Club GeoGebra Iberoamericano

4

LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS

4. LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS

Introducción

Para construir un lugar geométrico necesitaremos dos objetos: un punto que será el que describirá el lugar geométrico, y otro que será el punto que se mueve y hace que las condiciones cambien, y por tanto, exista un lugar geométrico.

Evidentemente, el objeto que se mueve no debe hacerlo libremente por el plano, se moverá sobre otro objeto del cual tendrá dependencia.

Para trazar un lugar geométrico, una vez seleccionada la herramienta **Lugar geométrico** , tendremos que marcar el punto que describirá el lugar y el punto que se mueve para describir el lugar. Es decir, respondemos a la pregunta: "¿qué lugar geométrico describe el punto P cuando se mueve el punto A sobre el objeto C?"

Ejemplo 1

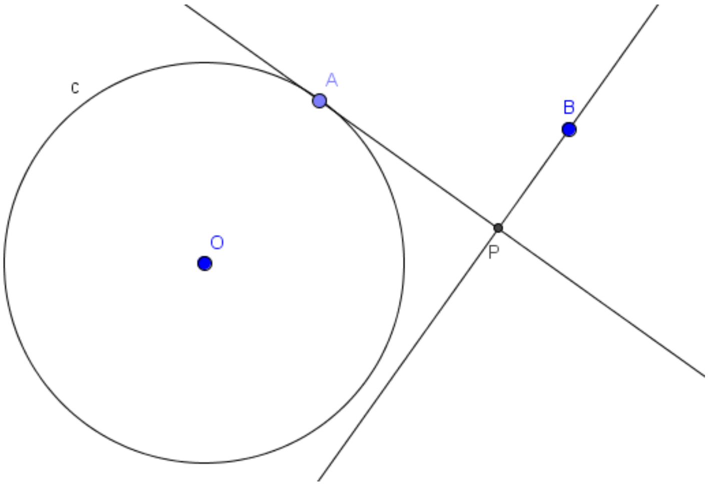
Para un punto A de una circunferencia y un punto exterior B, sea P el punto de intersección de la recta tangente a la circunferencia por el punto A y de la recta perpendicular a la tangente anterior trazada por el punto B.

Hallar el lugar geométrico del punto P cuando A recorre la circunferencia.

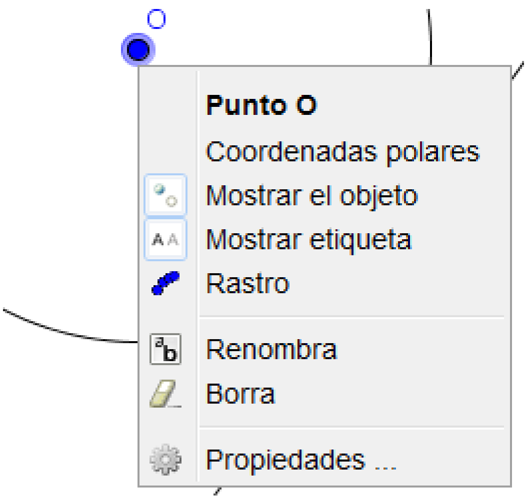
Determinar el lugar geométrico que resultará cuando B sea un punto situado en la circunferencia, o cuando sea el centro de la circunferencia.

Una vez dibujados los elementos necesarios: circunferencia, punto A y punto B, trazamos la recta tangente a la circunferencia por el punto A, que debe cumplir la condición de perpendicularidad con el radio trazado por el punto A.

A continuación, trazamos la recta perpendicular a la tangente anterior por el punto B. Creamos el punto P como punto de intersección de las dos rectas anteriores, para ello será necesario utilizar la herramienta Intersección de dos objetos.

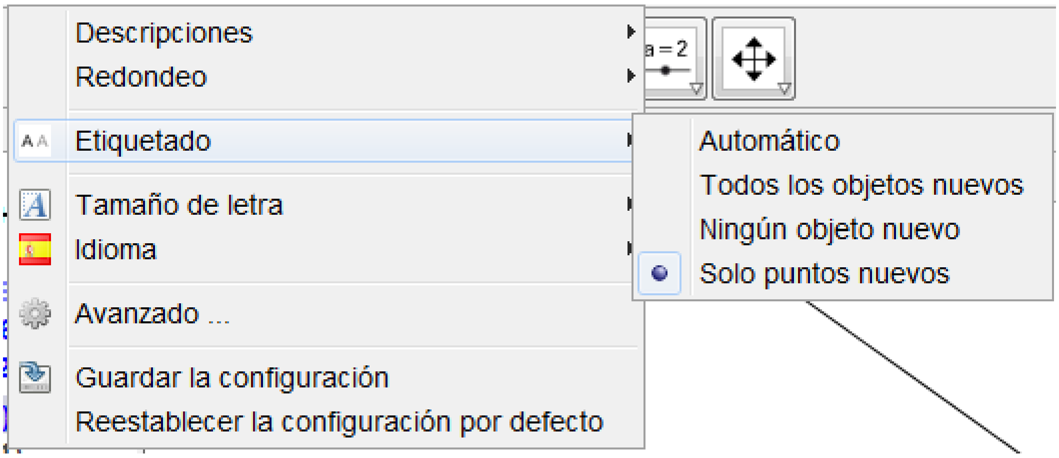


Para cambiar los nombres a los objetos podemos situarnos sobre él y, al pulsar el botón derecho del ratón aparecerá el siguiente menú de opciones:

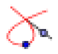


Al seleccionar **Renombra** aparecerá un cuadro para incluir el nuevo nombre que se le asigna al objeto.

Como alternativa a las opciones anteriores, se puede seleccionar la opción **Ningún objeto nuevo** o **Solo puntos nuevos** que aparece al abrir **Etiquetado** en el menú **Opciones**, para que no asigne nombre a los nuevos objetos que es la opción por defecto.

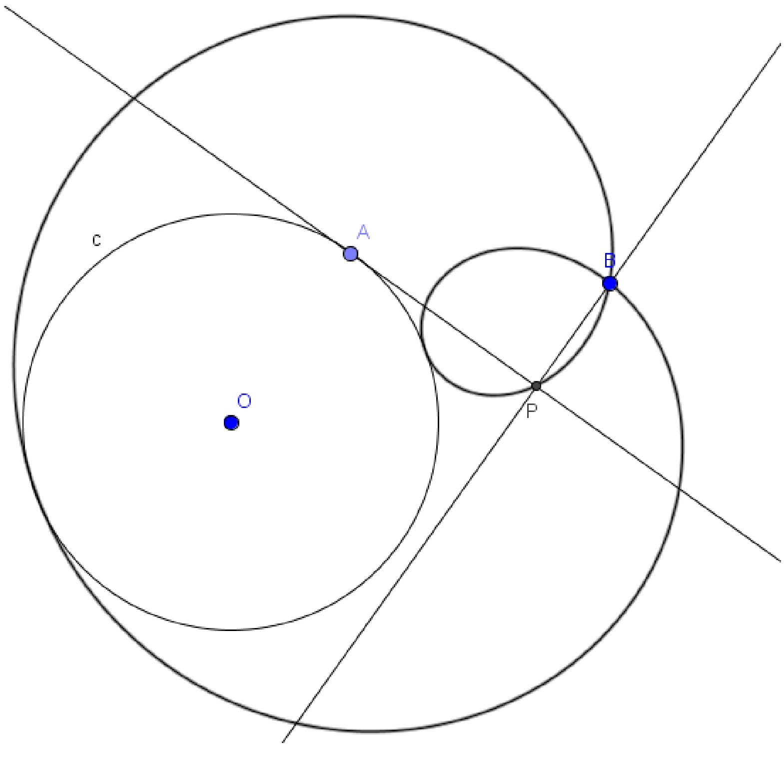


Para obtener el lugar geométrico descrito por el punto P cuando A recorre la circunferencia baste seleccionar la herramienta **Lugar geométrico**.



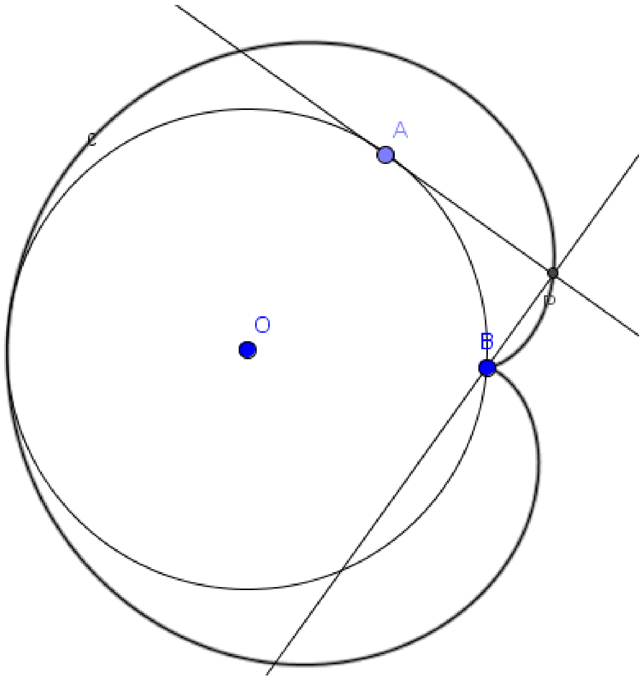
Pulsando a continuación, sobre el punto P, que describe el lugar, y sobre el punto A que se mueve sobre la circunferencia.

Aparecerá la curva representada en la figura siguiente, denominada *caracol de Pascal*.



Como el lugar geométrico se actualiza de manera automática al cambiar las condiciones, bastará con mover el punto B y acercarlo a la circunferencia o bien llevarlo hasta coincidir con el centro para obtener los correspondientes lugares.

Cuando B es un punto de la circunferencia, la curva obtenida como lugar geométrico se denomina *cardioide*.



Ejemplo 2

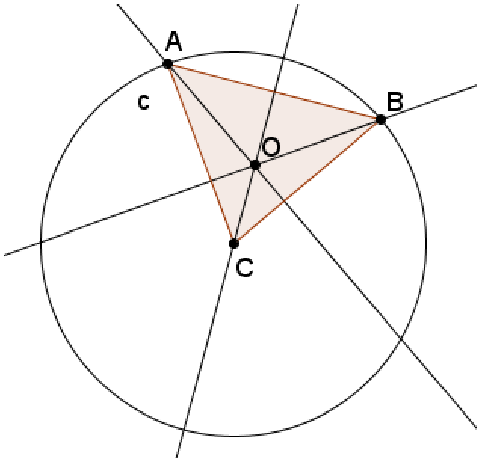
Dada una circunferencia y un triángulo ABC, siendo A y B puntos de la circunferencia y C el centro, hallar el lugar geométrico del ortocentro cuando el punto B recorre la circunferencia.

Comprobad si el lugar geométrico depende de la posición en la que se encuentre el punto A.

Para realizar esta construcción, dibujamos en primer lugar la circunferencia y marcamos sobre ella los puntos A y B.

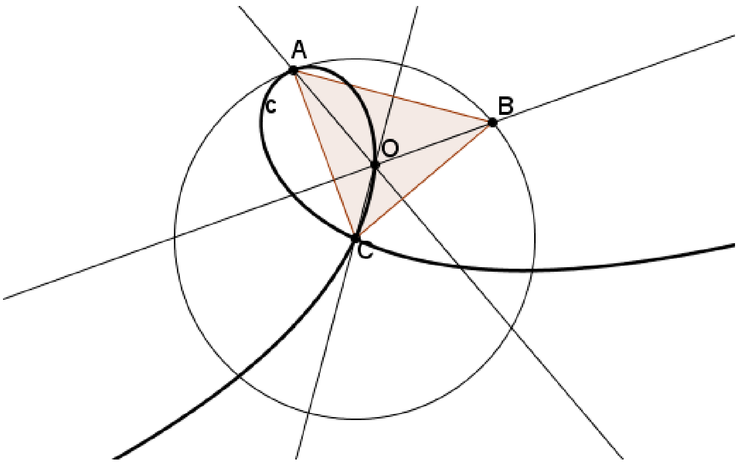
Utilizando la herramienta **Segmento**, definimos el triángulo que tiene por vértices los puntos A, B y C, siendo C el centro de la circunferencia.

A continuación, determinamos el ortocentro al que colocamos la etiqueta O.



Utilizando la herramienta **Lugar geométrico** obtenemos el lugar descrito por el ortocentro O cuando el punto B recorre la circunferencia.

Obtenemos la curva representada en la figura siguiente:



Ejemplo 3

Sea A un punto interior de una circunferencia c.

Halla el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por el punto A que son tangentes a la circunferencia c.

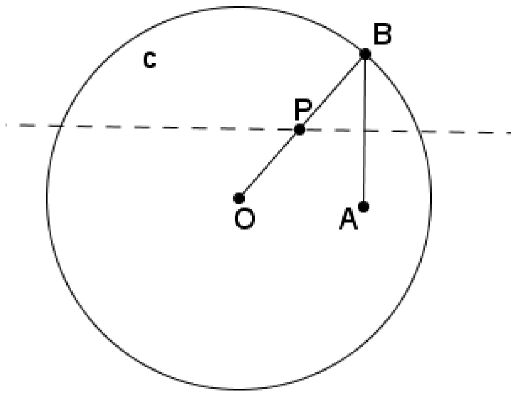
¿Qué ocurre cuando el punto A es exterior a la circunferencia?

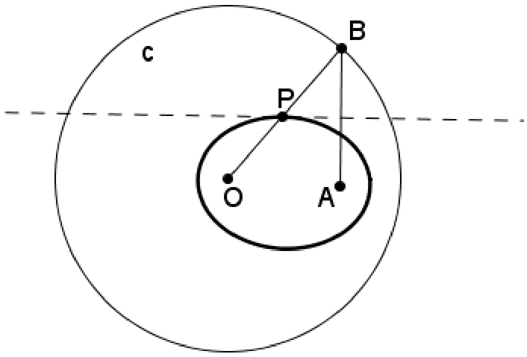
Después de trazar la circunferencia c, definimos un punto B perteneciente a c y un punto A interior.

Para dibujar la circunferencia que pasa por el punto A, que es tangente en el punto B a la circunferencia c, necesitamos encontrar su centro.

El centro, que llamamos P, será el punto de intersección de la mediatriz del segmento AB con el segmento OB siendo O el centro de la circunferencia c.

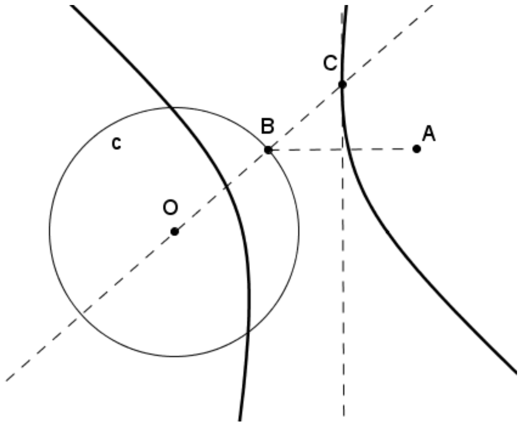
Para trazar el lugar geométrico debemos seleccionar la correspondiente herramienta, y señalar a continuación el punto P y el punto B.





El lugar geométrico representa una elipse cuyos focos son los puntos O y A.

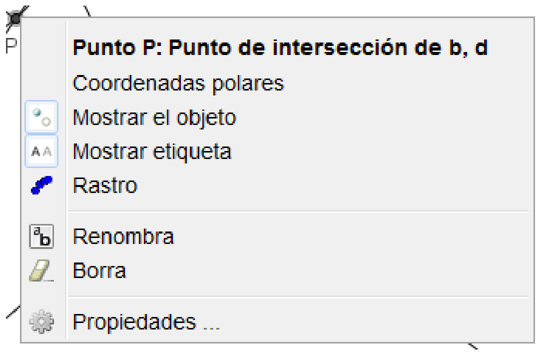
Para responder a la última cuestión bastará con mover el punto A para que cumpla la condición de exterior a la circunferencia. En este caso, la cónica cambiará y el lugar geométrico será una hipérbola.



Rastro de un objeto

Como alternativa a la opción **Lugar geométrico** por la cual se obtiene el lugar geométrico descrito por un punto, se podrá utilizar **Rastro** para obtener el lugar recorrido por cualquier objeto de una construcción.

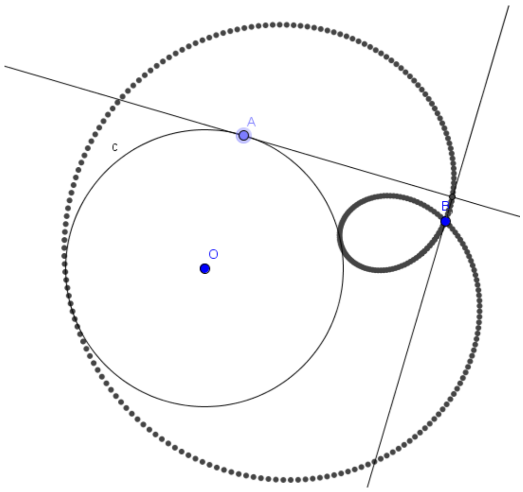
Para activar el rastro de un objeto, hay que seleccionarlo y pulsar, a continuación, el botón derecho del ratón. Aparecerá el siguiente menú de opciones:



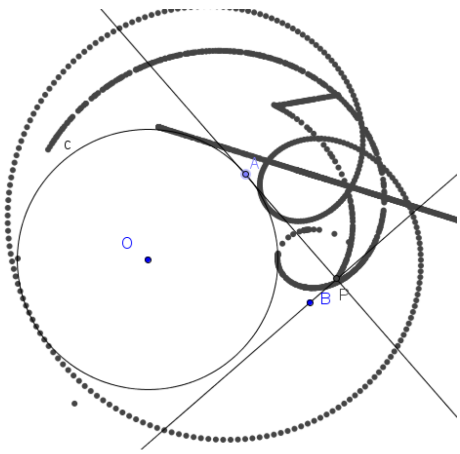
El resultado obtenido con la herramienta **Lugar geométrico** es un objeto que reconoce GeoGebra y por tanto, se actualiza al cambiar las condiciones iniciales.

No ocurre lo mismo con el resultado que aparece al utilizar la opción de activación del rastro.

Si en el ejemplo 1, una vez borrado u ocultado, el lugar geométrico, procedemos a activar el rastro del punto P, animando a continuación, el punto A, el resultado será una imagen similar a la obtenida anteriormente.

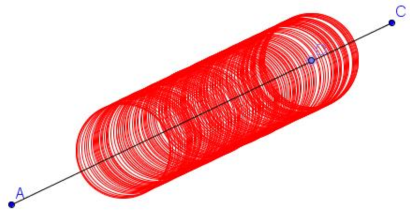


Mientras que con la herramienta **Lugar geométrico** el resultado es un objeto dinámico que se actualizará al cambiar las condiciones iniciales, con el rastro solo se obtiene un trazo que se deforma al mover los objetos de la construcción, como podemos observar en la imagen siguiente:



Al pulsar la combinación de teclas **Ctrl**-**F** desaparecerán los rastros que la vista gráfica contiene, aunque no se desactivan los rastros en los objetos que los tengan activados.

Sin embargo, con la herramienta lugar solo se puede obtener el lugar geométrico de puntos, mientras que con rastro se puede obtener o mejor dicho, simular, el lugar descrito por cualquier objeto, como muestra la imagen siguiente en la que aparece el rastro de una circunferencia de radio fijo al mover el centro sobre un segmento.



Realicemos el siguiente ejemplo para obtener un nuevo lugar.

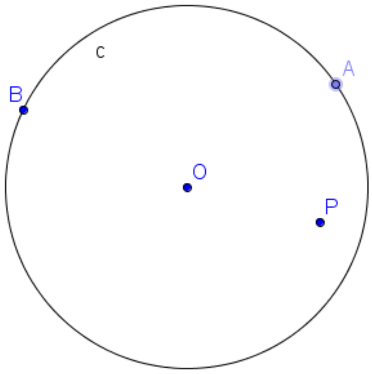
Ejemplo 4

Dada una circunferencia y un punto P interior, que no sea el centro. Sea A un punto cualquiera de la circunferencia y r la recta perpendicular al segmento PA por el punto A.

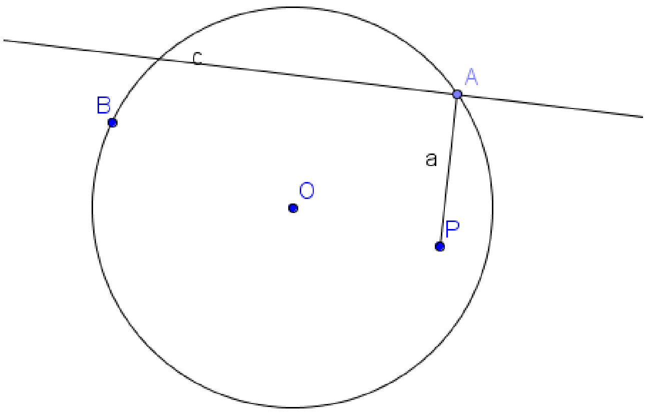
Hallar el lugar geométrico que determina la recta r cuando A recorre la circunferencia.

Averigua qué pasa cuando el punto P es exterior a la circunferencia.

Al igual que en ejemplos anteriores, comenzamos creando los objetos iniciales: circunferencia y los puntos A en la circunferencia y P distinto del centro.



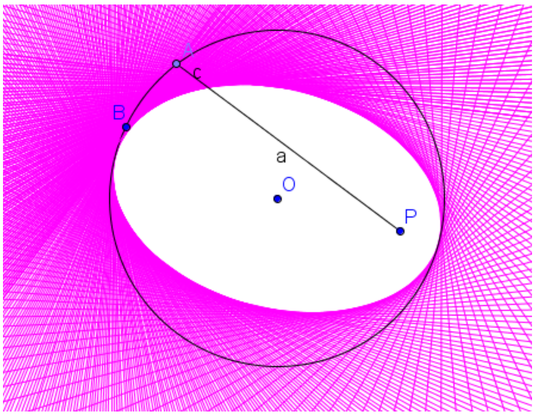
A continuación trazamos el segmento AP y la recta perpendicular por el punto A.



Antes de activar el rastro de la recta perpendicular, modificamos su estilo para cambiar el color.

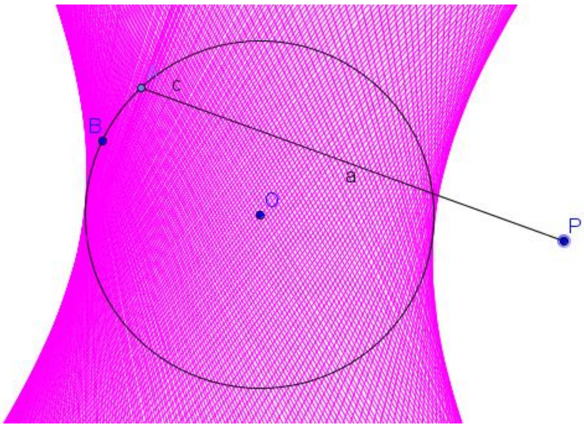
Como deseamos obtener el lugar geométrico de una recta, no es posible utilizar la herramienta **Lugar geométrico** que solo se puede aplicar sobre puntos. Por tanto, la alternativa será activar el rastro de la recta y posteriormente, mover el punto A de forma manual o activando la animación automática.

El resultado será una elipse obtenida como envolventes.



Para comprobar qué ocurre cuando P es exterior a la circunferencia, movemos el punto P, pulsando las teclas **Ctrl-F** antes de volver a pulsar sobre  para iniciar la animación.

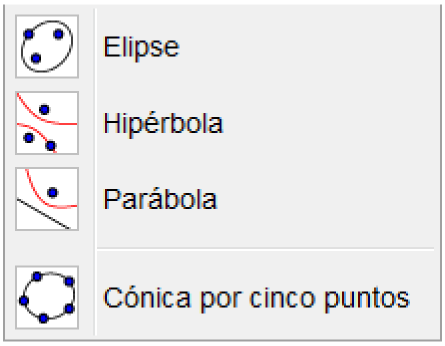
El resultado del nuevo lugar aparece en la imagen siguiente:



Una vez obtenidas la elipse y la hipérbola ¿cómo se podrá obtener la parábola con un método similar?

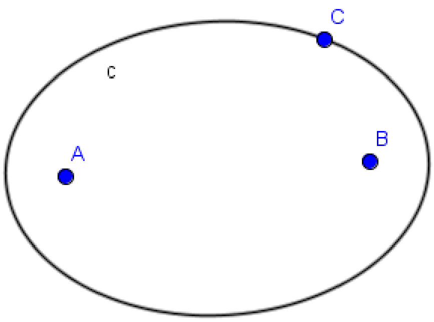
Cónicas

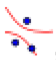
Aunque en el ejemplo anterior ya hemos obtenido una elipse y una hipérbola como lugares geométricos de envolventes, dedicamos este apartado al estudio de las cónicas, para las que GeoGebra ofrece un menú con distintas opciones.

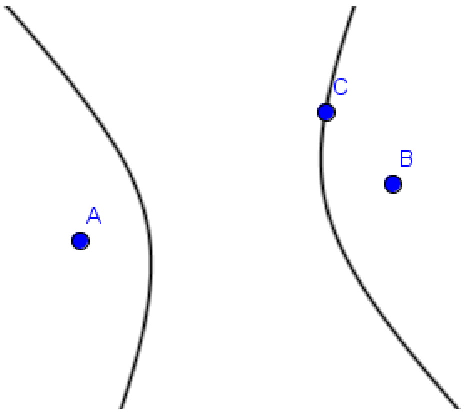


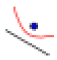
En este bloque encontramos la herramienta **Elipse**  que permite dibujarla a partir de los focos y de un punto de ella.

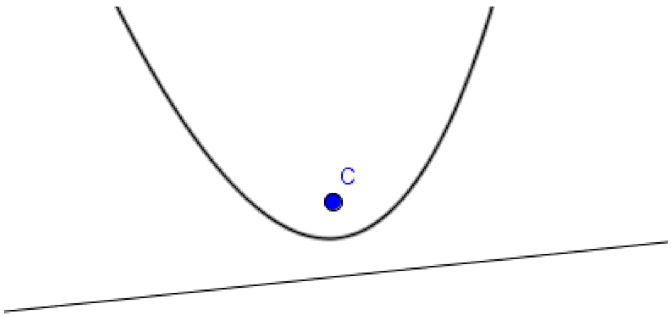
Una vez marcados o creados tres puntos en el plano, obtendremos la elipse cuyos dos primeros puntos son los focos y el tercer punto es un punto que pertenece a la elipse.

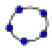


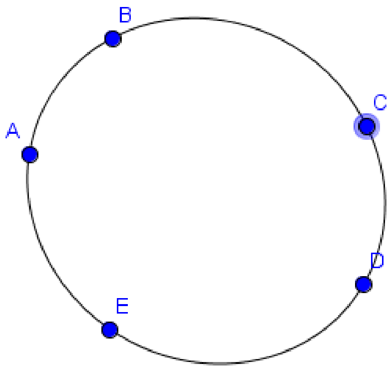
De manera similar, dibujaremos una hipérbola , también a partir de dos puntos correspondientes a los focos y de un tercer punto que pertenecerá a la hipérbola.



O la parábola  a partir de la recta directriz y el foco.

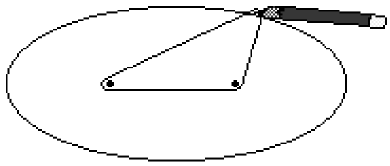


También disponemos de la herramienta **Cónica por cinco puntos**  nos permitirá dibujar cualquiera de las cónicas, obteniendo por tanto una elipse en función de la posición de los cinco puntos marcados.



Por cierto, está opción sirvió a su autor para crear el símbolo de GeoGebra.

Un método sencillo denominado “del jardinero” para dibujar una elipse, consiste en clavar dos estacas en el suelo y utilizar una cuerda de longitud mayor que la distancia entre las dos estacas, tensar la cuerda y recorrerla para obtener el dibujo de una elipse.



Aplicando este método, podemos construir una elipse utilizando Geogebra.

Ejemplo 5. Construcción de la elipse

La elipse se define como el lugar geométrico de los puntos del plano, cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante.

Una vez dibujado el segmento AB correspondiente al eje mayor, definimos en él un punto P, y dibujamos el punto medio O del segmento AB que será el centro de la elipse.

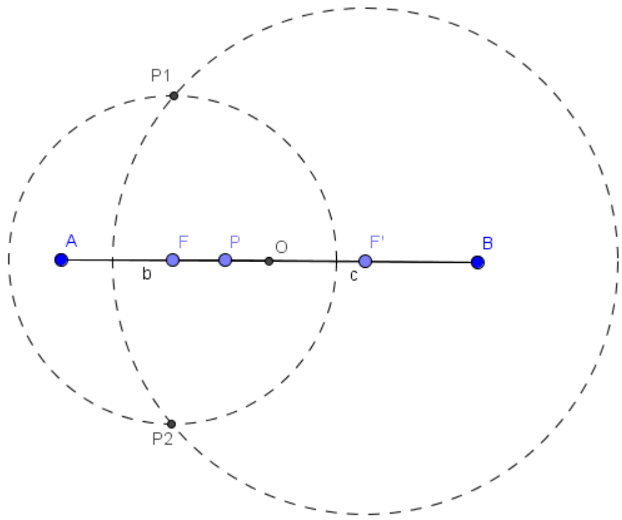
Como no hay datos sobre el eje menor, podemos situar los focos en cualquier posición para obtener una de las elipses que tienen AB como eje mayor. Definimos el punto F y calculamos su simétrico con respecto al punto O, para obtener el punto F’.

Definimos los segmentos PA y PB que aparecerán con los rótulos b y c, respectivamente, ya que con el rótulo a aparece el segmento inicial AB.

A continuación, trazamos dos circunferencias con centros en F y F', y radios PA y PB respectivamente., utilizando para ello la herramienta **Compás** o **Circunferencia (centro, radio)**.

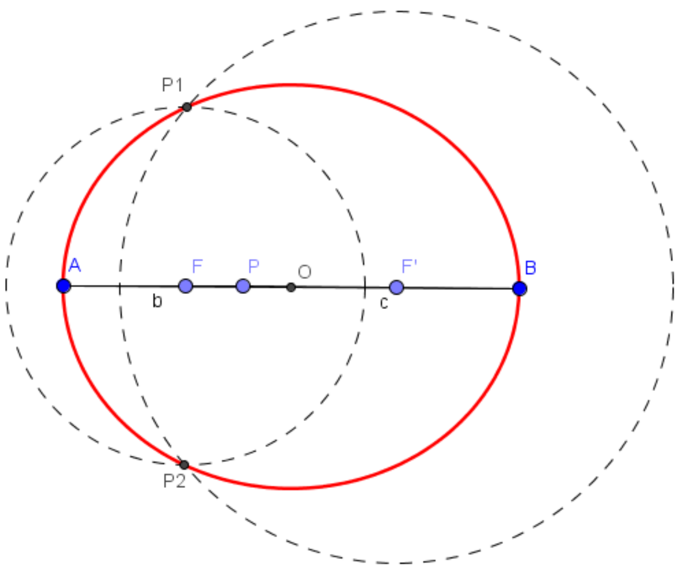
Con esta herramienta pulsamos sobre el centro y al abrir el cuadro para escribir la medida del radio, introducimos b y c, respectivamente.

Después, obtendremos los puntos de corte de las dos circunferencias anteriores, que determinarán los dos puntos P1 y P2 de la elipse.



Cuando el punto P se desplaza sobre el segmento AB, los puntos que se obtienen son puntos de la elipse.

Para obtener la elipse, basta con utilizar la herramienta **Lugar geométrico** para obtener el lugar descrito por P1 cuando P recorre el segmento AB, repitiendo el proceso para el punto P2.



Ejemplo 6. Construcción de la elipse a partir de la circunferencia principal

Comenzamos activando la presentación de los ejes de coordenadas.

A partir de los dos segmentos cuyas longitudes son a y b respectivamente, con $a > b$, dibujamos dos circunferencias con centro en el origen de coordenadas O.

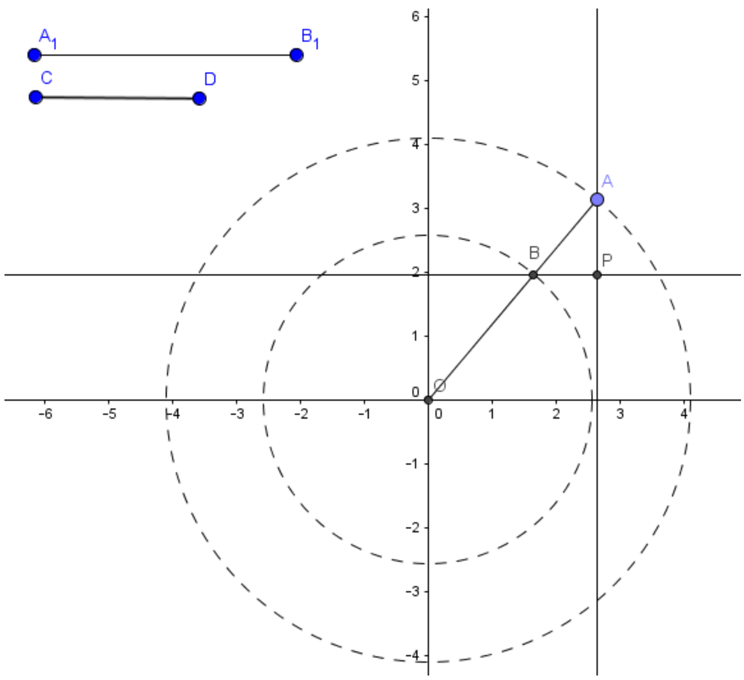
Para dibujar las circunferencias, utilizamos la herramienta Circunferencia dados su centro y radio.

A continuación, definimos un punto A en la circunferencia mayor y unimos con un segmento los puntos O y A.

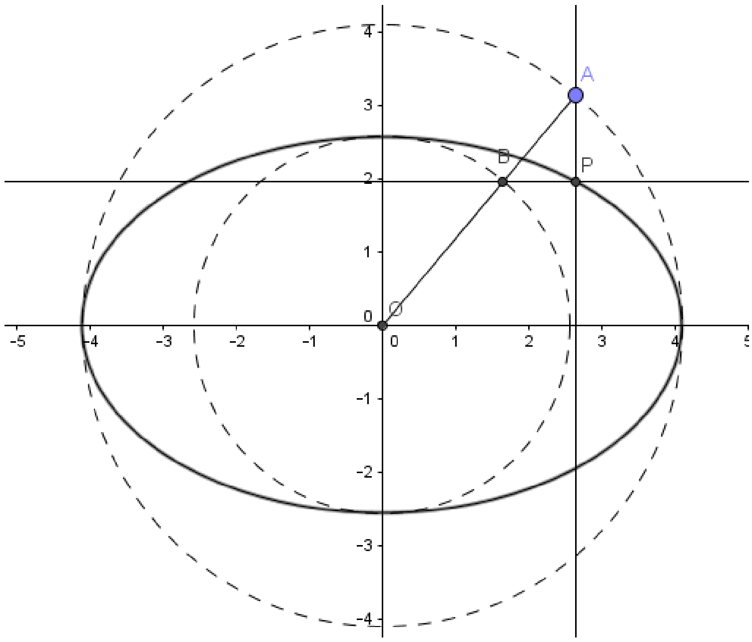
Hallamos el punto B, intersección del segmento OA y de la circunferencia menor.

Por los puntos A y B trazamos rectas perpendiculares a los ejes de coordenadas.

El punto P, intersección de estas dos rectas, es un punto de la elipse.



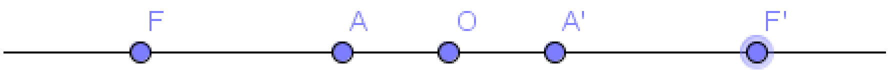
Para dibujar la elipse empleamos la herramienta Lugar geométrico, para obtener el lugar que describe el punto P cuando el punto A recorre la circunferencia.



Ejemplo 7. Construcción de la hipérbola

La elipse se define como el lugar geométrico de los puntos del plano, cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es constante.

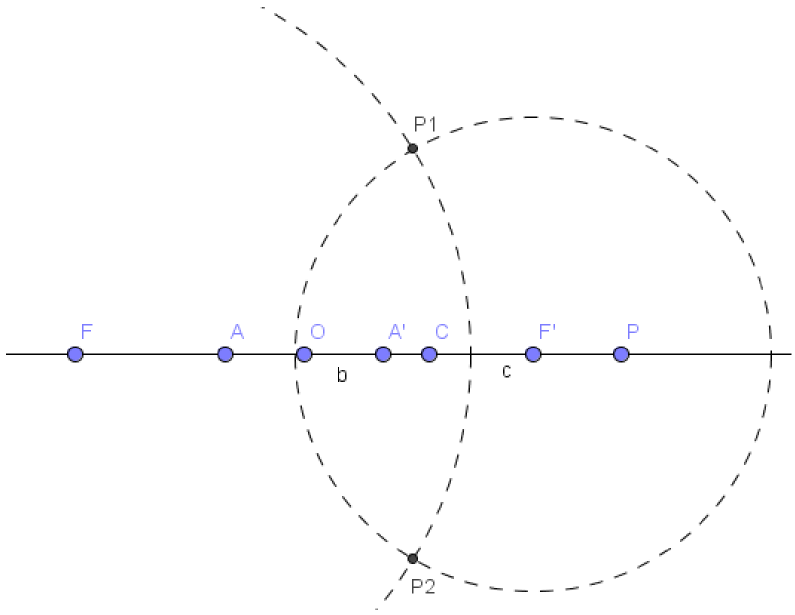
Sobre una recta dibujamos los puntos O, A y F que corresponden al centro, vértice y foco de la hipérbola. A continuación utilizando la herramienta Refleja objeto por punto obtenemos los puntos simétricos A’ y F’.



A continuación, situamos un punto P sobre la recta inicial y definimos los segmentos PA y PA’.

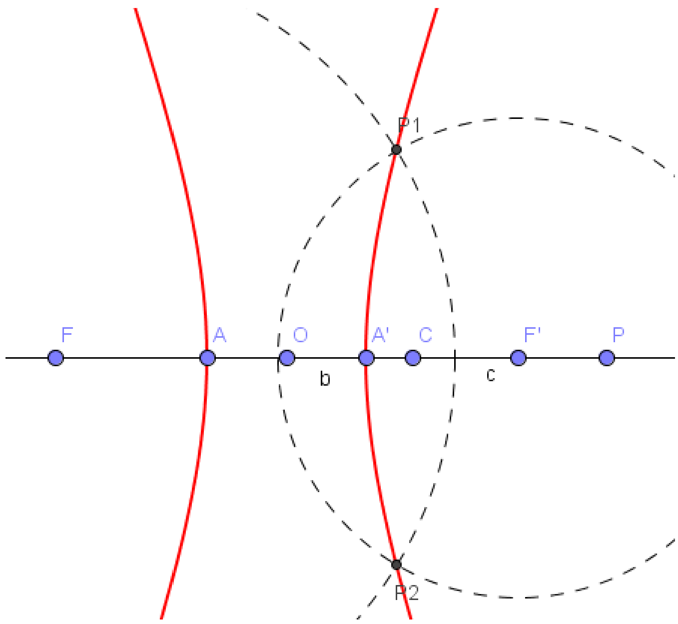
Trazamos dos circunferencias, una con centro en el punto F y radio PA, y otra con centro en el otro foco F’ y radio PA’.

Los puntos de intersección P1 y P2 de las dos circunferencias son puntos de la hipérbola.



La hipérbola se obtiene como lugar geométrico de cada uno de los puntos anteriores, cuando el punto P recorre la recta inicial.

Utilizaremos la herramienta **Lugar geométrico** para obtener el lugar descrito por el punto P1 cuando el punto P recorre la recta inicial y a continuación, el lugar descrito por el punto P2 cuando P se mueve por la recta.

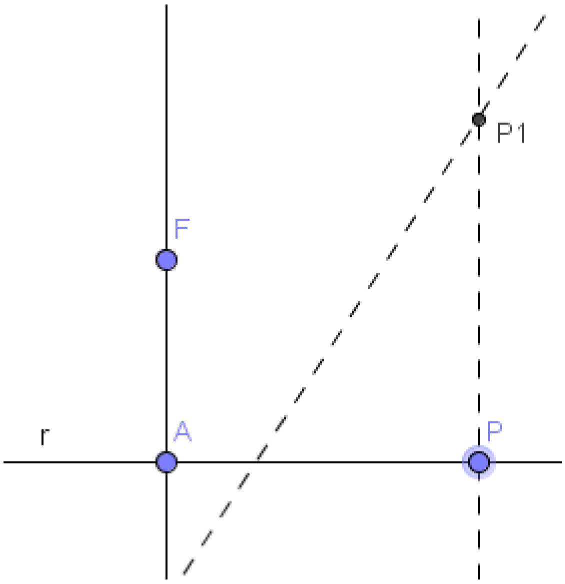


Ejemplo 8. Construcción de la parábola

La parábola se define como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto llamado foco y de una recta denominada directriz.

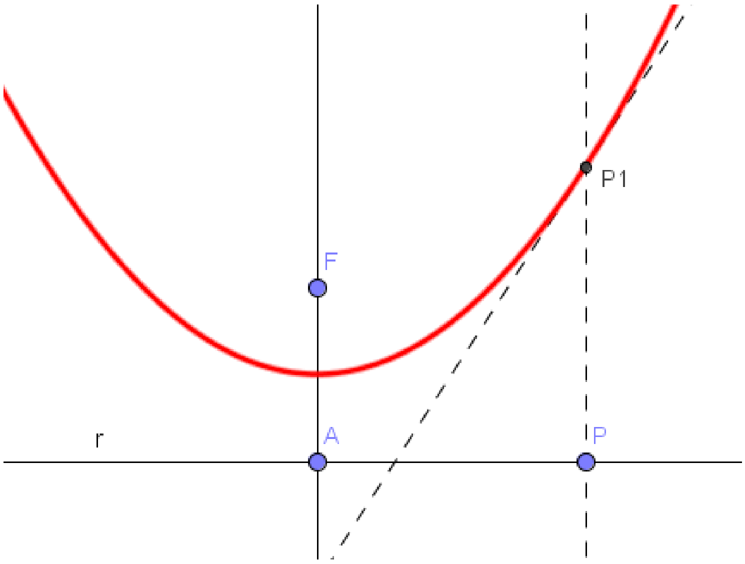
En una recta r (directriz) marcamos un punto A y en la recta perpendicular a la anterior por el punto A, marcamos un punto F que será el foco de la parábola. En la directriz situamos un punto P y trazamos la perpendicular a la directriz.

A continuación, trazamos la mediatriz del segmento PF para obtener el punto P1, intersección de la mediatriz con la perpendicular anterior.



El punto P1 cumple la condición para pertenecer a la parábola, ya que la distancia a la recta r (directriz) es igual a la distancia al foco F.

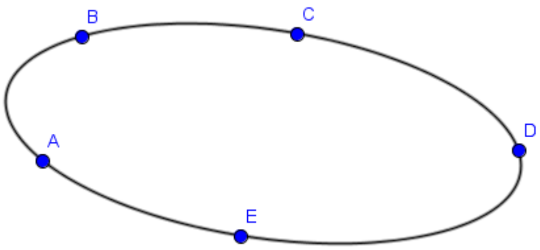
Por tanto, la parábola se obtendrá como lugar geométrico del punto P1 cuando el punto P recorre la recta r.



Elementos de una cónica

Para una cónica dibujada con cualquiera de las opciones del menú de herramientas **Cónicas**, se podrán determinar sus elementos a partir de los distintos comandos disponibles en GeoGebra.

Para ello, dibujaremos una cónica utilizando la herramienta Cónica por cinco puntos.



No olvidemos que al mover los puntos podrá aparecer otro tipo de cónica.

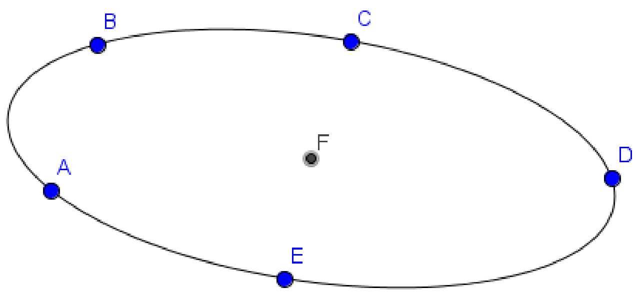
Para obtener los distintos elementos de una cónica utilizaremos las opciones que GeoGebra ofrece para trabajar con comandos que ejecutaremos a través de la línea de entrada.

Un comando utiliza unos argumentos que es necesario introducir para obtener el resultado deseado. Estos argumentos se escribirán encerrados entre corchetes y separados por comas.

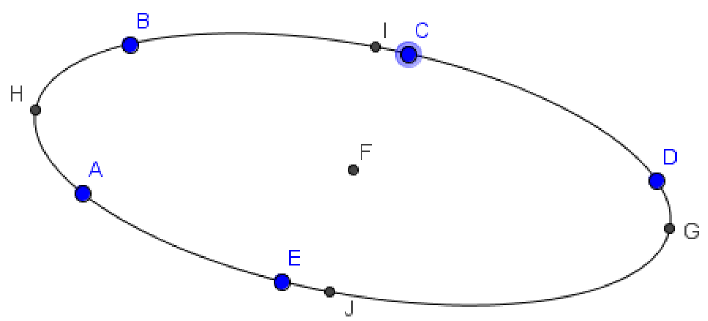
Comando[argumento1,argumento2, …]

Entre los argumentos disponibles para aplicar sobre cónicas, relacionamos los siguientes:

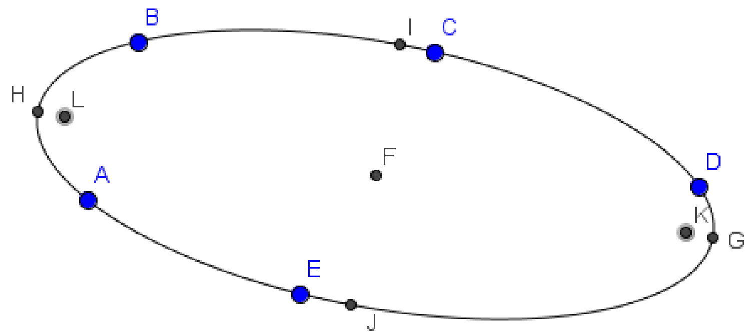
Centro de una cónica: utiliza un único argumento que será el nombre de la cónica. Por ejemplo, **Centro[c]** dibujará el punto correspondiente a la cónica c previamente dibujada. También se puede utilizar el comando **PuntoMedio[c]**.



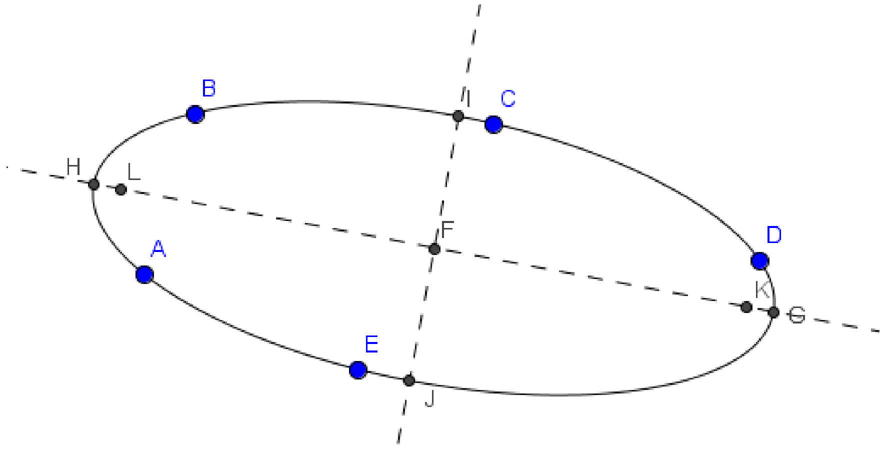
Vértices de una cónica: al igual que el comando anterior, utiliza sólo el nombre de la cónica como argumento y devuelve todos los vértices de la cónica. Por ejemplo, **Vértices[c]** devuelve los puntos G, H, I y J, vértices de la cónica anterior, como se podrá observar en la imagen siguiente:



Focos de una cónica: a través del comando **Foco[c]** se obtendrán los puntos correspondientes a los focos de la cónica c. Observemos que aparecen los puntos k y L, focos de la elipse anterior.

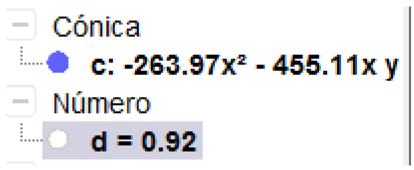


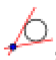
Ejes de una cónica: devuelve los ejes de la cónica. La sintaxis es **Ejes[c]**.

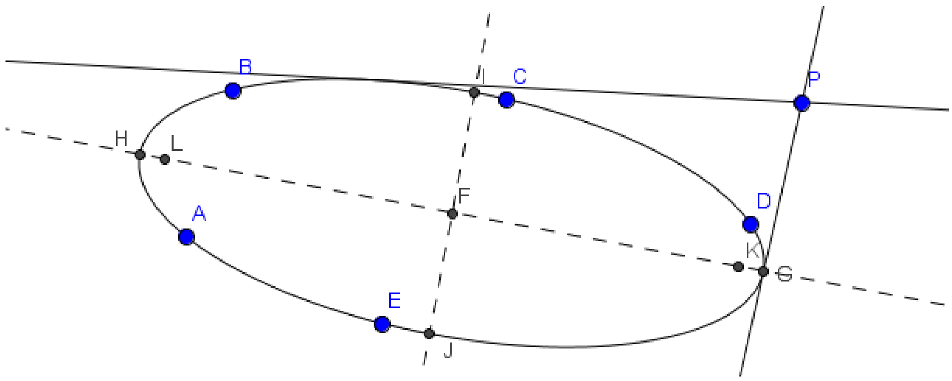


Los comandos **EjeMayor** y **EjeMenor** devuelven el eje principal y el eje secundario, respectivamente, de una cónica.

Excentricidad: a través del comando **Excentricidad[c]** obtendremos el valor de la excentricidad de la cónica c.



Tangente a una cónica: el comando **Tangente[P,c]** traza la recta o rectas tangentes a la cónica c que pasan por el punto P (también se puede utilizar la herramienta **Tangentes** , mientras que **Tangente[r, c]** traza las rectas tangentes a la cónica c que son paralelas a la recta r.



Además, GeoGebra ofrece otros comandos específicos para cada tipo de cónica, como son los que a continuación se relacionan.

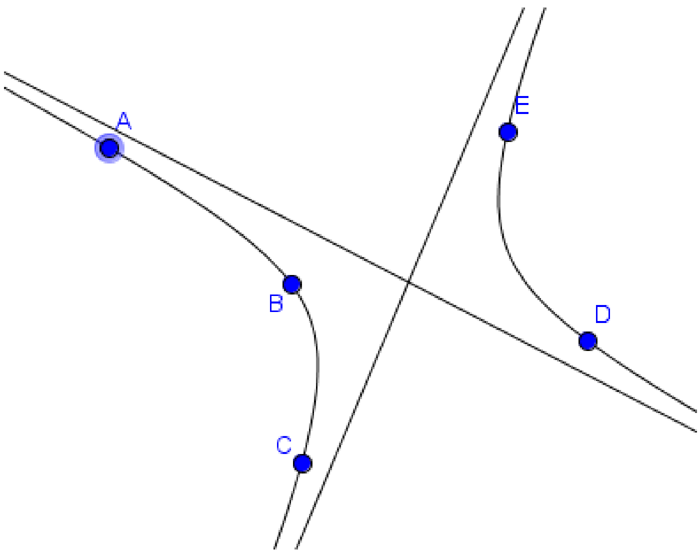
Para una elipse se podrán aplicar los comandos siguientes:

Perímetro: devuelve la longitud de la elipse. Su sintaxis es **Perímetro[c]**, siendo c una elipse. El valor obtenido aparecerá en la relación de objetos dependientes y se podrá incluir en la construcción a través de la herramienta Inserta texto, indicando el nombre asignado a la medida de la longitud.

Área: devuelve el área de la elipse. Su sintaxis es **Área[c]** siendo c una elipse.

Para una hipérbola disponemos del comando:

Asíntotas: a partir del comando **Asíntota[c]** obtendremos las asíntotas de la hipérbola c.



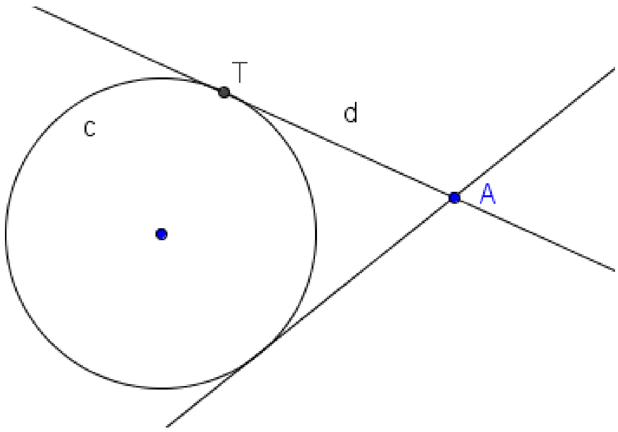
Y para una parábola podemos utilizar los siguientes comandos:

Directriz: dibuja la recta directriz de una parábola. Su sintaxis es similar al resto de comandos expuestos anteriormente.

Parámetro: devuelve el parámetro de la parábola, que es el valor correspondiente a la distancia entre la recta directriz y el foco.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. En una circunferencia de centro C, sea ABC un triángulo con A y B situados en la circunferencia. Hallar el lugar geométrico del circuncentro, del baricentro y del incentro del triángulo cuando el punto A recorre la circunferencia.
2. Determina el lugar geométrico de los puntos A desde los que el segmento tangente AT a una circunferencia c, tiene una longitud fija d.



3. Sea A un punto interior a una circunferencia c y B un punto de c. Sea P un punto de la prolongación de AB con la condición AB = BP. Determinar el lugar geométrico del punto P al variar el punto B.
4. Dadas dos rectas r y s, que se cortan perpendicularmente en un punto O. Sea A un punto que se encuentra a una distancia a de O. Trazar las tangentes desde el punto O a todas las circunferencias que pasan por A y

su centro está en OA. Determinar el lugar geométrico de los puntos de tangencia.

5. Sea c la circunferencia de centro F y radio FB, A un punto de la circunferencia y F' un punto del radio FB. Sea P el punto de intersección del segmento AF y de la mediatriz del segmento AF'. Hallar el lugar geométrico descrito por el punto P, cuando A recorre la circunferencia c. Demostrar que P es un punto de la elipse obtenida.

6. Hallar el lugar geométrico de un punto P de un segmento de longitud fija AB, cuando el segmento se desliza sobre unos ejes perpendiculares. ¿Qué ocurre cuando se cambia la posición del punto P?

7. Construir la parábola a partir del foco y de dos puntos cualquiera, pertenecientes a la parábola.

8. Sea una recta r y un punto A que no pertenece a r. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por un punto A y son tangentes a la recta r.