

Concepto de ángulo

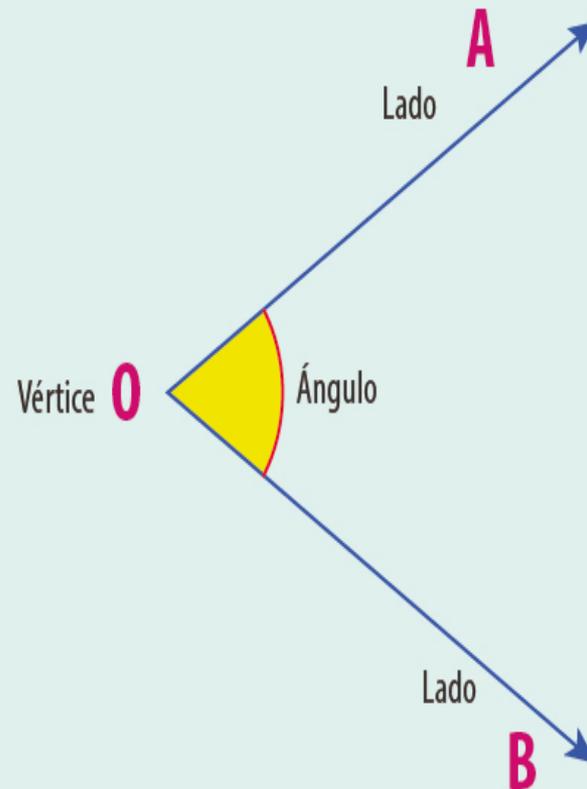
Un ángulo se define como la abertura comprendida entre dos rayos llamados lados que parten del mismo punto llamado vértice. Los rayos pueden ser segmentos de recta, dos rectas o semirrectas.

Un ángulo se simboliza como $\angle BOA$

- La letra que define al rayo inicial se escribe primero.
- La letra que representa al vértice se escribe en medio.
- La letra que representa al rayo final del ángulo se escribe al final.

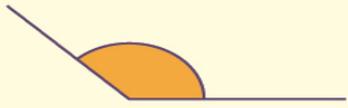
Otra forma de simbolizarlos es como: $\angle \alpha$

El símbolo del ángulo seguido de la letra α del alfabeto griego.



Clasificación de los ángulos

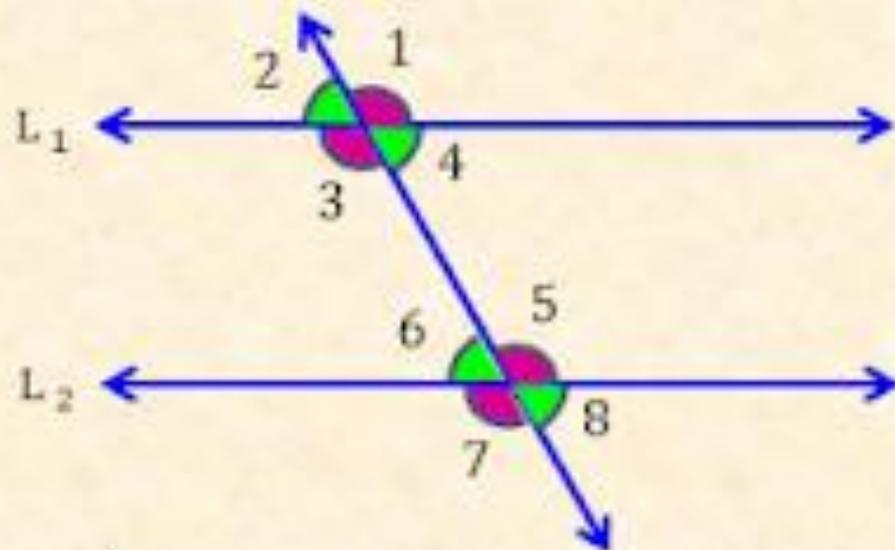
De acuerdo con sus medidas

Agudo	Mide menos de 90° .	
Recto	Mide 90° .	
Obtuso	Mide más de 90° pero menos de 180° .	
Llano	Mide 180° .	
Perigonal	Mide 360° .	

De acuerdo con la suma de sus medidas

Complementarios	La suma de dos ángulos adyacentes es de 90° .	
Suplementarios	La suma de dos ángulos adyacentes es de 180° .	

ÁNGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS PARALELAS Y UNA SECANTE



A) Ángulos correspondientes:

$$\hat{1} \equiv \hat{5} ; \hat{2} \equiv \hat{6} ; \hat{3} \equiv \hat{7} ; \hat{4} \equiv \hat{8}$$

B) Ángulos alternos:

Ángulos alternos internos

$$\hat{3} \equiv \hat{5} ; \hat{4} \equiv \hat{6}$$

Ángulos alternos externos

$$\hat{2} \equiv \hat{8} ; \hat{1} \equiv \hat{7}$$

C) Ángulos conjugados

La suma de sus medidas es igual a 180°

Ángulos conjugados internos

$$m \angle 4 + m \angle 5 = 180^\circ$$

$$m \angle 3 + m \angle 6 = 180^\circ$$

Ángulos conjugados externos

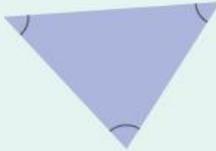
$$m \angle 1 + m \angle 8 = 180^\circ$$

$$m \angle 2 + m \angle 7 = 180^\circ$$

Triángulos: Clasificación

Un triángulo es un **polígono** que se forma a partir de la unión de tres rectas que se interceptan en **tres puntos** llamados vértice, mientras que los segmentos reciben el nombre de lados.

Se clasifican por:

La longitud de sus lados.	La amplitud de sus ángulos.
Equilátero Los tres lados tienen la misma medida. 	Acutángulos Todos sus ángulos son agudos. 
Isósceles Dos de sus lados tienen la misma medida. 	Rectángulo Uno de sus ángulos es recto. 
Escaleno Todos sus lados tienen distinta medida. 	Obtusángulos Uno de sus ángulos es obtuso. 

Triángulos: Congruencia

En geometría se usa la palabra *congruentes* para comparar dos figuras que son iguales.

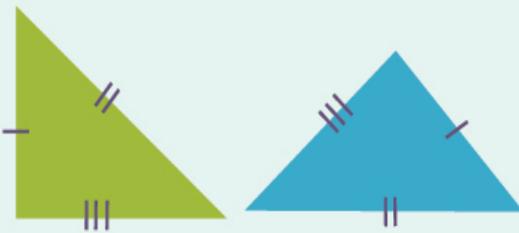
A las reglas para verificar si dos triángulos son congruentes usando el mínimo de sus elementos se les conoce como criterios de congruencia.

Criterios de congruencia

LLL

Lado - Lado – Lado

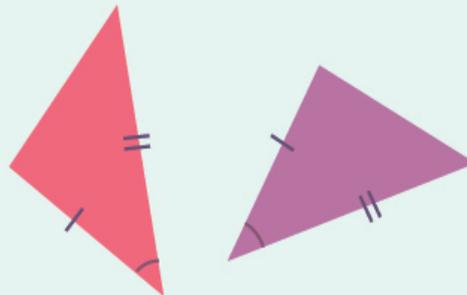
Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados correspondientes iguales.



LAL

Lado - Ángulo - Lado

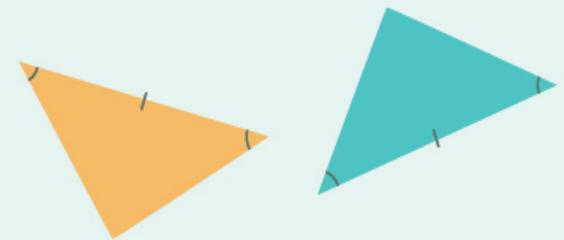
Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados correspondientes y el ángulo comprendido entre ellos, congruentes.



ALA

Ángulo - Lado – Ángulo

Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos correspondientes y el lado comprendido entre ellos, congruentes.



Triángulos: Semejanza

En geometría se dice que dos **figuras son semejantes si cumplen con poseer la misma forma pero distinto tamaño.**

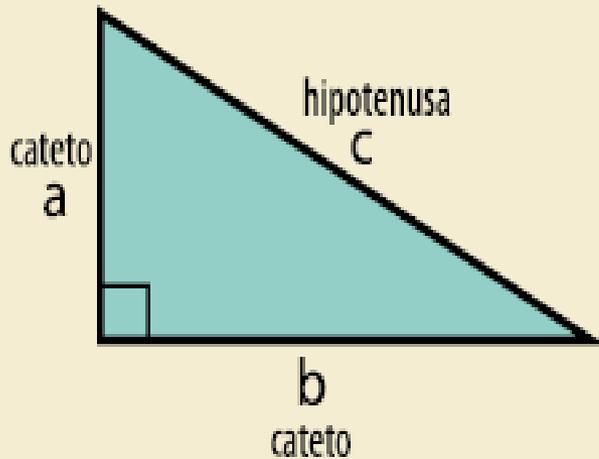
La semejanza se utiliza por ejemplo para realizar figuras a escala como pueden ser mapas, planos, maquetas, ampliación o reducción de fotografías.

Criterios de congruencia

<p>AAA Ángulo - Ángulo - Ángulo</p>	<p>Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres ángulos iguales.</p>	 <p>Es decir: Si $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ de lo anterior se deduce que $\gamma = \gamma'$</p>
<p>LLL Lado - Lado - Lado</p>	<p>Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes por parejas son proporcionales.</p>	 <p>Es decir: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = K$</p>
<p>LAL Lado - Ángulo - Lado</p>	<p>Dos triángulos son semejantes si uno de sus ángulos correspondientes son iguales y los dos lados correspondientes que forman el ángulo son proporcionales.</p>	 <p>Es decir: $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$ y $\alpha = \alpha'$</p>
<p>ALA Ángulo - Lado - Ángulo</p>	<p>Dos triángulos son semejantes si dos de sus ángulos son iguales y los lados correspondientes sobre el que están los ángulos son proporcionales.</p>	

Teorema de Pitágoras

Uno de los teoremas más usados en Geometría es el de Pitágoras, que enuncia la relación numérica entre los lados de un triángulo rectángulo. Se cree que esta relación ya era conocida por los griegos pero fueron los pitagóricos quienes generalizaron y demostraron que se cumple para todo triángulo rectángulo y le dieron la categoría de Teorema.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

———— // ————

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

El Teorema de Pitágoras sólo se aplica en triángulos rectángulos y establece que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Ejemplo 1. La escalera

Una escalera de bomberos de 17 metros de longitud se apoya en la fachada de un edificio, poniendo el pie de la escalera a 8 metros del edificio. ¿Qué altura en metros, alcanza la escalera?

- La altura representa uno de los catetos del triángulo rectángulo.
- La longitud de la escalera es la hipotenusa.

Por lo tanto para resolver el problema usamos:

$$a = \sqrt{(c^2 - b^2)}$$

- a = altura en metros que alcanza la escalera.
- c = 17 metros.
- b = 8 metros.

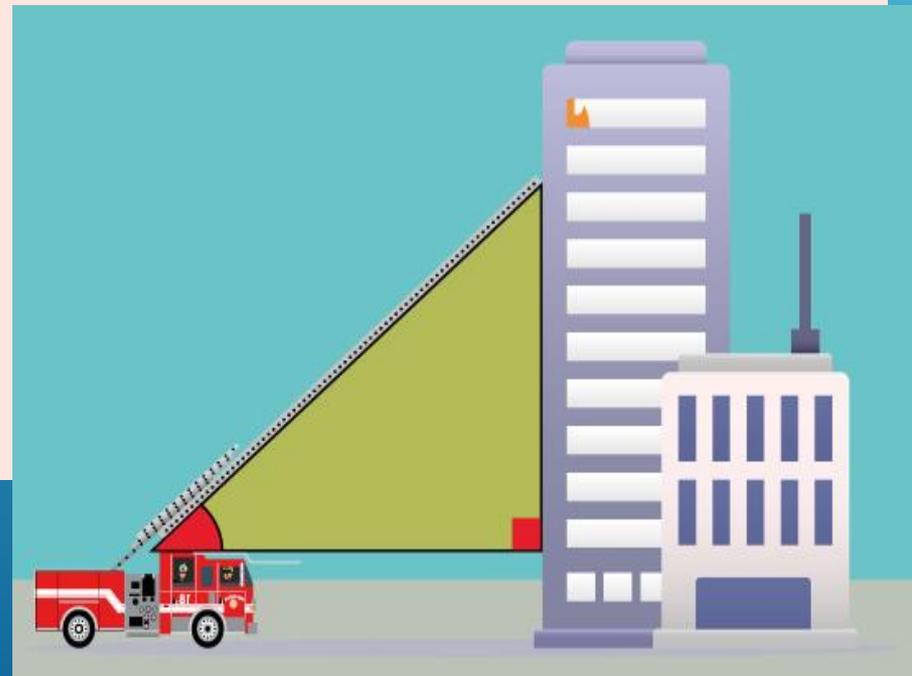
Sustituyendo los valores obtenemos:

$$a = \sqrt{(17^2 - 8^2)}$$

$$a = \sqrt{(289 - 64)}$$

$$a = \sqrt{225} = 15$$

La altura que alcanza la escalera es de 15 metros.



Polígonos: clasificación, perímetro y área.

Un polígono es una figura cerrada cuyos lados son segmentos de recta.

El perímetro de cualquier polígono es la suma de todos sus lados.

El área de un polígono es la medida de la región o superficie que encierra el polígono.

Polígonos Regulares

Son aquellos cuyos lados tienen la misma medida de sus lados y de sus ángulos, los polígonos de cinco lados o más se componen de n lados de la misma longitud y una apotema que es la perpendicular trazada desde el centro de un polígono regular a cualquiera de sus lados.

Elementos de los polígonos



Elementos

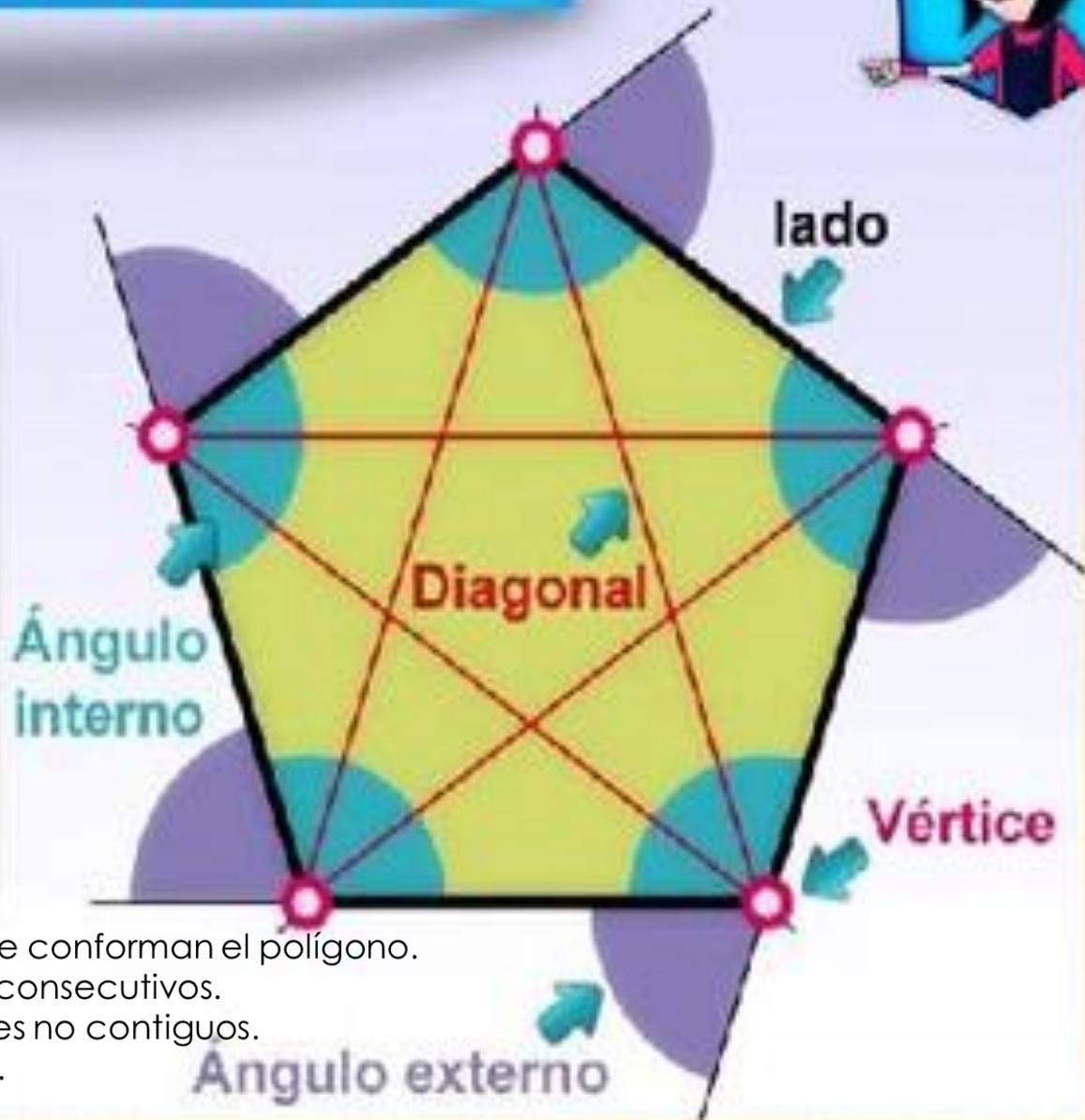
— Lados

○ Vértices

☒ Ángulo interno

☒ Ángulo externo

— Diagonal



En un polígono podemos distinguir:

Lado: es cada uno de los segmentos que conforman el polígono.

Vértice: el punto de unión de dos lados consecutivos.

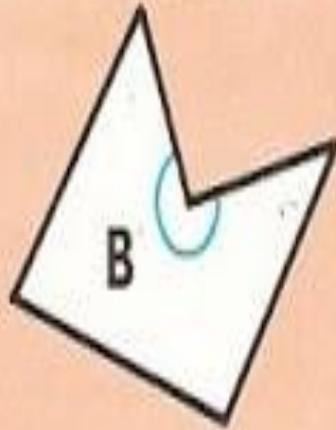
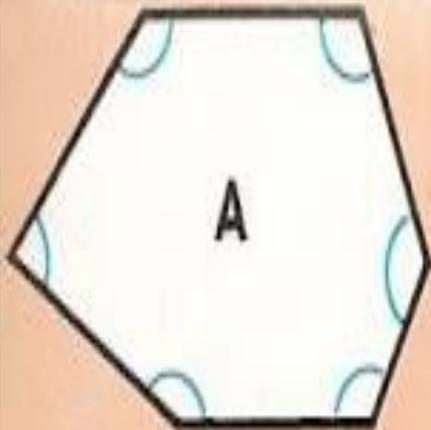
Diagonal: segmento que une dos vértices no contiguos.

Perímetro: es la suma de todos sus lados.

Ángulo interior y ángulo exterior.

POLÍGONO CONVEXO

POLÍGONO CÓNCAVO



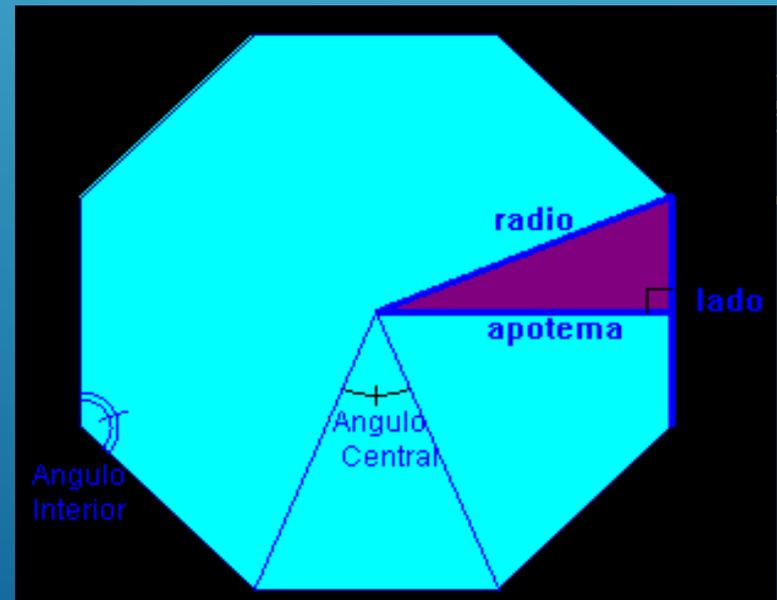
Convexo, si al atravesarlo una recta lo corta en un máximo de dos puntos.

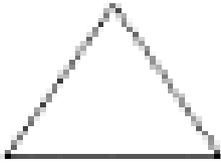
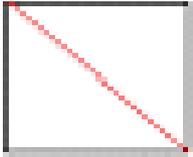
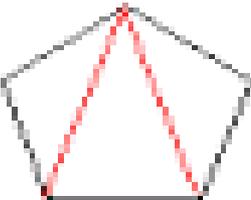
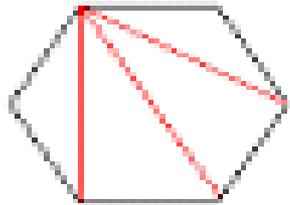
Cóncavo, si al atravesarlo una recta puede cortarlo en más de dos puntos;

En un polígono regular podemos distinguir, además:

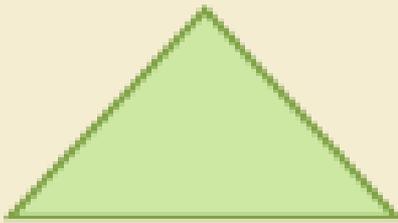
Centro: el punto equidistante de todos los vértices y lados.

Apotema: segmento que une el centro del polígono con el centro de un lado; es perpendicular a dicho lado.



Nombre del polígono	Número de lados	Diagonales desde un vértice	Ángulo en el vértice	Suma de los ángulos
Triángulo	3	0 	60°	180°
Cuadrado	4	1 	90°	360°
Pentágono	5	2 	108°	540°
Hexágono	6	3 	120°	720°
n-ágono	n	n-3	$\frac{(n-2)180^\circ}{n}$	$(n-2)180^\circ$

Polígonos regulares



Triángulo
equilátero



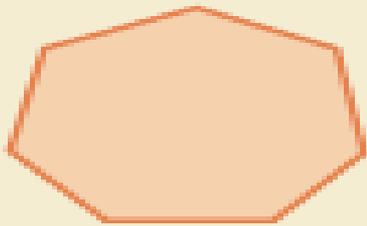
Cuadrado



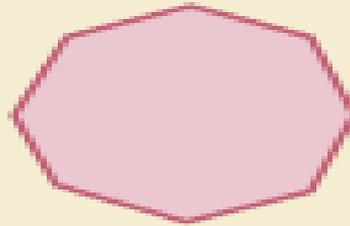
Pentágono
regular



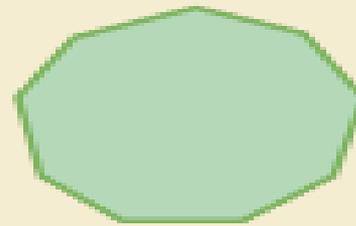
Hexágono
regular



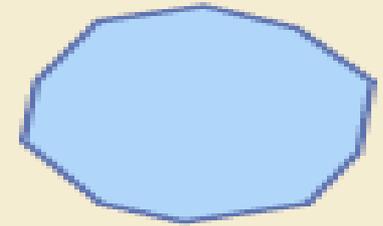
Heptágono
regular



Octágono
regular



Eneágono
regular



Decálogo
regular

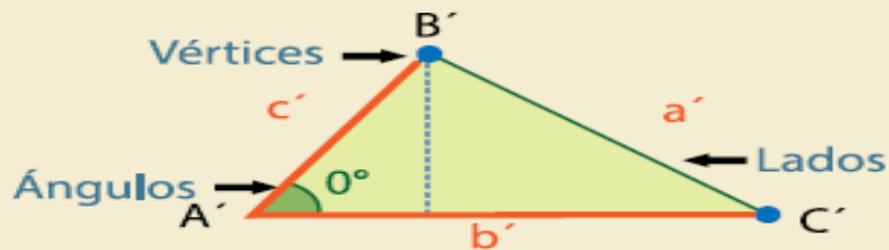


Elementos de los polígonos

Nombre

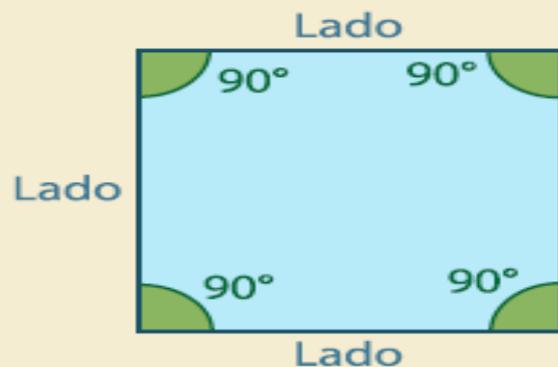
Elementos

Triángulo



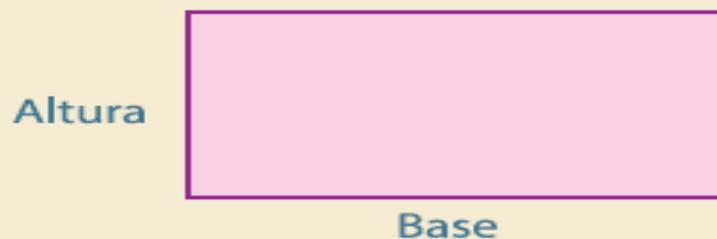
Se compone de: Tres lados
Tres vértices. Tres ángulos. a representa la altura.

Cuadrado



Se compone de: Cuatro lados de la misma medida. Cuatro ángulos rectos.

Rectángulo



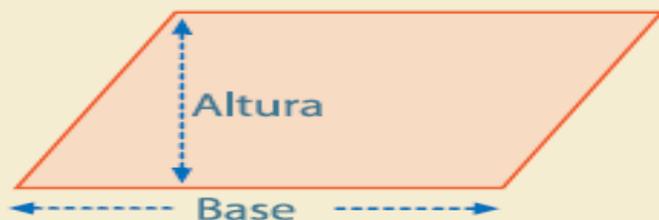
Se compone de: Un lado largo llamado base. Un lado ancho llamado altura. Cuatro ángulos rectos.

Rombo



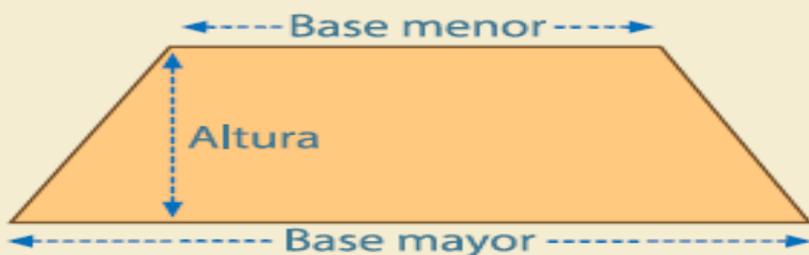
Se compone de: Una diagonal mayor denominada D . Una diagonal menor denominada d . Cuatro lados iguales.

Romboide



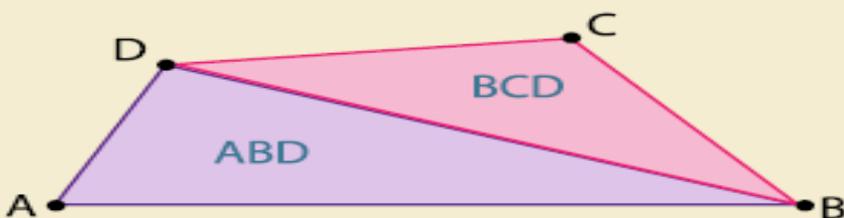
Se compone de: Base y altura, sus lados no forman ángulos rectos, el lado superior es paralelo al lado inferior, los lados laterales son paralelos entre sí.

Trapezio



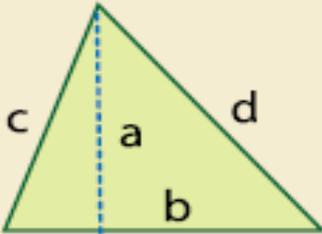
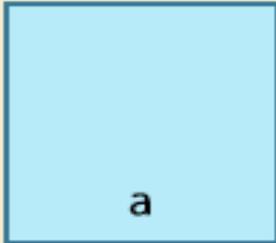
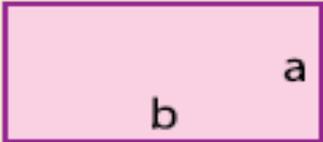
Se compone de: Dos lados paralelos, el más largo es llamado base mayor y el otro base menor. Una altura.

Trapezoide

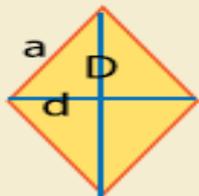


Es un cuadrilátero, es decir un polígono de cuatro lados, sin lados opuestos paralelos.

Clasificación de polígonos, perímetro y área

Nombre	Lados	Perímetro	Área
<p>Triángulo</p> 	3	$P = b + c + d$	$A = \frac{ba}{2}$
<p>Cuadrado</p> 	4	$P = a + a + a + a$ $P = 4a$	$A = (a)(a)$ $A = a^2$
<p>Rectángulo</p> 	4	$P = a + a + b + b$ $P = 2(a + b)$	$A = ba$

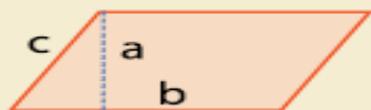
Rombo



$$P = a + a + a + a$$
$$P = 4a$$

$$A = \frac{Dd}{2}$$

Romboide

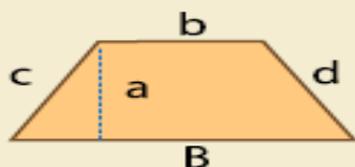


4

$$P = b + b + c + c$$
$$P = 2(b + c)$$

$$A = ba$$

Trapezio

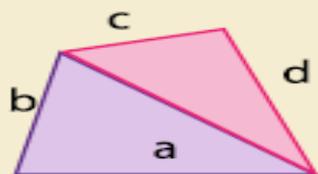


4

$$P = b + c + d + B$$

$$A = \frac{(B+b) a}{2}$$

Rombo

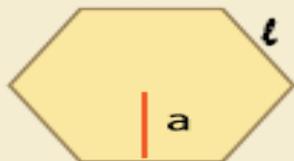


4

$$P = a + b + c + d$$

A = suma de las áreas de los triángulos

Polígonos reulares



n

$$P = nl$$

$$A = \frac{Pa}{2}$$

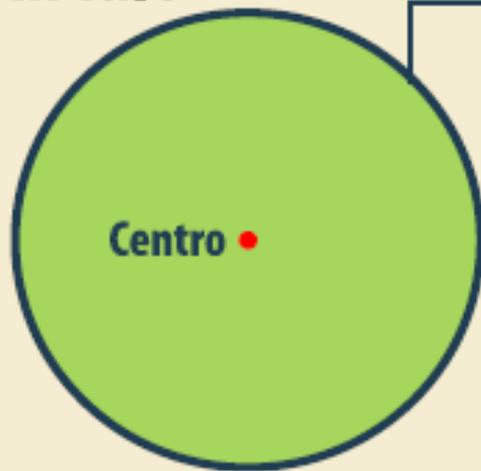
Donde P es perímetro y a apotema

Circunferencia y círculo: perímetro y área

Introducción

La circunferencia es una línea curva cerrada cuyos puntos equidistan de otro situado en el mismo plano que se llama centro. El círculo es una figura geométrica delimitada por una circunferencia.

Círculo

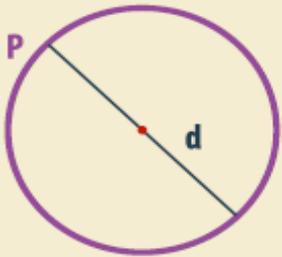


Circunferencia

Recuerda que el valor de π es 3.14159... y lo redondeamos dejando su valor en 3.1416.

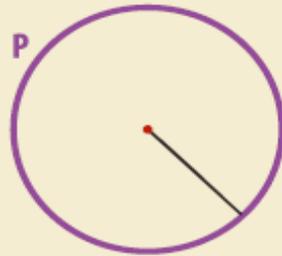
Perímetro de la circunferencia

Si dividimos la longitud de una circunferencia (el perímetro) entre la longitud de su diámetro, el resultado es el número π , como sabes el diámetro es dos veces el radio de una circunferencia, por lo tanto, para obtener el perímetro de la circunferencia multiplicamos el diámetro por π o dos veces el radio por π .



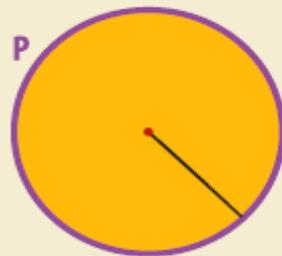
P: longitud de la circunferencia.
d: longitud del diámetro.

$$\frac{P}{d} = \pi$$
$$P = \pi d$$



r: longitud de radio.

$$\frac{P}{2r} = \pi$$
$$P = \pi 2r$$



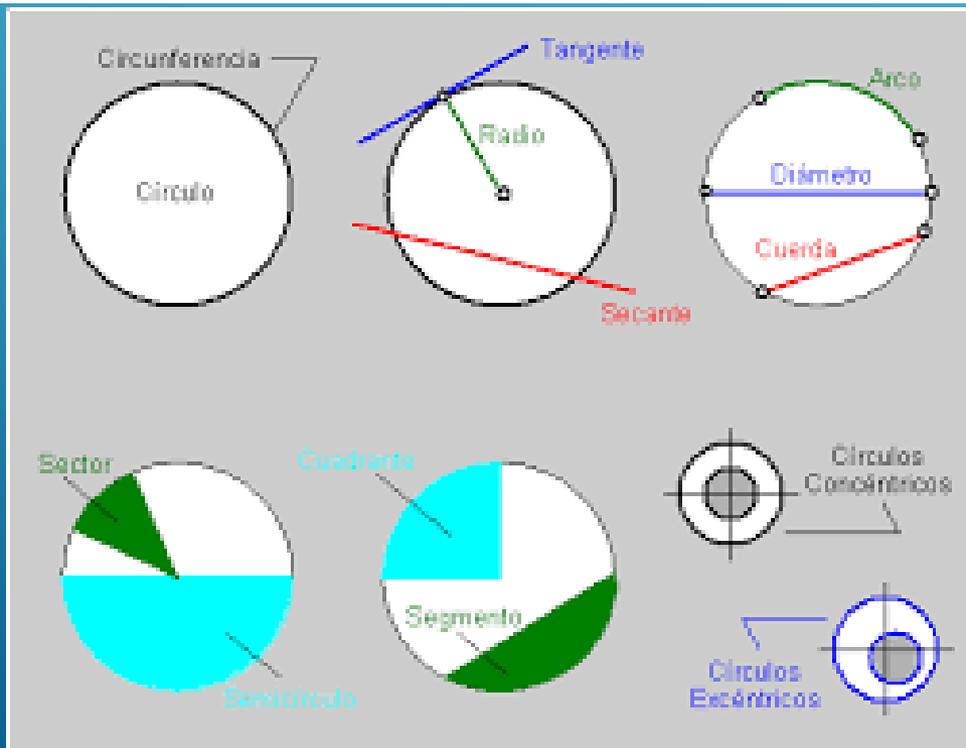
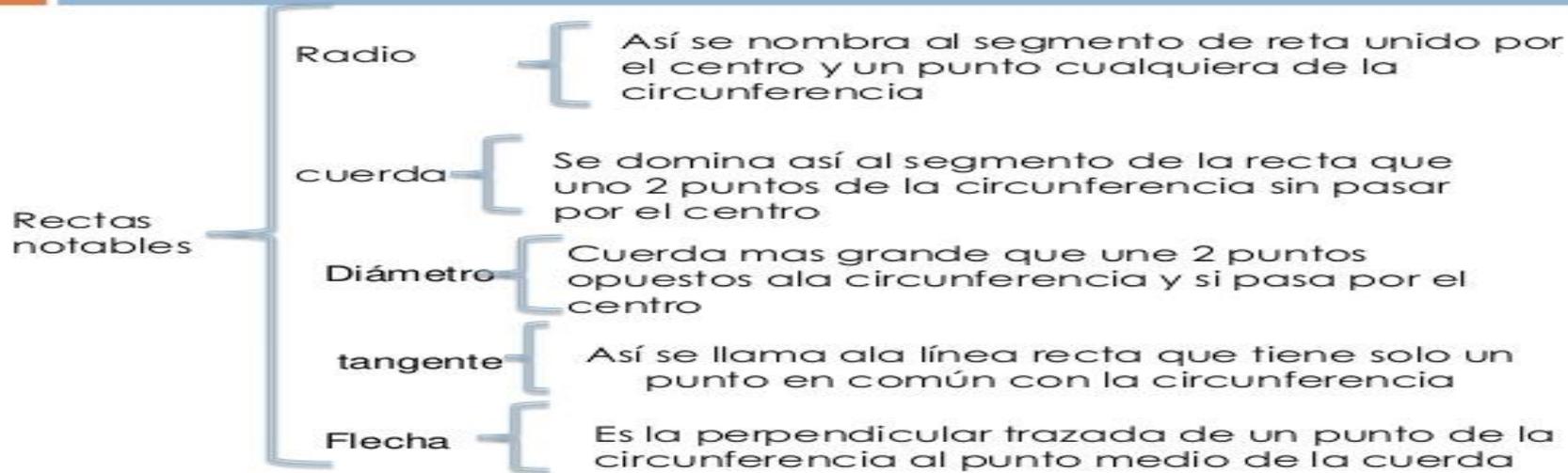
A: área del círculo.
r: longitud de radio.

$$A = \pi r^2$$
$$P = \pi 2r$$

Área del círculo
Para calcular el área del círculo se multiplica π por radio al cuadrado:

¡Recuerda! El valor de π es 3.14159... y lo redondeamos dejando su valor en 3.1416.

RECTAS NOTABLES



Ejemplo

Se tiene un terreno de forma irregular y se desea conocer su perímetro para cercarlo y el área para sembrar maíz.

Para calcular el perímetro:

Para calcular el perímetro debemos sumar todas las longitudes y en el caso de la parte circular debemos obtener el perímetro de la mitad de la circunferencia. Sabemos que:

La base del rectángulo 1 mide: $11 + 8 = 19$ m.

La altura desde el rectángulo 1 hasta el rectángulo 2 mide: $7 + 4 = 11$ m.

La mitad de la circunferencia que representa la figura 3 mide

$$\frac{\pi d}{2}$$

(pi por diámetro entre 2), es decir:

$$\frac{(3.1416)(3)}{2}$$

$$= 4.7124 \text{ m.}$$

La altura del rectángulo 2 mide: 4 m.

La parte de la base superior del rectángulo 1 mide: 11 m.

La altura del rectángulo 1 mide: 7m.

Para obtener el perímetro total del terreno sumamos todas las medidas de color azul:

$$P = 19 + 11 + 4.7124 + 4 + 11 + 7 = 56.7124 \text{ m}$$

Por lo tanto, para cercar el terreno se deben comprar 56.7124 m de cerca.

Para calcular el área:

Para calcular el área procedemos de la misma manera: obtenemos el área de la figura 1, de la figura 2 y de la figura 3 y las sumamos para obtener el área total del terreno. La figura 1 es un rectángulo, por lo tanto, su área es base por altura, la base mide 19 m y la altura 7 m.

$$A = bh$$

$$A = (19)(7) = 133 \text{ m}^2$$

La figura 2 es un rectángulo, por lo tanto, su área es base por altura, la base mide 8 m y la altura 4 m

$$A = bh$$

$$A = (8)(4) = 32 \text{ m}^2$$

La figura 3 es la mitad de un círculo, por lo tanto, el área es pi por radio al cuadrado entre 2 porque sólo es la mitad de un círculo:

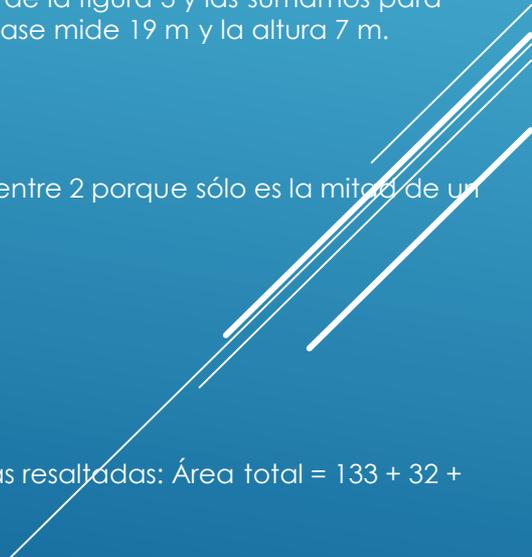
$$A = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$A = \frac{(3.1416)(4.2)^2}{2}$$

$$= 25.1328 \text{ m}^2$$

Para obtener el área de todo el terreno se suman las áreas de cada figura, es decir, las cifras resaltadas: Área total = $133 + 32 + 25.1328 = 190.1328 \text{ m}^2$

Por lo tanto puede sembrar en el terreno hasta 190.1328 m² de maíz.



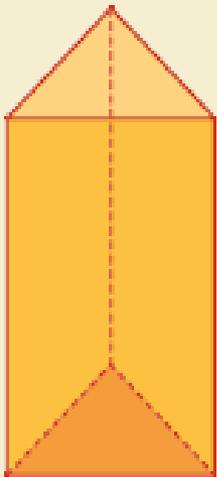
Volumen

Se define como el espacio que ocupa un cuerpo.

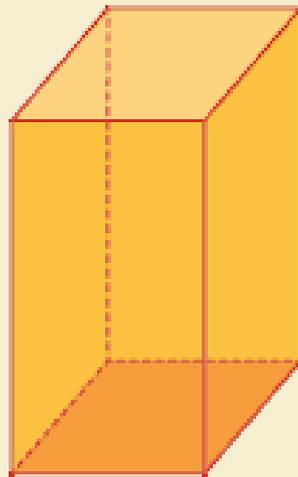
Para calcular el volumen de un cuerpo geométrico tenemos que identificar si se trata de un prisma o una pirámide.

Prisma es el cuerpo geométrico que tiene dos bases paralelas e iguales y sus caras son paralelogramos.

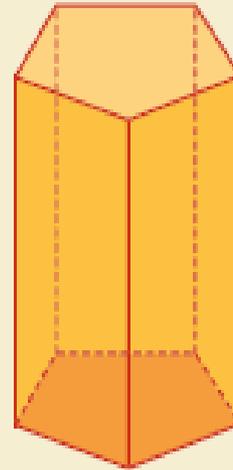
Prismas



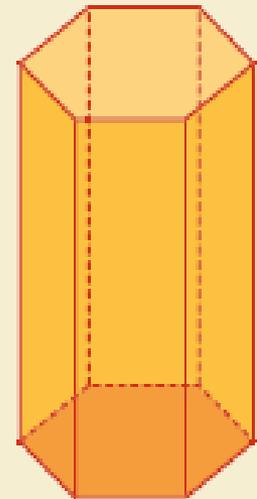
Prisma triangular
bases: triángulos



Prisma cuadrangular
bases: cuadriláteros



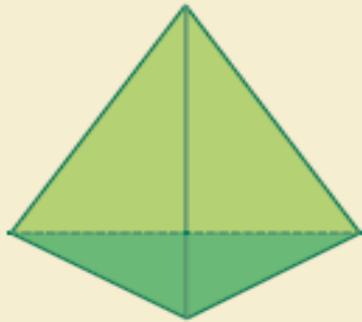
Prisma pentagonal
bases: pentágonos



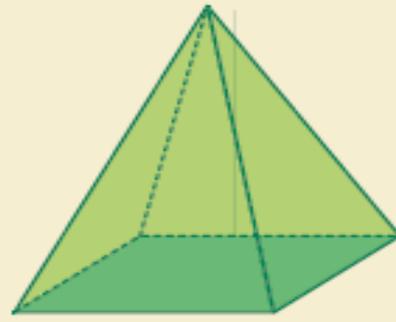
Prisma exagonal
bases: exágonos

Pirámide son los que tienen una base y sus caras son triángulos que se unen en un punto llamado cúspide.

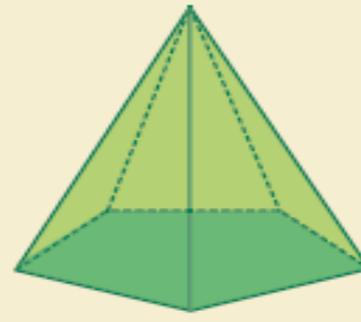
Pirámides



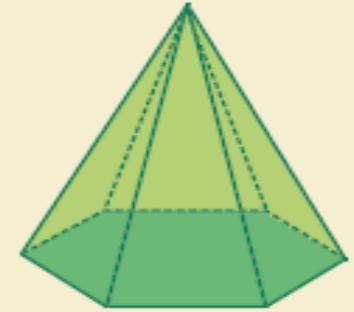
Pirámide triangular
base: 3 lados



Pirámide rectangular
base: 4 lados



Pirámide pentagonal
base: 5 lados

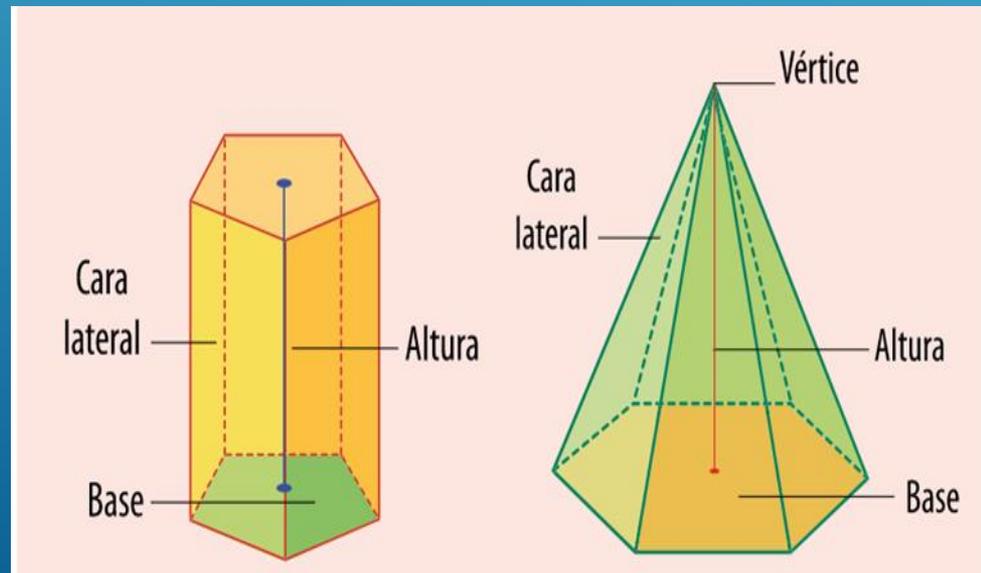


Pirámide exagonal
base: 6 lados

Para calcular el volumen de un prisma se debe obtener el área de la base y multiplicarla por su altura:

$$V = A_b(h)$$

- A_b es el área de la base.
- h es la altura del prisma.



Para calcular el volumen de una pirámide se debe obtener el área de la base, multiplicarla por su altura y dividir el resultado entre 3:

$$V = A_b(h) / 3$$

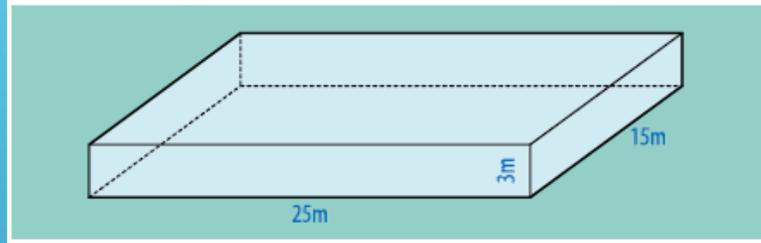
- A_b es el área de la base.
- h es la altura de la pirámide.

Ejemplo 1. La piscina

Una piscina tiene forma de prisma rectangular de dimensiones 25 m x 15 m x 3 m. ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenarla?

Solución:

$$V = Abh$$



Ab = es el área de la base, como es rectangular, el área se calcula como base por altura.

$$Ab = bh$$

$$Ab = (25)(15)$$

$$Ab = 375 \text{ m}^2$$

$V = Abh$ el volumen se calcula multiplicando área de la base por la altura de la piscina.

$$V = (375)(3)$$

$$V = 1125 \text{ m}^3$$

Para cambiar de m^3 a litros, la equivalencia es $1 \text{ m}^3 = 1000$ litros.

Por lo tanto, se necesitan 1,125,000 litros de agua.

GRACIAS

