


1

Historische Aspekte von Funktionen – dynamisch visualisiert

Hans-Jürgen Elschenbroich

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

$$\sum f(x) \cdot dx$$


GDM 5.3.2019, Regensburg

GeoGebraTube: www.geogebra.org/m/hymsqdyg


2

Historische Aspekte von Funktionen – dynamisch visualisiert

Agenda

1. **Historische Aspekte der Analysis**
 - Differenziale und Differenzialquotient, charakteristisches Dreieck
 - Indivisible
2. **Dynamische Visualisierung** (mit GeoGebra)
3. **Strenge und Unstrenge**
4. **Sinn und Unsinn heute**

ELSCHENBROICH (2019)



GeoGebraTube: www.geogebra.org/m/hymsqdyg

3

Historische Aspekte von Funktionen – dynamisch visualisiert

0. Prolog: Unendlich Kleines

EUKLID:

- Ein Punkt ist, was keine Teile hat.
- Eine Linie ist breitenlose Länge.
- Eine Fläche ist, was nur Breite und Länge hat.

Steigung von Geraden:

Steigungsdreieck, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ unabhängig von der Größe des Dreiecks.

Problem:

Wie kann man beliebig kleine und ggf. noch beliebig viele solcher beliebig kleinen Objekte visualisieren?

4

Historische Aspekte von Funktionen – dynamisch visualisiert

0. Prolog: Unendlich Kleines

Heute mit GeoGebra unter *Eigenschaften/Darstellung* :

- Punkte sind rot, grün oder blau, dicker oder dünner, kreisförmig, viereckig oder kreuzförmig.
- Geraden und Ebenen werden farbig und unterschiedlich dick dargestellt. Funktionsgraphen ebenso.

Heute mit der Funktionenlupe:


- beliebig kleine Steigungsdreiecke ‚zoomen‘.

5

Historische Aspekte von Funktionen – dynamisch visualisiert

1. Historische Aspekte

1. **Differenziale, Differenzialquotient**
LEIBNIZ
2. **Charakteristisches Dreieck**
PASCAL, LEIBNIZ
3. **Indivisible**
Indivisible: CAVALIERI und LEIBNIZ
4. **Bezeichnungen**
Differenzialquotient, Integralzeichen: LEIBNIZ

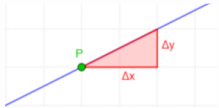


6

Historische Aspekte von Funktionen – dynamisch visualisiert

1.1 Differenziale, Differenzialquotienten

Historisch: Differenziale wurden als beliebig kleine, aber von Null verschiedene Objekte verstanden, aus denen dann das Verhältnis, der Differenzialquotient gebildet wurde. Es gab also ein beliebig kleines Steigungsdreieck $dx - dy - ds$.



Die Steigung der Geraden (Tangente) war der Quotient aus den Differenzialen Δy und Δx , auch bei beliebig kleinen Steigungsdreiecken.

1.2 Charakteristisches Dreieck

LEIBNIZ ergänzte die Figur zum Differenzialquotienten aufgrund einer Idee von PASCAL, die er vom Kreis auf beliebige Funktionen verallgemeinerte. Zum beliebig kleinen Dreieck dx - dy - ds wird ein ähnliches Dreieck konstanter Größe, das charakteristische Dreieck konstruiert.



Das charakteristische Dreieck bei LEIBNIZ

WALTER, S. 234

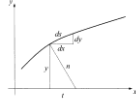


Abb. 7.2.14. Das charakteristische Dreieck an einer beliebigen Kurve

SONAR, S. 409

Frage am Rande:
Welcher Fehler ist in welcher Abbildung zu finden?

1.3 Indivisible

atomis (gr.), *indivisibil* (lat.): unteilbar, nicht teilbar.

Indivisible in der Vorstellung von CAVALIERI:

„Die Indivisiblen sind unendlich dünne Gebilde, die eine um Eins kleinere Dimension besitzen als das von ihnen in ihrer Gesamtheit gebildete stetige Ganze.“ (Wußing, S. 159)



CAVALIERI und LEIBNIZ betrachteten „eine ebene Figur als Gesamtheit der in ihr enthaltenen Strecken, Körper bestehen aus einer *unbestimmten* Anzahl von parallelen Ebenen“ (PEIFFER & DAHAN-DALMEDICO, S. 180).

Parallele Strecken/ Flächen: CAVALIERISCHES Prinzip!

1.3 Indivisible und Darstellung

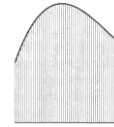
Wenn wir uns eine Fläche aus beliebig vielen euklidischen Strecken bestehend denken (also vom Wesen her aus beliebig dünnen Objekten), kommt man zu der Problematik, wie man das visualisieren kann/ soll. Eine GeoGebra-Strecke hat eine einstellbare Dicke, ist also von der Gestalt her eher rechteckig.

Doppelcharakter:

„Each of the indivisibles is simultaneously viewed as a one-dimensional line segment and as an infinitesimally thin two-dimensional rectangle.“ (Otero, 2000)

1.4 Indivisible und Integral

Mit dem Differenzial dx als einer Seite und $f(x)$ als der jeweils anderen Seite werden beliebig dünne Rechtecke $f(x) \cdot dx$ gebildet, die dann alle aufsummiert werden. So erhält man (für positive $f(x)$) den Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse.



WALTER, S. 194

CAVALIERIS
Indivisiblenmethode

1.5 Bezeichnungen bei LEIBNIZ

LEIBNIZ schuf Schreibweisen und Bezeichnungen für den Differenzialquotienten und das Integral, die sich über Jahrhunderte erhalten und bewährt haben.

„Bei den Bezeichnungen ist darauf zu achten, daß sie **für das Erfinden bequem** sind. Dies ist am meisten der Fall, so oft sie die innerste Natur der Sache mit Wenigem ausdrücken und gleichsam abbilden. So wird nämlich auf wunderbare Weise die Denkarbeit vermindert.“ (LEIBNIZ, zitiert nach WUßING, S. 173)

„Aus der Kombination der Symbole sollten sich, fast wie von selbst, neue Erkenntnisse ergeben.“ (SONAR, S. 405)

1.6 Bezeichnungen und Tangente

Für Leibniz war es zulässig, mit Differenzialen wie mit reellen Zahlen zu rechnen, insbesondere sowohl Quotienten (SONAR, S. 406) wie auch Produkte und Summen zu bilden.

Bei der Tangente an den Graphen einer differenzierbaren

Funktion f führte das zum Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$.

1.7 Bezeichnungen und Fläche

Bei der Flächenberechnung wurde eine Fläche unter dem Graphen von f aus beliebig kleinen, indivisiblen Rechtecken $f(x) \cdot dx$ zusammengesetzt gedacht und über alle diese Rechtecke summiert.

Zunächst schrieb LEIBNIZ *omn.* (*omnia*, alle) bei der Summation. 1675 benutzt er erstmals das Integralzeichen \int als stilisiertes Summenzeichen (WALTER, S. 195).

1.8 Vorteile des ‚Rechnens‘ mit Differenzialen

$$\text{Kettenregel: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$\text{Ableitung Umkehrfunktion: } \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$$

$$\text{Substitutionsregel Integral: } \int f(z) \cdot \frac{dz}{dx} \cdot dx = \int f(z) \cdot dz$$

$$\text{Kurvenlänge: } s = \sum ds = \sum \sqrt{dy^2 + dx^2} =$$

$$\sum \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} \cdot dx = \int \sqrt{(f'(x))^2 + 1} dx$$

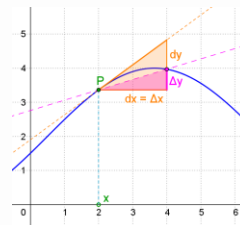
2. Dynamische Visualisierung

1. Differenziale, Differenzialquotient
2. Charakteristisches Dreieck
3. Flächen als Summe von Indivisiblen
4. Körper als Summe von Indivisiblen

2.1 Tangente und Differenziale

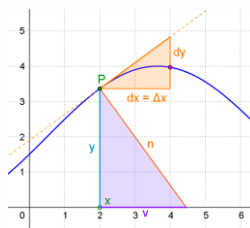
Figur aus 1.2 mit GeoGebra dynamisieren:

- Funktion f veränderbar
- P veränderbar
- $dx = \Delta x$ veränderbar



2.2 Differenziale und charakteristisches Dreieck

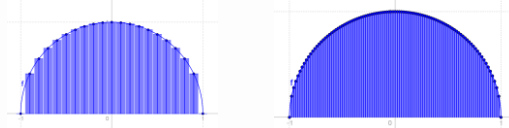
Figur aus 2.1 um das charakteristische Dreieck ergänzen. Dieses Dreieck ändert seine Größe nicht, ist unabhängig von dx !



2.3 Fläche als Summe von Indivisiblen $f(x) \cdot dx$

Figur 1.3 dynamisieren:

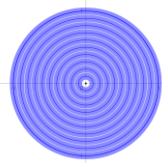
- achsenparallele Strecken/ Rechtecke
- Prinzip für kleine n bzw. große dx verstehen
- dx veränderbar
- Funktion f veränderbar
- Grenzen a und b veränderbar
- Dynamisches ‚Füllen‘



(ELSCHENBROICH & SEEBACH 2018)

2.4 Kreisfläche als Gesamtheit von konzentrischen Kreislinien

Auch gekrümmte Linien sind als Indivisible möglich, z.B. Kreis aus konzentrischen Kreislinien (TORICELLI).
Idee: Übertragen auf den Ansatz mit achsenparallelen Strecken/Rechtecken.

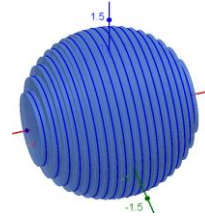


(ELSCHENBROICH & SEEBACH 2018)

2.5 Kugel als Summe von indivisiblen Zylindern

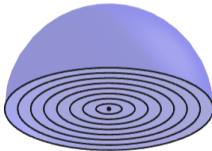
Figur 2.3 in Dreidimensionale übertragen:

- Aus den Rechtecken $f(x) \cdot dx$ werden durch Rotation um die x-Achse zylindrische ‚Scheiben‘ $\pi f^2(x) \cdot dx$.



2.6 Kugel als Summe von konzentrischen Sphären

Figur 2.4 in Dreidimensionale übertragen:
Aus Sichtbarkeitsgründen: Halbkugel statt Kugel.
Die massive Halbkugel wird durch konzentrische halbe Kugelschalen/ Hohlkugeln („Weihnachtskugeln“) gefüllt.



(ELSCHENBROICH & SEEBACH 2018)

3. Strenge und Unstrenge

1. Anfänge der Analysis
2. Intuition

3.1 Die Anfänge der Analysis

Aufkeimen der Analysis: wenig formal, viel intuitiv.
Anfangs eher mystisch und dunkel und anfällig für Fehler.

Aber dennoch Motor der Entwicklung über 150 Jahre!

Erst viel später exakte und strenge Basis mit Grenzwerten durch CAUCHY, WEIERSTRAß und RIEMANN.

Zuerst: Differenziale als Objekte, als Dinge an sich, mit denen man dann die Steigung/ Ableitung als Quotient berechnete.

Und Indivisible als Objekte, als Dinge an sich, mit denen man dann Flächeninhalte als Summe berechnete.

3.2 Intuition & Instinkt

LEIBNIZ, CAVALIERI & Co wussten/ ahnten, was sie zulässigerweise tun konnten und vor allem was nicht!
„Leibniz war sich der Unbestimmtheiten und logischen Widersprüchlichkeiten seines Differentialbegriffs und des Umgangs mit ‚unendlich kleinen Größen‘ sehr wohl bewusst.“ (WUBING S. 174)

COURANT & ROBBINS sehen Mystizismus und Konfusion und schreiben zum Begriff des Differentialquotienten in LEIBNIZ' Zeiten:
„Nur wer den richtigen ‚mathematischen Sinn‘ besaß, konnte diesen Begriff erfassen.“ (COURANT & ROBBINS, S. 330)



Ähnlich schrieb TOEPLITZ über CAVALIERI und den korrekten Umgang mit Indivisiblen: „Er blieb auf seinen ‚guten Instinkt‘ angewiesen.“ (TOEPLITZ, S. 58)

4. Sinn und Unsinn heute

1. Schreibfigur?
2. Differenzial und Ableitung
3. Indivisible und Riemann-Integral
4. Leibniz und exakte Strenge
5. Infinitesimale Sicht
6. Didaktisches Potential

4.1 ‚Schreibfigur‘ ?

Heute wird meist nicht mehr von Differenzialen gesprochen und vor allem dem Differenzialquotienten die Quotienten-Eigenschaft abgesprochen, indem man ihn als *ein* unteilbares Symbol, als bloße Schreibfigur sieht:

„...darf dieses Symbol auch nicht als Bruch von zwei reellen Zahlen verstanden werden, sondern ist nur als Ganzes sinnvoll. $\frac{dy}{dx}$ wird auch nicht ‚dy durch dx‘ gelesen, sondern ‚dy nach dx.‘“ (KRONFELLNER, S. 81)

Beim Integral ähnlich: $\int f(x) dx$ wird meist als *Integral von f nach dx* gelesen.

Das bringt nicht mehr Klarheit und nur oberflächlich mehr Korrektheit, verringert aber das didaktische Potential.

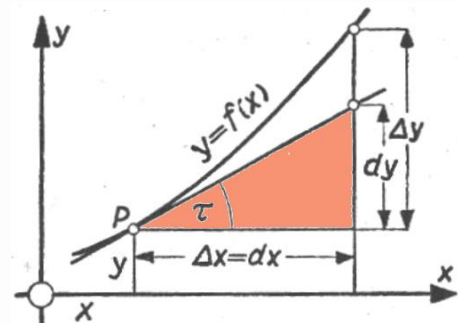
4.2 Differenzial und Ableitung

Früher wurde von Differenzialen ausgehend der Differenzialquotient und damit die Steigung der Tangente, der Wert $f'(x)$ bestimmt.

Will man heute mit Differenzialen arbeiten (z. B. in der Näherungsrechnung), so kann man von der Ableitung $f'(x)$ ausgehend mit $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ dann $dy = f'(x) \cdot dx$ herleiten. Weiter ist $dx = \Delta x$, damit darf man dann auch $\frac{dy}{dx}$ als Quotienten von diesen Differenzialen handhaben.

(MANGOLDT-KNOPP, S. 68, SONAR S.406, BÜCHTER & HENN, S. 203).

4.2 Differenzial und Ableitung



4.3 Indivisible und Riemann-Integral

Die RIEMANNSche Integral-Definition mit ‚passenden‘ Zwischenpunkten ξ_i für Zerlegungen Z des Intervalls $[a, b]$ ist nahe bei der Sichtweise der Indivisiblen.



Walter, S. 203

Riemannsche Zwischensumme

Bei der Visualisierung der Indivisiblen haben wir die spezielle Situation, dass die Zerteilung äquidistant ist und die ξ_i immer in der Mitte des Intervalls sitzen. Man könnte also von ‚Mittensummen‘ sprechen.

4.4 LEIBNIZ und exakte Strenge

Das Vorgehen von LEIBNIZ wird heute meist als ‚unstreng‘ und auf Intuition basierend angesehen.

Dem ist aber nicht so, wie ein erst 2016 veröffentlichter Text von 1676 zeigt, in dem er schon die Grundlagen der modernen Epsilonantik formulierte:

Dass sich der Wert der Rechteckssumme vom Wert des Integrals „um eine Quantität unterscheidet, die kleiner ist als eine beliebige gegebene“. (LEIBNIZ, zitiert nach ULLRICH 2017).

Ein anderer Weg, die Gedanken von LEIBNIZ modern und streng zu formulieren und mit infiniten und infinitesimalen Zahlen zu operieren, ist die Nonstandard-Analysis, die mit infiniten und infinitesimalen Zahlen rechnet und mit einer ‚Unendlichkeitsbrille‘ vergrößert.

4.5 Infinitesimale Sicht

Dies ist ein Versuch, historische Ideen modern zu verstehen und zu visualisieren.

Das ist keine ‚sauberere‘ mathemathikhistorischer Beitrag, sondern eher ein Cross over.


Unterschiede zwischen Differenzialen von LEIBNIZ und den Indivisiblen von CAVALIERI werden z. B. nicht thematisiert.

Und der Einsatz von Schiebereglern z.B. für Δx bringt eine moderne infinitesimale Sicht ins Spiel, die eher an den Denkweisen heutiger Mathematik-Lehrkräfte orientiert ist als an den historischen Denkweisen.

4.6 Didaktisches Potential

Fachmathematisch ist die Sichtweise und das Denken von LEIBNIZ & Co durch einen ‚sauberen‘ Grenzwert-Zugang abgelöst worden.

Aber sie hat weiterhin bedeutendes didaktisches Potential.

1. Sie ist geistesgeschichtlich interessant.
 - Woher haben denn Differenzialrechnung und Differenzialquotient ihren Namen? 
 - Woher kommt die Integral-Schreibweise?
2. Sie ermöglicht - insbesondere mit dynamischer Visualisierung - einen Zugang zu Grundvorstellungen und zentralen Ideen.

5. Literatur

- BÜCHTER, A. & HENN, W. (2010): Elementare Analysis. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg
- COLERUS, E. (1934): Vom Einmaleins zum Integral. Paul Schönyay Verlag, Berlin-Wien-Leipzig
- COURANT, R. & ROBBINS, H. (1967): Was ist Mathematik? Zweite Auflage. Springer, Berlin, Heidelberg, New York
- ELSCHENROICH, H.-J. (2019): Historische Aspekte der Analysis - dynamisch visualisiert. Erscheint in: Pirkenmeil, G., & Schacht, F. (Hrsg.). (2019). Digitalisierung fachbezogen gestalten. Franzbecker Verlag, Hildesheim
- ELSCHENROICH, H.-J. & SEEBACH, G. (2018): Funktionen erkunden. Ideenreiche Arbeitsblätter mit GeoGebra. Friedrich Verlag, Velber
- KAISER, H. & NÖBAUER, W. (1998): Geschichte der Mathematik. Oldenburg, München
- KRONFELLNER, M (1998): Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien
- LAMBACHER, T. & SCHWEIZER, W. (1959): Lambacher-Schweizer Teil III, Analysis. Klett, Stuttgart
- V. MANGOLDT, H. & KNOPP, K. (1968): Eine Einführung in die höhere Mathematik. Zweiter Band. 13. Auflage. Hirzel, Stuttgart
- Otero, D. E. (2000): Buonaventura Cavalleri. http://ceerbrox.zu.edu/math/math147_02/cavalleri/cavintro.html
- PEIFFER, J. & DAVAN-DALMEDICO, A. (1994): Wege und Irrwege – Eine Geschichte der Mathematik. Birkhäuser, Basel
- SONAR, T. (2016): 3000 Jahre Analysis. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg, Springer Spektrum
- TOEPLITZ, O (1949): Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Erster Band. Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg
- ULLRICH, P. (2017): Das Manuskript von Leibniz aus dem Jahre 1676 über Infinitesimalrechnung. In: Der Mathematikunterricht Heft 3/2017. Friedrich Verlag, Velber
- WALTER, W. (2004): Analysis 1. 7. Auflage. Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg
- WUBING, H. (1979): Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften