Teoría – Tema 9

Teoría - 12 - Haz de planos

Haz de planos

Se llama haz de planos de arista la recta r al conjunto de planos que pasan por dicha recta r.

Si conocemos las ecuaciones de dos planos $\Pi_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ y $\Pi_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ que pasan por la recta r, la ecuación del haz de planos será:

$$\lambda_1 (A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \lambda_2 (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$$

Esta ecuación nos permite trabajar con los infinitos planos que contienen a la recta r con una sola ecuación que depende solo de dos parámetros y de dos planos pertenecientes al haz.

Esta forma de expresar una recta como corte de planos ya la conocíamos, al expresar la ecuación general de la recta como:

$$r: \left\{ \begin{array}{c} A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0 \\ A' \cdot x + B' \cdot y + C' \cdot z + D' = 0 \end{array} \right\}$$

Ejemplo 1 resuelto

Obtener el plano que pasa por el punto $A(1,0,3)$ y que pertenece al haz de planos $\lambda_1 (x - 2y + z - 1) + \lambda_2 (x - z + 3) = 0$.

Sustituimos las coordenadas del punto en el haz de planos.

$$\lambda_1 (1 - 2 \cdot 0 + 3 - 1) + \lambda_2 (1 - 3 + 3) = 0$$

$$3 \cdot \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_2 = -3 \cdot \lambda_1$$

Y llevando esta relación nuevamente al haz de planos.

$$\lambda_1 (x - 2y + z - 1) - 3\lambda_1 (x - z + 3) = 0 \quad \rightarrow \quad -2x - 2y + 4z - 10 = 0$$

Simplificamos:

$$\Pi: -x - y + 2z - 5 = 0$$