Problemas – Tema 2

Problemas resueltos - 18 - ecuaciones y sistemas con razones trigonométricas

1. Resuelve

$$\left\{\begin{array}{l} sen\,x+sen\,y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ sen\,x-sen\,y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\end{array}\right\}$$

Hago un cambio de variable:

$$sen\,x=a$$
$$sen\,y=b$$

Resuelvo el sistema de ecuaciones por el método de reducción, sumando ambas ecuaciones:

$$2a=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Despejo a .

$$2a=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}+1-1}{2} \rightarrow 2a=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{2} \rightarrow a=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Despejo b .

$$b=\frac{\sqrt{3}+1}{2}-a \rightarrow b=\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow b=\frac{1}{2}$$

Deshago los cambios de variable $a=sen(x)$, $b=sen(y)$.

$$sen(x)=\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x=arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=60^o+360^o\cdot k\,,\,120º+360^o\cdot k\,,\,k\in\mathbb{Z}$$

$$sen(y)=\frac{1}{2} \rightarrow x=arcsen\left(\frac{1}{2}\right)=30^o+360^o\cdot k\,,\,150º+360^o\cdot k\,,\,k\in\mathbb{Z}$$

2. Resuelve $sen(x)=\frac{\cos(x)}{2}$

Debemos obtener el valor de x . Y podemos plantearlo de varias maneras: expresando todo en función del seno, o bien en función del coseno, o bien planteando la razón tangente.

Si expresamos el seno en función del coseno.

$$sen(x)=\pm\sqrt{1-\cos^2(x)}$$

Sustituimos en la igualdad de partida.

$$\pm\sqrt{1-\cos^2(x)}=\frac{\cos(x)}{2}$$

Elevamos al cuadrado.

$$1-\cos^2(x)=\frac{\cos^2(x)}{4} \quad \rightarrow \quad 1=\frac{\cos^2(x)}{4}+\cos^2(x) \quad \rightarrow \quad \cos^2(x)=\frac{4}{5} \quad \rightarrow \quad \cos(x)=\frac{\pm 2\sqrt{5}}{5}$$

Despejamos el ángulo x aplicando arcocoseno.

$$\cos(x)=\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \rightarrow \quad x=26,62^o+360^o k \quad , \quad x=333,38^o+360^o k \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos(x)=\frac{-2\sqrt{5}}{5} \quad \rightarrow \quad x=180^o-26,62^o=153,38^o+360^o k \quad , \quad x=206,52^o+360^o k \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

3. Resuelve $4 \cdot sen^2(x)+2 \cdot \cos(x)=4$ **.**

Usamos la relación fundamental para expresar $sen^2(x)=1-\cos^2(x)$.

$$4 \cdot (1-\cos^2(x))+2 \cdot \cos(x)=4 \quad \rightarrow \quad 4-4 \cdot \cos^2(x)+2 \cdot \cos(x)=4$$
$$-4 \cdot \cos^2(x)+2 \cdot \cos(x)=0 \quad \rightarrow \quad -2 \cdot \cos^2(x)+\cos(x)=0$$

Sacamos factor común de coseno.

$$\cos(x)[-2 \cdot \cos(x)+1]=0$$

Igualamos cada factor a cero.

$$\cos(x)=0 \quad \rightarrow \quad x=90º, 270º, \ldots \quad \rightarrow \quad x=90º+180º k, k \in \mathbb{Z}$$
$$-2 \cdot \cos(x)+1=0 \quad \rightarrow \quad \cos(x)=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x=60º+360º k, k \in \mathbb{Z} \quad , \quad x=300º+360º k, k \in \mathbb{Z}$$

4. Resuelve $sen(x)+\cos^2 x-sen^2 x=4\cdot sen^2 x$ **.**

De la relación fundamental → $\cos^2(x)=1-sen^2(x)$. Sustituimos.

$$sen(x)+1-sen^2 x-sen^2 x=4\cdot sen^2 x \quad\rightarrow\quad sen(x)+1-2sen^2 x=4\cdot sen^2 x$$
$$6\cdot sen^2 x-sen(x)-1=0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado.

$$sen(x)=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{1\pm 5}{12} \quad\rightarrow\quad sen(x)=\frac{1}{2} \quad , \quad sen(x)=\frac{-1}{3}$$
$$sen(x)=\frac{1}{2} \quad\rightarrow\quad x=30º+360º k\,,\, k\in\mathbb{Z} \quad , \quad x=150º+360º k\,,\, k\in\mathbb{Z}$$
$$sen(x)=\frac{-1}{3} \quad\rightarrow\quad x=-19,47^{o}=340,53º+360º k\,,\, k\in\mathbb{Z} \quad , \quad x=199,47^{o}+360º\mathrm{k}\,,\, k\in\mathbb{Z}$$

5. Resuelve $\cos x - sen^2(\frac{x}{2}) = 1$

Usamos la expresión del seno del ángulo mitad.

$$sen(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}} \quad \rightarrow \quad sen^2(\frac{x}{2}) = \frac{1-\cos(x)}{2}$$

Sustituimos.

$$\cos(x) - \frac{1-\cos(x)}{2} = 1 \quad \rightarrow \quad 2\cdot\cos(x) - 1 + \cos(x) = 2 \quad \rightarrow \quad 3\cdot\cos(x) = 3$$

$$\cos(x) = 1 \quad \rightarrow \quad x = 0º + 360º\,k \,,\, k \in \mathbb{Z}$$

6. Resuelve $tg(2x)=cotg(x)$

Usamos la expresión de la tangente del ángulo doble.

$$tg(2x)=\frac{2\,tg(x)}{1-tg^2(x)}$$

Sustituimos en la igualdad de partida, recordando que $cotg(x)=\frac{1}{tg(x)}$.

$$\frac{2\,tg(x)}{1-tg^2(x)}=\frac{1}{tg(x)} \quad \rightarrow \quad 2\,tg^2(x)=1-tg^2(x) \quad \rightarrow \quad 3\,tg^2(x)=1 \quad \rightarrow \quad tg^2(x)=\frac{1}{3}$$

$$tg(x)=\frac{\pm\sqrt{3}}{3}$$

$$tg(x)=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad x=30º+360º\,k \quad , \quad x=210º+360º\,k \quad \rightarrow \quad x=30º+180º\,k\,,\,k\in\mathbb{Z}$$

$$tg(x)=\frac{-\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad x=-30º=330º+360º\,k \quad , \quad x=150º+360º\,k \quad \rightarrow \quad x=150º+180º\,k\,,\,k\in\mathbb{Z}$$

7. Resuelve $2\cdot tg(x)-3\cdot cotg(x)-1=0$ **.**

$$2\cdot tg(x)-3\cdot cotg(x)-1=0 \rightarrow 2\cdot tg(x)-\frac{3}{tg(x)}-1=0 \rightarrow \frac{2\cdot tg^2(x)-3-tg(x)}{tg(x)}=0$$

$$2\cdot tg^2(x)-tg(x)-3=0 \rightarrow tg(x)=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\frac{1\pm 5}{4} \rightarrow tg(x)=\frac{3}{2} \quad , \quad tg(x)=-1$$

Si $tg(x)=\frac{3}{2} \rightarrow x=56{,}31^o+360^o k \, , k\in\mathbb{R}$, $x=236{,}31^o+360^o k \, , k\in\mathbb{R}$

Si $tg(x)=-1 \rightarrow x=135^o+360^o k \, , k\in\mathbb{R}$, $x=315^o+360^o k \, , k\in\mathbb{R}$

8. Resuelve $\cos^2 x - 3\, sen^2 x = 0$

Dividimos toda la expresión entre $\cos^2 x$ $\rightarrow$ $1 - \frac{3\, sen^2 x}{\cos^2 x} = 0$

¡Ojo! Si dividimos por $\cos^2 x$ tendremos que comprobar, al final, que el denominador no se anula.

$$1 - 3\, tg^2 x = 0 \quad \rightarrow \quad tg^2 x = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad tg\, x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}$$

Los ángulos que tienen esa tangente positiva son: 30º (primer cuadrante) y 210º (tercer cuadrante)

Y los ángulos que tiene esa tangente negativa son: 150º (segundo cuadrante) y 330º (cuarto cuadrante).

Añadiendo todas las vueltas de 360º grados.

Por tanto las soluciones son:

$$30^{o} + 360^{o} \cdot k\,,\, 150^{o} + 360^{o} \cdot k\,,\, 210^{o} + 360^{o} \cdot k\,,\, 330^{o} + 360^{o}\, k$$

Que se pueden agrupar:

$$30^{o} + 180^{o} \cdot k\,,\, 150^{o} + 180^{o} \cdot k\,,\, k \in \mathbb{Z}$$

Ninguno de estos ángulos hacen nulo al denominador $\cos^2 x$, por lo que las soluciones son coherentes con nuestro método de resolución.

9. Resuelve $sen^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$

Aplicando la relación fundamental de trigonometría:

$\cos^2 x = 1 - sen^2 x$

Sustituimos en la ecuación de partida:

$sen^2 x - (1 - sen^2 x) = \frac{1}{2} \rightarrow 2\,sen^2 x = \frac{3}{2} \rightarrow x = arcsen(\frac{\pm\sqrt{3}}{2})$

Y las soluciones son:

seno positivo → $x = 60º + 360º\,k$, $120º + 360º\,k$, $k \in \mathbb{Z}$

seno negativo → $x = 240º + 360º\,k$, $300º + 360º\,k$, $k \in \mathbb{Z}$

Que podemos agrupar de la forma: $x = 60º + 180º\,k$, $120º + 180º\,k$, $k \in \mathbb{Z}$

10. Resuelve $\left\{\begin{matrix} sen\, x + sen\, y = 1 \\ x + y = 90^{\circ} \end{matrix}\right\}$

De la segunda ecuación → $x = 90^{o} - y$

Sustituimos en la primera → $sen\ (90^{o} - y) + sen\ \ y = 1$

Recordamos que dos ángulos que suman 90º son complementarios, y el seno de uno será el coseno del otro, por lo que podemos escribir → $cos\ \ (y) + sen\ \ (y) = 1$

Por la relación fundamental de trigonometría, expresamos el coseno en función del seno:

$\pm\sqrt{1 - sen^2\, y} + sen\ \ y = 1 \ \rightarrow\ \pm\sqrt{1 - sen^2\, y} = 1 - sen\ \ y$

Elevamos al cuadrado ambos miembros (no olvidar comprobar las soluciones al final).

$1 - sen^2\, y = (1 - sen\ \ y)^2 \ \rightarrow\ 1 - sen^2\, y = 1 + sen^2\, y - 2\, sen\ \ y \ \rightarrow\ 2\, sen^2\, y - 2\, sen\ \ y = 0$

$sen^2\, y - sen\, y = 0$ → sacamos factor común del seno → $sen(y)(sen(y) - 1) = 0$

Primera solución (recordamos que ambas soluciones deben sumar 90º, sus senos deben sumar 1 y deben cumplir la ecuación previa al paso de elevar al cuadrado):

$$sen\, y = 0 \ \rightarrow\ y = 0^{\circ} + 360^{\circ} k \ \rightarrow\ x = 90^{\circ} - y \ \rightarrow\ x = 90^{\circ} + 360^{\circ} k \ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

Segunda solución (recordamos que ambas soluciones deben sumar 90º y sus senos deben sumar 1):

$$sen\, y - 1 = 0 \ \rightarrow\ sen\, y = 1 \ \rightarrow\ y = 90^{\circ} + 360^{\circ} k \ \rightarrow\ x = 0^{\circ} + 360^{\circ} k \ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

11. Resuelve $sen^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$ **.**

Desarrollamos → $sen^4 x = (sen^2 x)^2 = (1 - \cos^2 x)^2 = 1 + \cos^4 x - 2\cos^2 x$

Sustituimos en la ecuación de partida.

$$1 + \cos^4 x - 2\cos^2 x - \cos^4 x = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; 1 - 2\cos^2 x = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; -2\cos^2 x = \frac{-1}{2} \;\rightarrow\; \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\cos x = \pm\frac{1}{2}$$

Si $\cos x = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; x = 60^{o} + 360^{o} k \,,\, k \in \mathbb{R}$, $x = 300^{o} + 360^{o} k \,,\, k \in \mathbb{R}$

Si $\cos x = -\frac{1}{2} \;\rightarrow\; x = 120^{o} + 360^{o} k \,,\, k \in \mathbb{R}$, $x = 240^{o} + 360^{o} k \,,\, k \in \mathbb{R}$

Podemos agrupar las cuatro soluciones → $x = 60^{o} + 180^{o} k \,,\, k \in \mathbb{R}$, $x = 120^{o} + 180^{o} k \,,\, k \in \mathbb{R}$