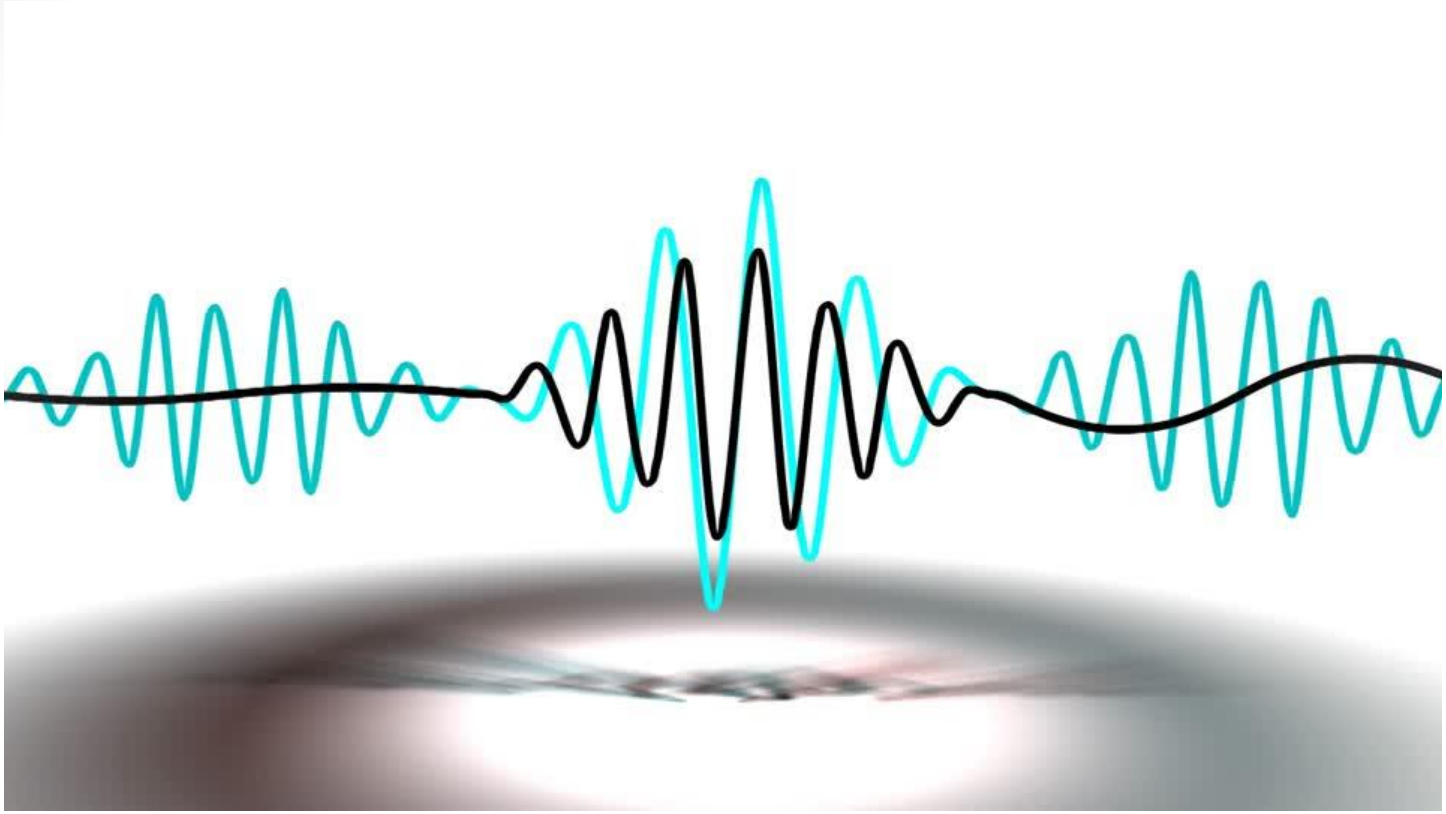


Animiamo e suoniamo le sinusoidi

ONDA SU ONDA SU ONDA...

MathUp

Videolezione IV.12

Nicola Chiriano

Va ora in onda…

Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert

(1747)

Equazione Onda Piana

Soluzione originaria:

$$f(x,t) = \boldsymbol{f}_{-}(x-t) + \boldsymbol{f}_{+}(x+t)$$

"Recherches sur les cordes vibrantes"

Si sovrappone…

Leonhard Euler

(1748)

Soluzione corretta:

$$f(x,t) = f_-(x - \boldsymbol{v}\,t) + f_+(x + \boldsymbol{v}\,t)$$

Principio di Sovrapposizione

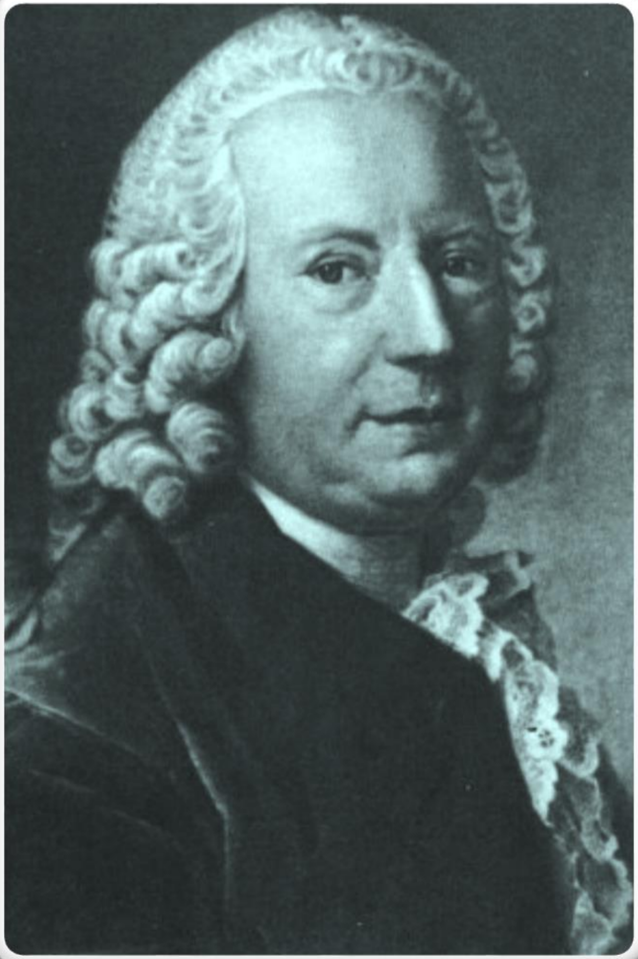
$$f(x,t) = A_1 f_1(x,t) + \ \dots + A_n f_n(x,t)$$

perturbazione = c.l. di onde piane

⇳

più perturbazioni = onda somma

Tira le somme…



Daniel Bernoulli

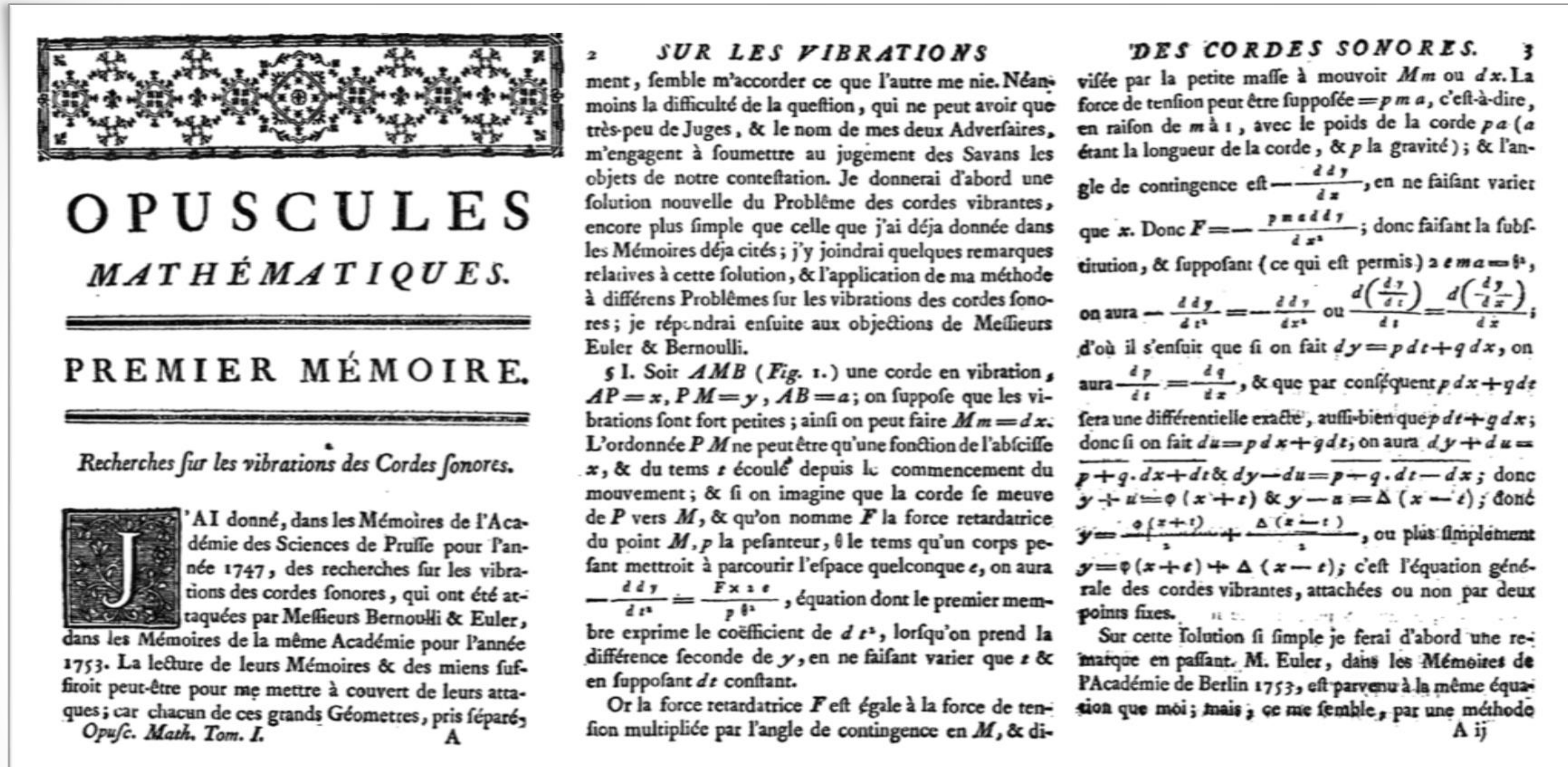
(1753)

Soluzione generale:

$$f(x,t) = \sum a_n \sin nx \cos nvt$$

Serie Trigonometrica

il suono emesso da una corda vibrante è la somma (c.l.) dei suoi infiniti ***armonici***



OPUSCULES
MATHÉMATIQUES.

PREMIER MÉMOIRE.

Recherches sur les vibrations des Cordes sonores.

J'AI donné, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Prusse pour l'année 1747, des recherches sur les vibrations des cordes sonores, qui ont été attaquées par Messieurs Bernoulli & Euler, dans les Mémoires de la même Académie pour l'année 1753. La lecture de leurs Mémoires & des miens suffiroit peut-être pour me mettre à couvert de leurs attaques; car chacun de ces grands Géometres, pris séparé,

ment, semble m'accorder ce que l'autre me nie. Néanmoins la difficulté de la question, qui ne peut avoir que très-peu de Juges, & le nom de mes deux Adversaires, m'engagent à soumettre au jugement des Savans les objets de notre contestation. Je donnerai d'abord une solution nouvelle du Problême des cordes vibrantes, encore plus simple que celle que j'ai déja donnée dans les Mémoires déja cités; j'y joindrai quelques remarques relatives à cette solution, & l'application de ma méthode à différens Problêmes sur les vibrations des cordes sonores; je répondrai ensuite aux objections de Messieurs Euler & Bernoulli.

§ I. Soit AMB (*Fig.* 1.) une corde en vibration, $AP=x$, $PM=y$, $AB=a$; on suppose que les vibrations sont fort petites; ainsi on peut faire $Mm=dx$. L'ordonnée PM ne peut être qu'une fonction de l'abscisse x, & du tems t écoulé depuis le commencement du mouvement; & si on imagine que la corde se meuve de P vers M, & qu'on nomme F la force retardatrice du point M, p la pesanteur, θ le tems qu'un corps pesant mettroit à parcourir l'espace quelconque e, on aura $-\frac{ddy}{dt^2}=\frac{F\times 2e}{p\theta^2}$, équation dont le premier membre exprime le coëfficient de dt^2, lorsqu'on prend la différence seconde de y, en ne faisant varier que t & en supposant dt constant.

Or la force retardatrice F est égale à la force de tension multipliée par l'angle de contingence en M, & di-

visée par la petite masse à mouvoir Mm ou dx. La force de tension peut être supposée $=pma$, c'est-à-dire, en raison de m à 1, avec le poids de la corde pa (a étant la longueur de la corde, & p la gravité); & l'angle de contingence est $-\frac{ddy}{dx}$, en ne faisant varier que x. Donc $F=-\frac{pmaddy}{dx^2}$; donc faisant la substitution, & supposant (ce qui est permis) $2ema=\theta^2$, on aura $-\frac{ddy}{dt^2}=-\frac{ddy}{dx^2}$ ou $\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$; d'où il s'ensuit que si on fait $dy=pdt+qdx$, on aura $\frac{dp}{dt}=\frac{dq}{dx}$, & que par conséquent $pdx+qdt$ sera une différentielle exacte, aussi-bien que $pdt+qdx$; donc si on fait $du=pdx+qdt$, on aura $dy+du=\overline{p+q}\cdot\overline{dx+dt}$ & $dy-du=\overline{p-q}\cdot\overline{dt-dx}$; donc $y+u=\varphi(x+t)$ & $y-u=\Delta(x-t)$; donc $y=\frac{\varphi(x+t)}{2}+\frac{\Delta(x-t)}{2}$, ou plus simplement $y=\varphi(x+t)+\Delta(x-t)$; c'est l'équation générale des cordes vibrantes, attachées ou non par deux points fixes.

Sur cette solution si simple je ferai d'abord une remarque en passant. M. Euler, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin 1753, est parvenu à la même équation que moi; mais, ce me semble, par une méthode

"Recherches sur le vibrations des Cordes sonores" (1761)

D'Alembert riferisce delle polemiche con Eulero e D. Bernoulli dopo la memoria del 1747

Porta a sintesi…

Jean Baptiste Joseph Fourier

(1822)

Generalizzazione (*f* periodica):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

- Analisi armonica
  SUONO qualsiasi = scomposto nelle sue componenti fondamentali
- Sintesi Armonica
  somma di opportune onde sonore semplici = SUONO qualsiasi

Laboratorio *(Geogebra)*

Onde armoniche piane

$$y = A\sin(kx \mp \omega t + \varphi)$$

1. Costruzione
2. Sovrapposizione
3. Interferenza
4. Onda stazionaria
5. Battimenti

1. Costruzione

$$\boldsymbol{y = A\sin(kx \mp \omega t + \varphi)}$$

- Velocità di prop. $v = \frac{\lambda}{T}$
- Lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$
- Numero d'onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
- Frequenza $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$
- Periodo $T = \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{v}$
- Pulsazione $\omega = 2\pi\nu = kv$

$$\varphi = 0$$

$$x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = A\sin\omega t$$

$$t = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = A\sin kx$$

2. Sovrapposizione

- $y_2 = A\sin(kx - \omega_2 t + \varphi)$
- $y_1 = A\sin(kx - \omega_1 t)$

SOMMA (ONDA RISULTANTE)

$$y = A\,[\sin(kx - \omega_2 t + \varphi) + \sin(kx - \omega_1 t)] =$$

(per le formule di prostaferesi!)

$$= 2A\sin\frac{kx - \omega_2 t + \varphi + kx - \omega_1 t}{2}\cos\frac{kx - \omega_2 t + \varphi - kx + \omega_1 t}{2} =$$

$$= 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi}{2}\right)\cdot\sin\left(kx - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

3. Interferenza

- $y_2 = A\sin(kx - \omega t + \varphi)$ $\qquad$ $\boldsymbol{\omega_2 = \omega_1 = \omega}$
- $y_1 = A\sin(kx - \omega t)$

SOMMA (ONDA RISULTANTE)

$$y = A\,[\sin(kx - \omega t + \varphi) + \sin(kx - \omega t)] =$$

(per le formule di prostaferesi!)

$$= 2A\sin\frac{kx - \omega t + \varphi + kx - \omega t}{2}\cos\frac{kx - \omega t + \varphi - kx + \omega t}{2} =$$

$$= 2A\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Onda con la stessa frequenza delle componenti e con ampiezza modulata dallo sfasamento, che determina interferenza C/D/I.

4. Onda stazionaria

- $y_2 = A\sin(kx + \omega t + \varphi)$ $\qquad$ $\boldsymbol{\omega_2 = -\omega_1 = -\omega}$
- $y_1 = A\sin(kx - \omega t)$

SOMMA (ONDA RISULTANTE)

$$y = A\left[\sin(kx + \omega t + \varphi) + \sin(kx - \omega t)\right] =$$

(per le formule di prostaferesi!)

$$= 2A\sin\frac{kx + \omega t + \varphi + kx - \omega t}{2}\cos\frac{kx + \omega t + \varphi - kx + \omega t}{2} =$$

$$= 2A\cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)\cdot\sin\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Onda che non si propaga nel tempo *t* e con ampiezza che varia in modo armonico e determina ***nodi*** e ***ventri***.

5. Battimenti

- $y_2 = A\sin(kx + \omega_2 t)$
- $y_1 = A\sin(kx + \omega_1 t)$

$\boldsymbol{x = 0, A = 1, \omega_2 \gtrsim \omega_1}$

SOMMA (ONDA RISULTANTE)

- $y = \sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t =$

(per le formule di prostaferesi!)

$$= 2 \cdot \cos \underbrace{\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}}_{\boldsymbol{\Omega}} t \cdot \sin \underbrace{\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}}_{\boldsymbol{\omega_B}} t = \underbrace{2\cos\boldsymbol{\Omega} t}_{A(t)} \cdot \sin \boldsymbol{\omega_B} t$$

Onda con frequenza intermedia rispetto alle componenti ed ampiezza che oscilla nel tempo e determina un effetto pulsante.

Di-battimenti sulla consonanza

per Galileo

- suoni con rapporti di frequenze semplici: l’orecchio «apprezza» la regolarità del suono

per Von Helmoltz

- suoni con primi armonici simili ⇔ con battimenti molto deboli