stört die Wurzel.
Durch Quadrieren versucht man sie zu beseitigen. Dies gelingt, wenn die Wurzel auf einer Seite allein steht.

$\sqrt{x} + 2 = 5 \quad | -2$

$\sqrt{x} = 3 \quad |$ Quadrieren beider Seiten

$x = 9$

$L = \{9\}$

Probe:

$\sqrt{9} + 2 = 5$ (w?)

LS:	RS:
$\sqrt{9} + 2 = 3 + 2 = 5$	5

Die Probe ist notwendig; siehe Seite 69.

1. Bestimme die Lösungsmenge. Mache stets die Probe.

a) $\sqrt{x} = 6$ **d)** $2\sqrt{x} = 15$ **g)** $\sqrt{x} - 2 = 3$ **j)** $\sqrt{2x} + 5 = 13$

b) $\sqrt{x} = 7$ **e)** $\sqrt{x} = 1{,}2$ **h)** $13 - \sqrt{x} = 9$ **k)** $6 + \sqrt{3x} = 18$

c) $\sqrt{x} = \frac{4}{9}$ **f)** $\sqrt{x} = 2\frac{3}{5}$ **i)** $3\sqrt{x} - 7 = 11$ **l)** $10 - \sqrt{\frac{1}{2}x} = 7$

2. **a)** $\sqrt{3x-5} + 4 = 5$ **c)** $\sqrt{x+5} = 3$ **e)** $\sqrt{2x+1} = \frac{1}{2}$ **g)** $\sqrt{9x+10} = 10$

b) $5 - 3\sqrt{2x-1} = 2$ **d)** $\sqrt{7x+2} = 4$ **f)** $\sqrt{3 + \frac{1}{2}x} = 5$ **h)** $\sqrt{7x+4} = 5$

3. **a)** $\sqrt{3x-5} = \sqrt{4x-7}$ **c)** $\sqrt{5x-7} = \sqrt{4x}$ **e)** $5\sqrt{x} - 7 = 3\sqrt{x} - 1$

b) $\sqrt{1+7x} = \sqrt{3+5x}$ **d)** $3\sqrt{6x+7} = 7\sqrt{2x-5}$ **f)** $7\sqrt{3x} - 1 = 5\sqrt{3x} + 5$

Lösen von Wurzelgleichungen, die auf quadratische Gleichungen führen

Beispiel:

$$\begin{aligned}
x + \sqrt{5x-1} &= 5 && \mid -x \\
\sqrt{5x-1} &= 5 - x && \mid \text{Quadrieren} \\
5x - 1 &= (5-x)^2 && \mid \text{T} \\
5x - 1 &= 25 - 10x + x^2 && \mid -25 - 5x \\
-26 &= -15x + x^2 && \\
x^2 - 15x &= -26 && \mid +\left(\tfrac{15}{2}\right)^2 \\
x^2 - 15x + \left(\tfrac{15}{2}\right)^2 &= -26 + \left(\tfrac{15}{2}\right)^2 && \mid \text{T (2. binomische Formel)} \\
\left(x - \tfrac{15}{2}\right)^2 &= \tfrac{121}{4} &&
\end{aligned}$$

$x - \frac{15}{2} = \frac{11}{2}$ *oder* $x - \frac{15}{2} = -\frac{11}{2}$

$x = \frac{26}{2} = 13$ *oder* $x = \frac{4}{2} = 2$

Probe:

$13 + \sqrt{5 \cdot 13 - 1} = 5$ (w?)

LS:	RS: 5
$13 + \sqrt{5 \cdot 13 - 1}$	
$= 13 + \sqrt{64}$	
$= 13 + 8$	
$= 21$	

13 ist nicht Lösung.

$2 + \sqrt{5 \cdot 2 - 1} = 5$ (w?)

LS:	RS: 5
$2 + \sqrt{5 \cdot 2 - 1}$	
$= 2 + \sqrt{9}$	
$= 2 + 3$	
$= 5$	

2 ist Lösung.

$L = \{2\}$.

Beachte: Das Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung; es können Lösungen hinzukommen, die nicht zur Lösungsmenge der Wurzelgleichung gehören (siehe Beispiel). Man muss deshalb stets die Pobe durchführen.

4. Bestimme die Lösungsmenge. Mache auch die Probe.

a) $30 - \sqrt{x} = x$ **b)** $3x - \sqrt{x} = 4$ **c)** $2x = \sqrt{3x} + 18$ **d)** $\sqrt{2x} - x = 5$

5. Bestimme die Lösungsmenge.

a) $x + 3 = \sqrt{6x+25}$ **c)** $\sqrt{7x+4} + x = 8$ **e)** $\sqrt{x+1} + \frac{1}{4}x + 1 = 0$

b) $x + 4 = \sqrt{8x+25}$ **d)** $3 + \sqrt{6x+1} = 2x$ **f)** $\sqrt{x-1} - \frac{1}{5}x = 1$

6. **a)** $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-3} = 6$ **b)** $\sqrt{2x+11} + \sqrt{2x-5} = 8$ **c)** $\sqrt{4x-3} + \sqrt{5x+1} = \sqrt{15x+4}$