Első n pozitív egész szám k. hatványának összege

$k = 1$

$0^2 = (1-1)^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1$
$1^2 = (2-1)^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1$
$2^2 = (3-1)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 + 1$
.
.
,
$\underline{(n-1)^2 = (n-1)^2 = n^2 - 2 \cdot n + 1}$

Adjuk össze a fenti egyenleteket, és végezzünk ekvivalens átalakításokat!

$$0^2 + 1^2 + 2^2 \ldots + (n-1)^2 = 1^2 + 2^2 \ldots + (n-1)^2 + n^2 - 2(1 + 2 + \cdots + n) + n$$
$$2(1 + 2 + \cdots + n) = n^2 + n$$
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$k = 2$

$0^3 = (1-1)^3 = 1^3 — 3 \cdot 1^2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1^2 - 1$
$1^3 = (2-1)^3 = 2^3 — 3 \cdot 2^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 - 1$
$3^3 = (3-1)^3 = 3^3 — 3 \cdot 3^2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 1^2 - 1$
.
.
.
$\underline{(n-1)^3 = (n-1)^3 = n^3 — 3 \cdot n^2 \cdot 1 + 3 \cdot n \cdot 1^2 - 1}$

Összeadjuk a fenti egyenleteket, kivonjuk a két oldalon levő közös tagokat.
$0 = n^3 - 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) - n$
Alkalmazva az előző eredményünket,

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = n^3 - n + 3\frac{n(n+1)}{2}.$$

Algebrai átalakításokat végezve,

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = n(n-1)(n+1) + 3\frac{n(n+1)}{2},$$
$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = n(n+1)\left(n - 1 + \frac{3}{2}\right),$$
$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = n(n+1)\frac{2n - 2 + 3}{2},$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$