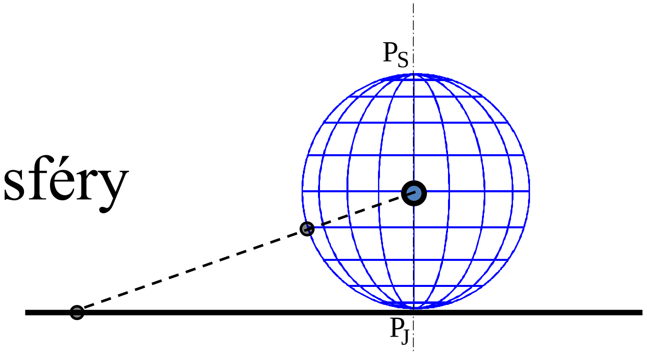
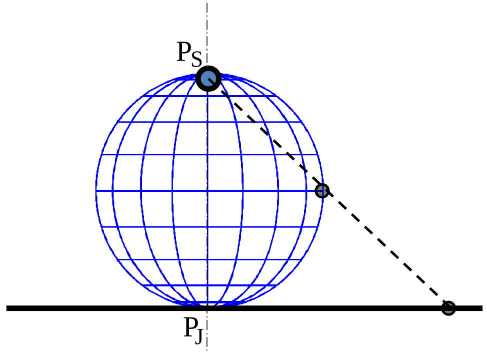
Středové kartografické projekce

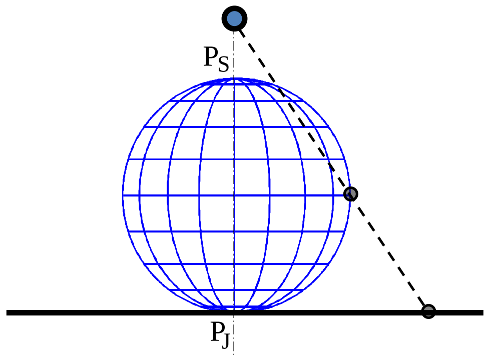
Gnómonická – střed promítání je ve středu sféry



Stereografická – střed promítání je bodem sféry
Hipparchos z Nicee, 180-125 př. n. l



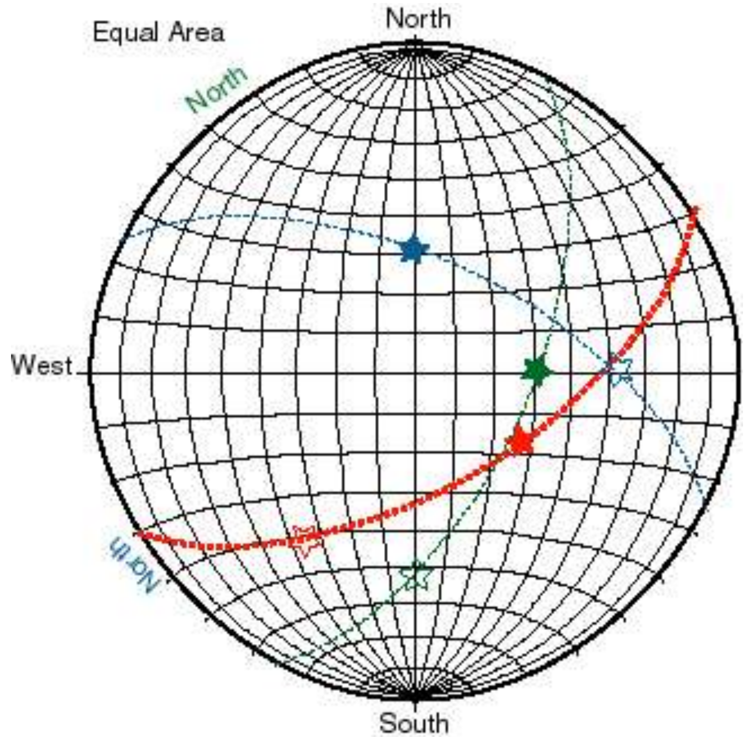
Scénograická – střed promítání je vnější bod sféry



Stereografická projekce - konformní

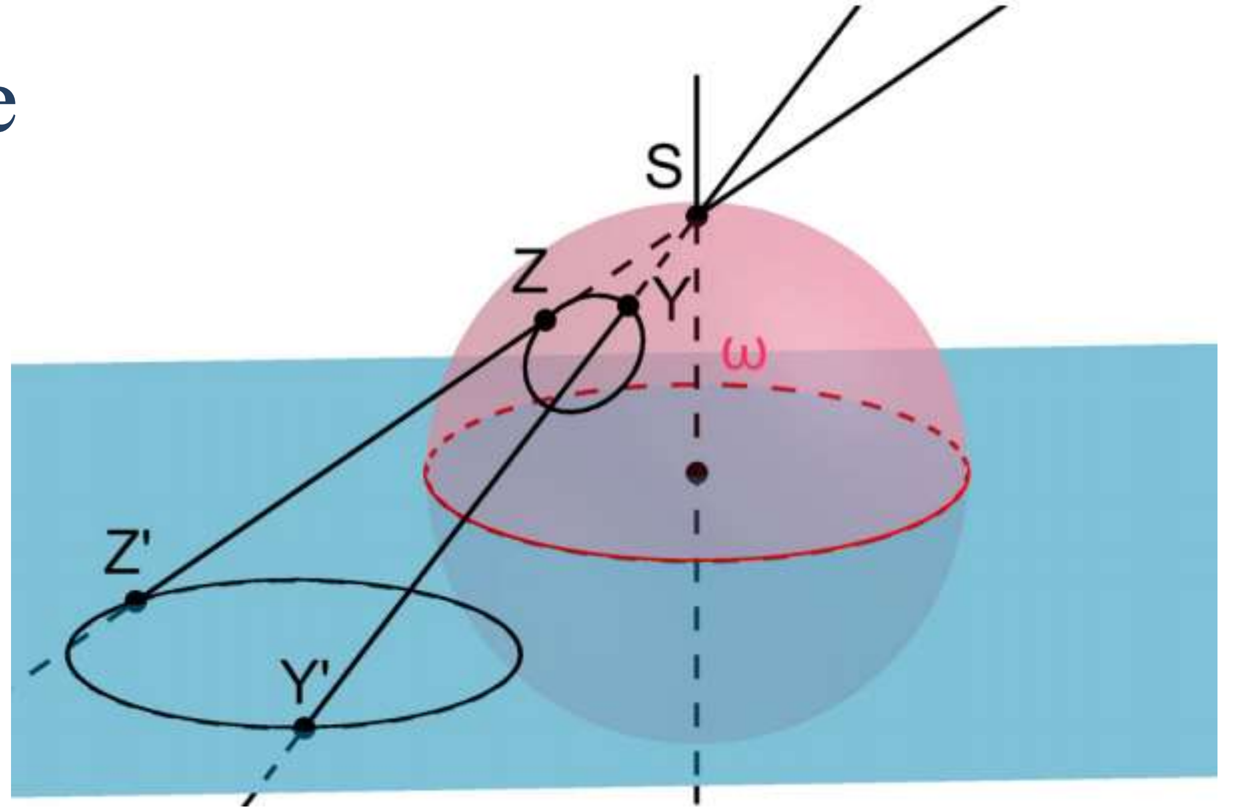
- Známa v Egyptě,ve starém Řecku (Hipparchos, Ptolemaios)
- Velmi často používaná projekce, znázorňování pólových oblastí, mapa hvězdné oblohy (planisféra)
- Státy NATO: UPS (Univeral Polar Stereographic Projection).

Planisféra



Stereonet (Wulffova síť)

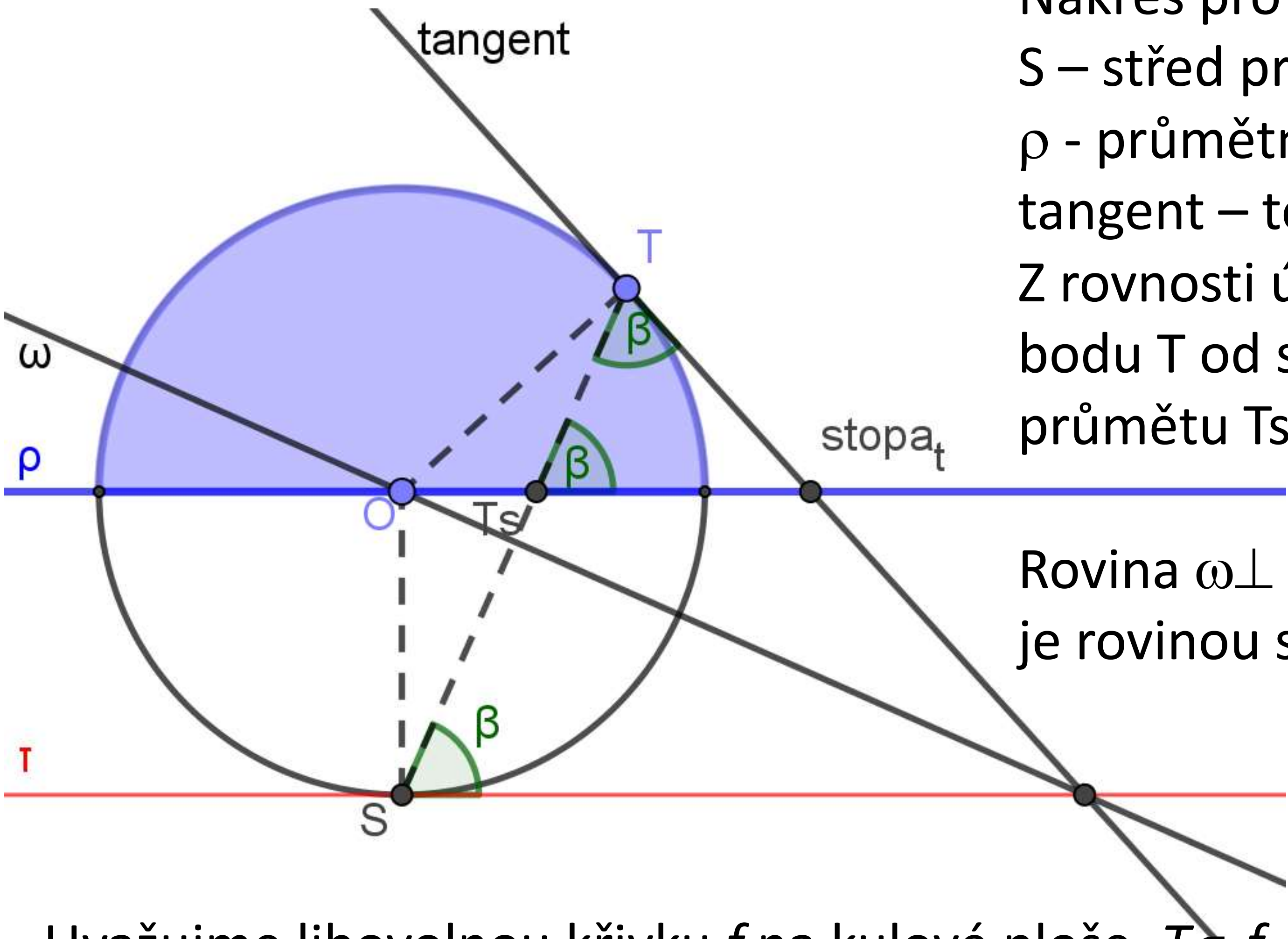
Stereografická projekce



Středové promítání, kdy střed *S* promítání je bodem sféry. Průmětna je rovnoběžná s tečnou rovinou sféry v bodě *S*.

- Stereografická projekce je konformní zobrazení.
- Stereografický průmět kružnic, které procházejí středem promítání *S*, jsou přímky.
- Stereografický průmět kružnic, které neprocházejí středem *S* jsou kružnice.

Stereografická projekce zachovává úhly - důkaz

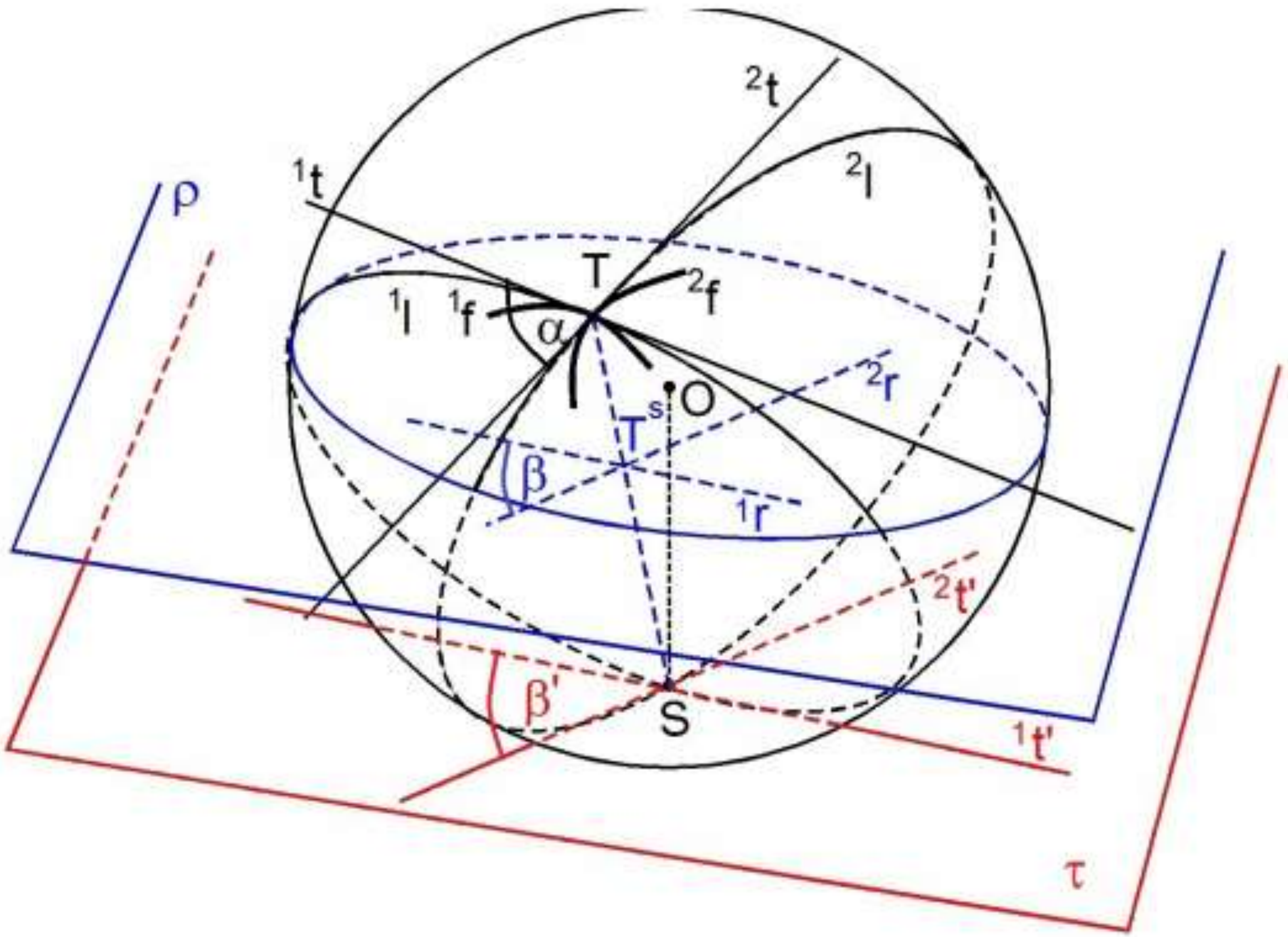


Nákres pro bod *T* v rovině hl. meridiánu
S – střed promítání
ρ - průmětna
tangent – tečná rovina sféry
Z rovnosti úhlů β vyplývá, že vzdálenosti bodu T od stopy je stejná jako vzdálenost průmětu Ts od stopy.

Rovina ω⊥ TS procházející středem sféry je rovinou souměrnosti bodů TS

Uvažujme libovolnou křivku *f* na kulové ploše, *T*∈ *f*. Vzdálenosti stopníku tečny křivky od bodu *T* a od jeho průmětu *Ts* jsou vždy stejné.
Promítací rovina tečny protíná průmětnu i obzorovou rovinu τ v rovnoběžných přímkách r, t’, rovina ω⊥ TS je rovinou souměrnosti přímek t a t’

Stereografická projekce zachovává úhly - důkaz



S – střed promítání
ρ - průmětna
tangent = (^{1}t,^{2}t)
tečná rovina sféry

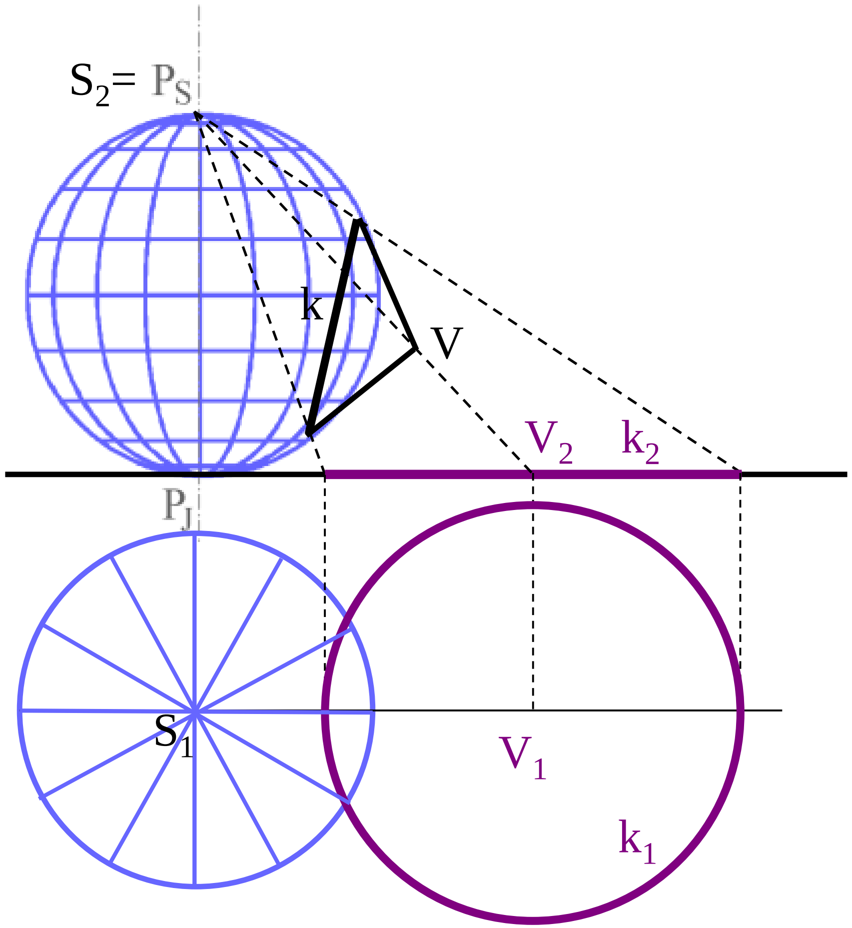
m.d. β = α

Uvažujme libovolné křivky ^1f, ^2f na kulové ploše protínající se v *T*.
Promítací roviny tečen protínají průmětnu i obzorovou rovinu τ v rovnoběžných přímkách $^1r \,||\, ^1t'$, $^2r \,||\, ^2t'$, rovina ω⊥ TS je rovinou souměrnosti, tj. α = β' = β

Stereografický průmět kružnic, které neprocházejí středem *S* jsou kružnice.

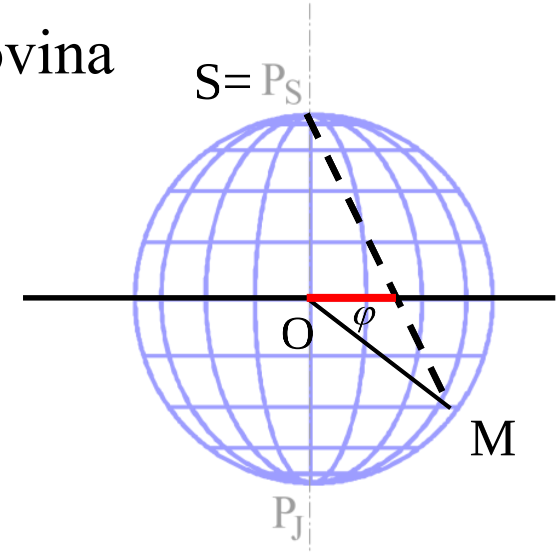
Důsledek předchozích úvah:

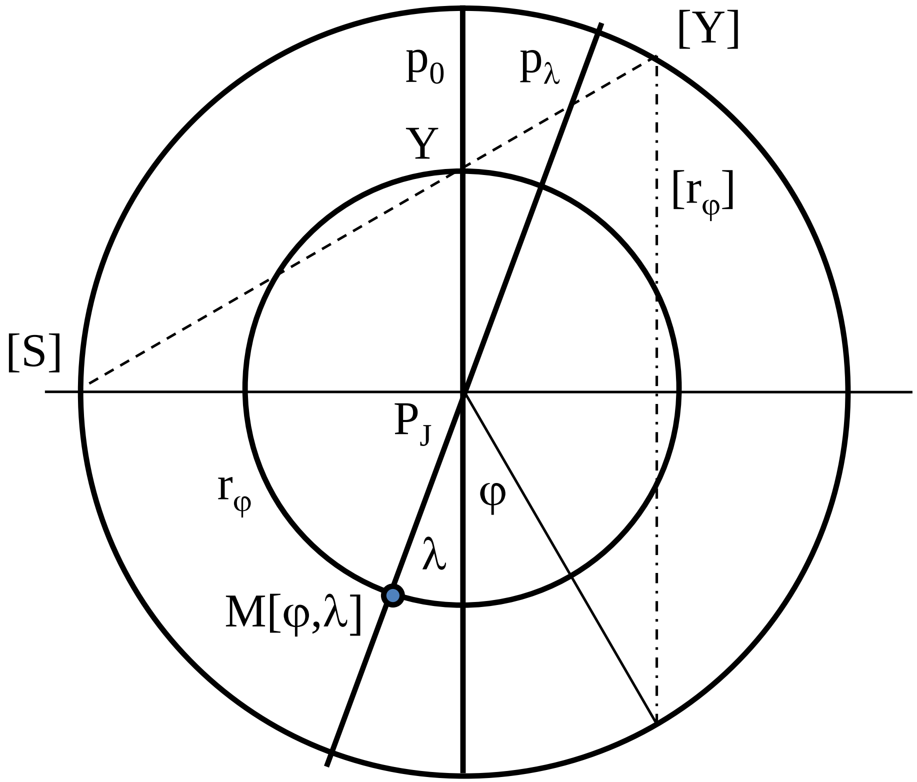
- Vzdálenosti stopníku tečny křivky od bodu *T* a od jeho průmětu *Ts* jsou vždy stejné.
- Úhel mezi površkou dotykového kužele a tečnou kružnice se zachová.



Normální stereografická projekce

Střed *S* promítání je severní, nebo jižní pól. Průmětna je rovina rovníku.
Průměty poledníků jsou jsou poloměry rovníku
Průměty rovnoběžek jsou soustředné kružnice.





Normální stereografická projekce – zobrazovací rovnice

Zobrazovací rovnice zapíšeme v polárních souřadnicích.
Průmětem rovnoběžek jsou soustředné kružnice ρ = *konst*.
Průmětem poledníků jsou úsečky $\alpha = \lambda$.
Ze součtu úhlů v trojúhelníku OMP_S vyjádříme úhel ω.

$$\frac{\pi}{2} + \phi + 2\omega = \pi$$

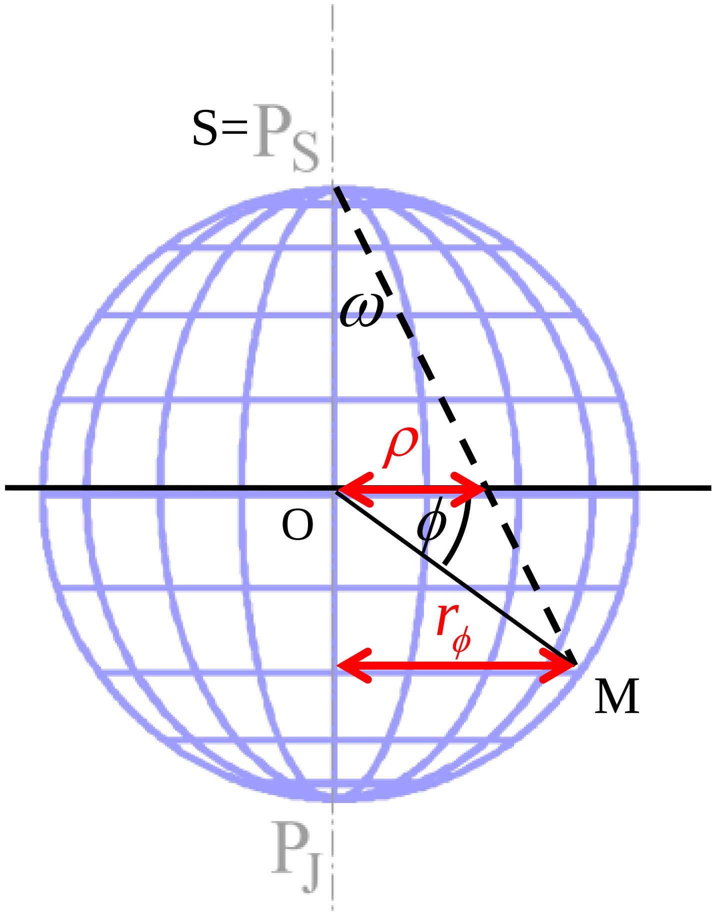
$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \\ \tan\omega &= \frac{\rho}{R} \end{aligned}\right\}$$

Zobrazovací rovnice

$$\rho = R \cdot \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

$$\alpha = \lambda$$



$$\rho = R \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) = R \cdot \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

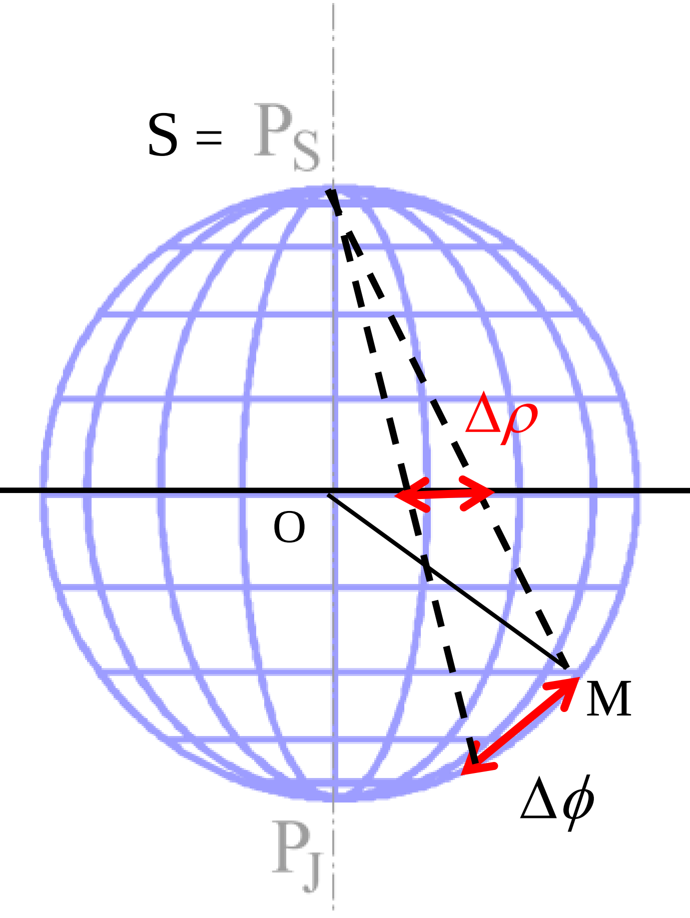
Normální stereografická projekce – zkreslení

$$\text{Délkové zkreslení} = \frac{\text{délka obrazu v mapě}}{\text{skutečná délka na ref. ploše}}$$

Zobrazovací rovnice

$$\rho = R \cdot \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

$$\alpha = \lambda$$



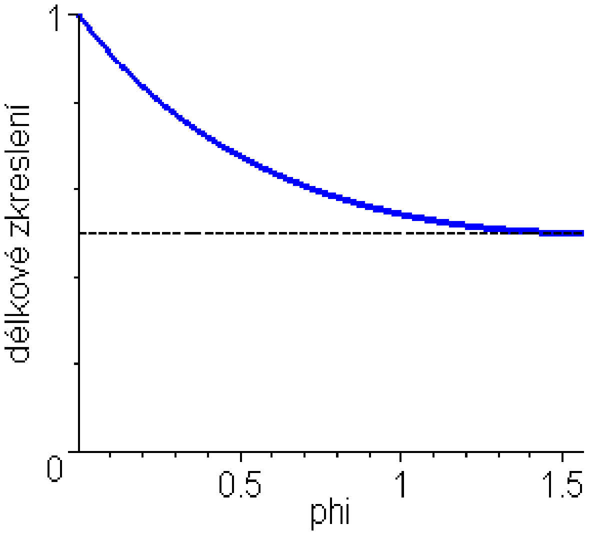
Zkreslení ve směru poledníků

$$m_p = \lim_{\Delta\phi \to 0} \frac{R\cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) - R\cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi + \Delta\phi}{2}\right)}{R \cdot \Delta\phi} = \left(\cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\right)'$$

- Délkové zkreslení $m_r = m_p$

$$m_p = \frac{\partial}{\partial\phi}\cot\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\phi\right) = \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cot\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\phi\right)^2\right|$$

$$mr := \frac{\cot\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\phi\right)}{\cos(\phi)}$$



Zobrazení sféry na rovinu

Odpovídající si body mají v parametrizacích stejné křivočaré souřadnice.

$$S(\lambda,\varphi) = [R\cos\varphi\cos\lambda, R\cos\varphi\sin\lambda, R\sin\varphi],$$

$$M(\lambda,\varphi) = \left[R\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\cos\lambda, R\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\sin\lambda\right]$$

$$\frac{\partial S}{\partial\lambda} = [-R\cos\varphi\sin\lambda, R\cos\varphi\cos\lambda, 0] \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial\lambda}\right)^2 = R^2\cos^2\varphi; \left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2 = R^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial\varphi} = [-R\sin\varphi\cos\lambda, -R\sin\varphi\sin\lambda, R\cos\varphi] \qquad \frac{\partial S}{\partial\lambda}.\frac{\partial S}{\partial\varphi} = 0$$

První základní forma plochy.

$$ds^2 = R^2\cos^2\varphi\left(d\lambda\right)^2 + R^2\left(d\varphi\right)^2$$

Zobrazení sféry na rovinu

Odpovídající si body mají v parametrizacích stejné křivočaré souřadnice.

$$S(\lambda,\varphi)=[R\cos\varphi\cos\lambda, R\cos\varphi\sin\lambda, R\sin\varphi],$$

$$M(\lambda,\varphi)=\left[R\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\cos\lambda, R\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\sin\lambda\right]$$

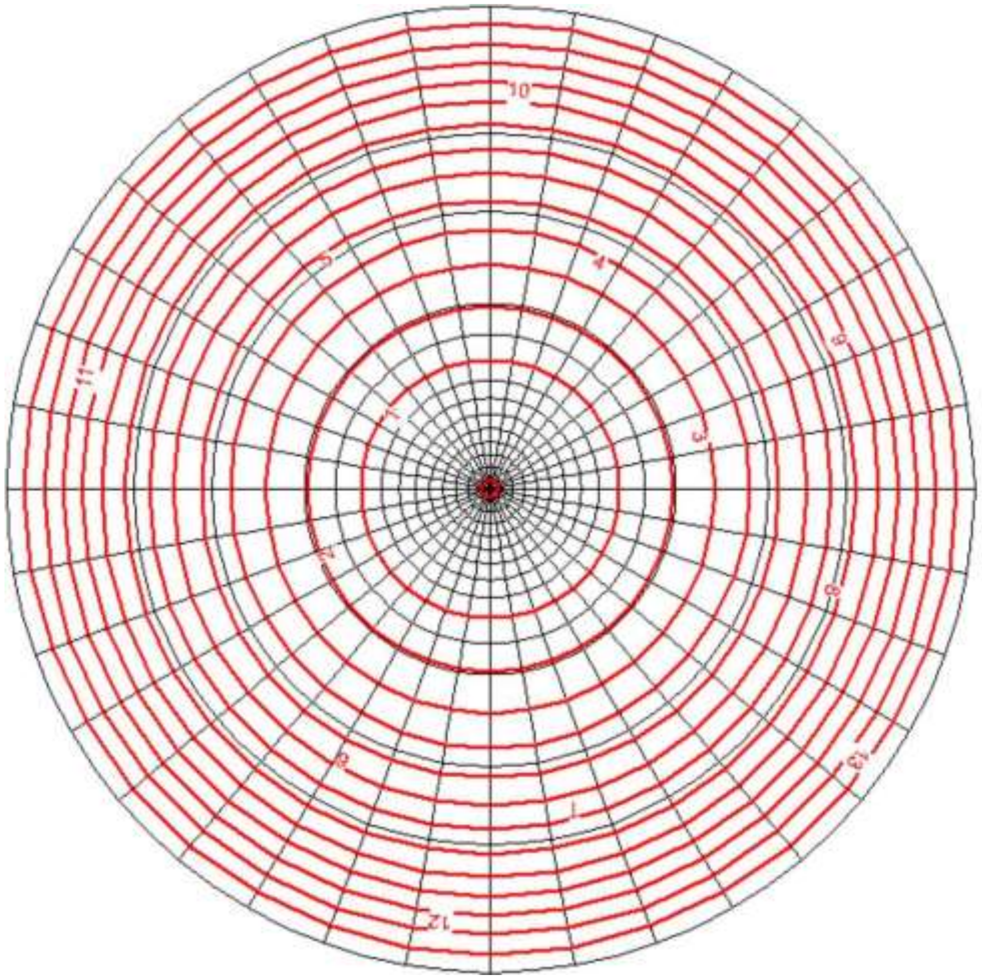
$$\frac{\partial M}{\partial\lambda}=\left[-R\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\sin\lambda, R\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\cos\lambda\right]; \quad \left(\frac{\partial M}{\partial\lambda}\right)^2=R^2\cot^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$$

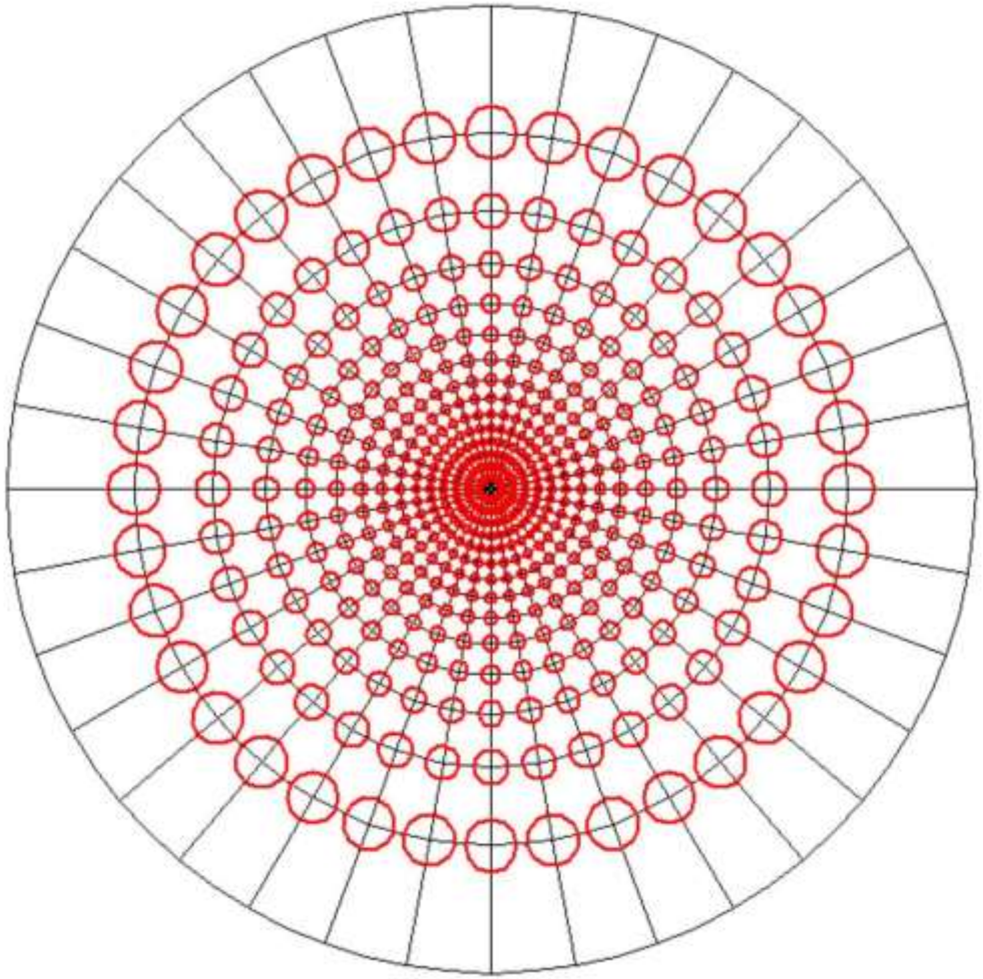
$$\frac{\partial M}{\partial\varphi}=\left[\frac{-R\cos\lambda}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}, \frac{-R\sin\lambda}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}\right]; \quad \left(\frac{\partial M}{\partial\varphi}\right)^2=\frac{R^2}{4\sin^4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}$$

První základní forma plochy je úměrná.

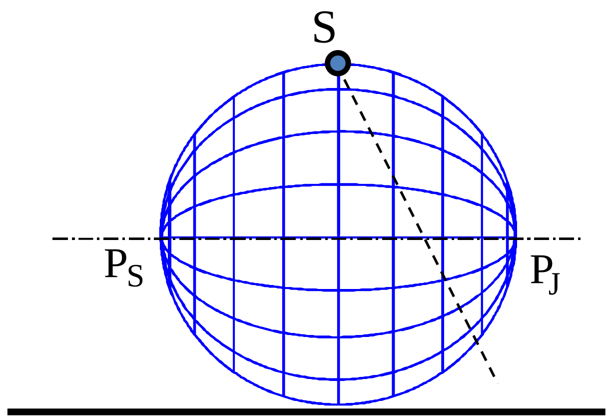
$$ds^2=R^2\cot^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)(d\lambda)^2+\frac{R^2}{4\sin^4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}(dv)^2$$

Evideformáty m_r a Tissotovy indikatrix

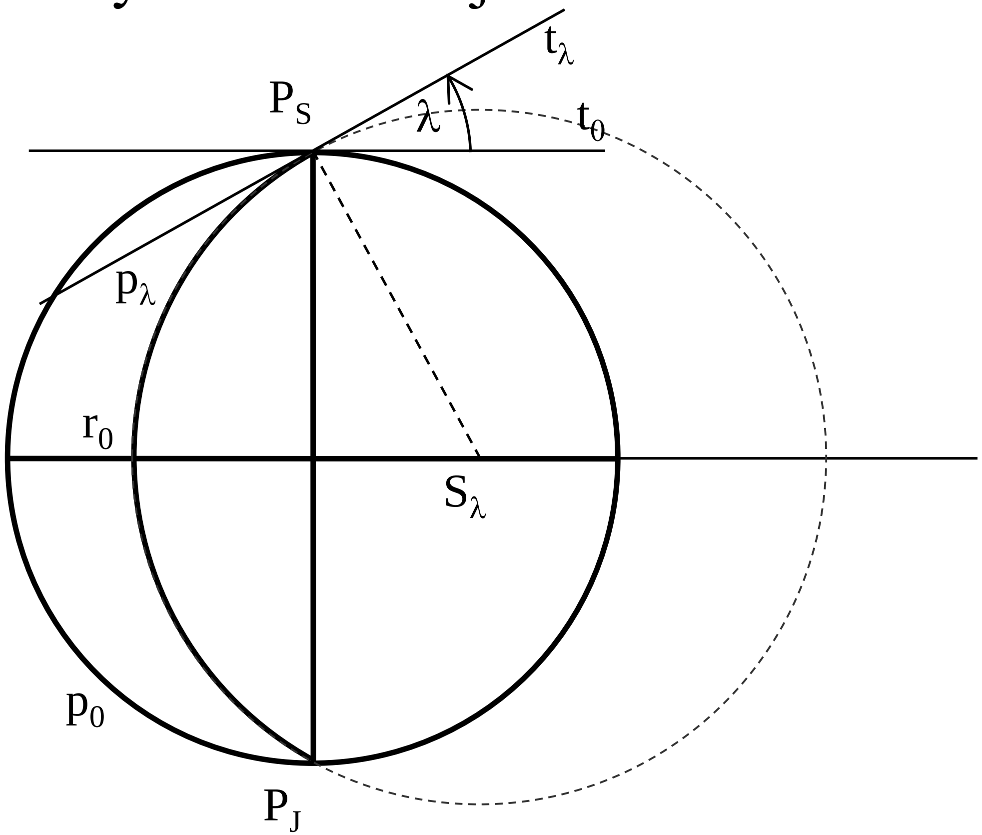


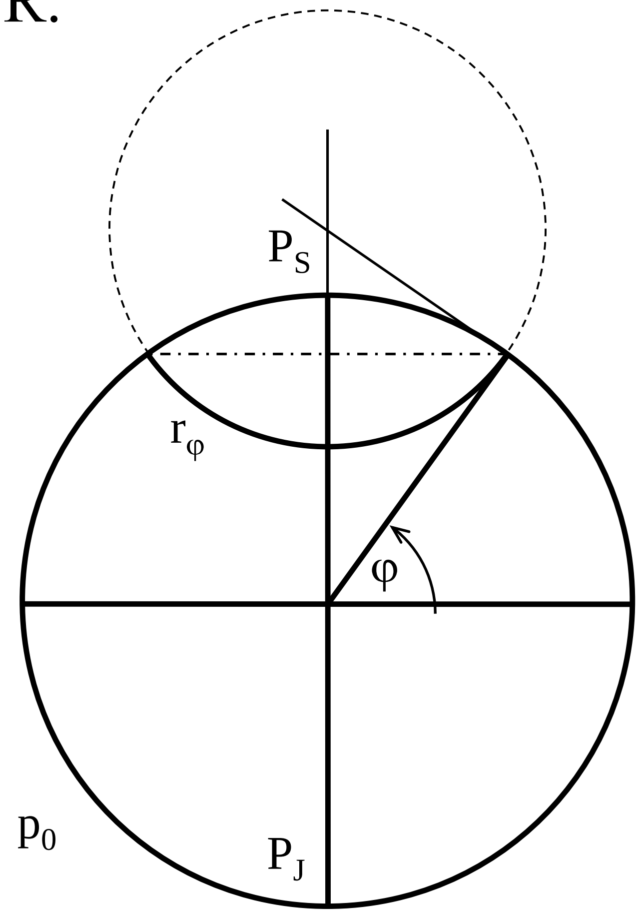


Příčná stereografická projekce

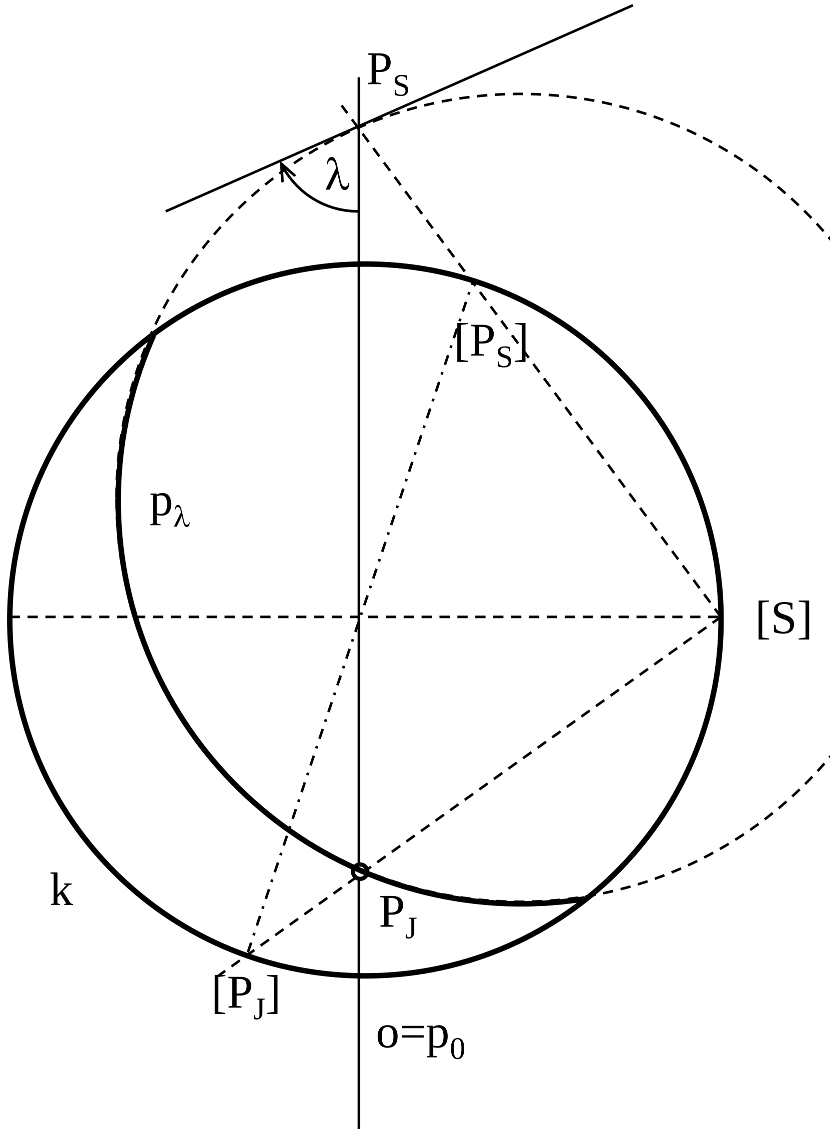


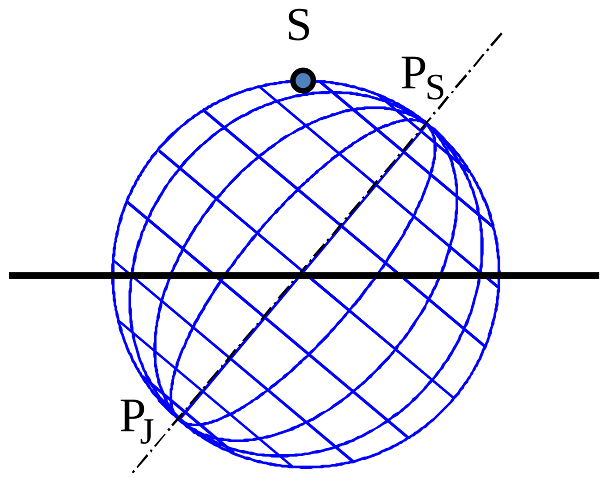
Střed *S* promítání je bod rovníku, průmětna prochází nultým poledníkem.
Poledníky se zobrazí do svazku kružnic. Poledník je určen body P_s, P_J a průsečíkem s rovníkem R.
Průměty rovnoběžek jsou kružnice.





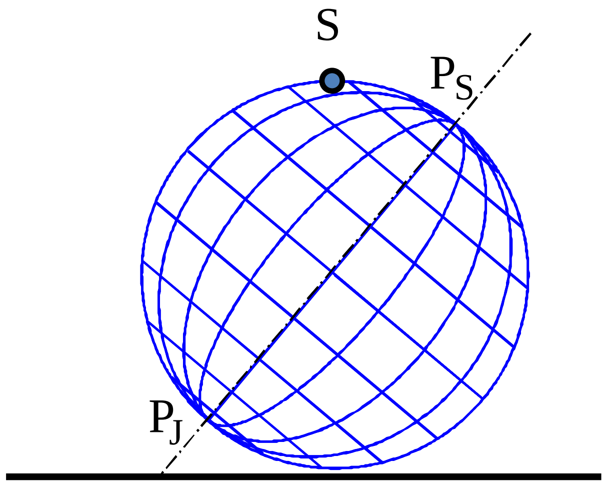
Obecná stereografická projekce -poledníky

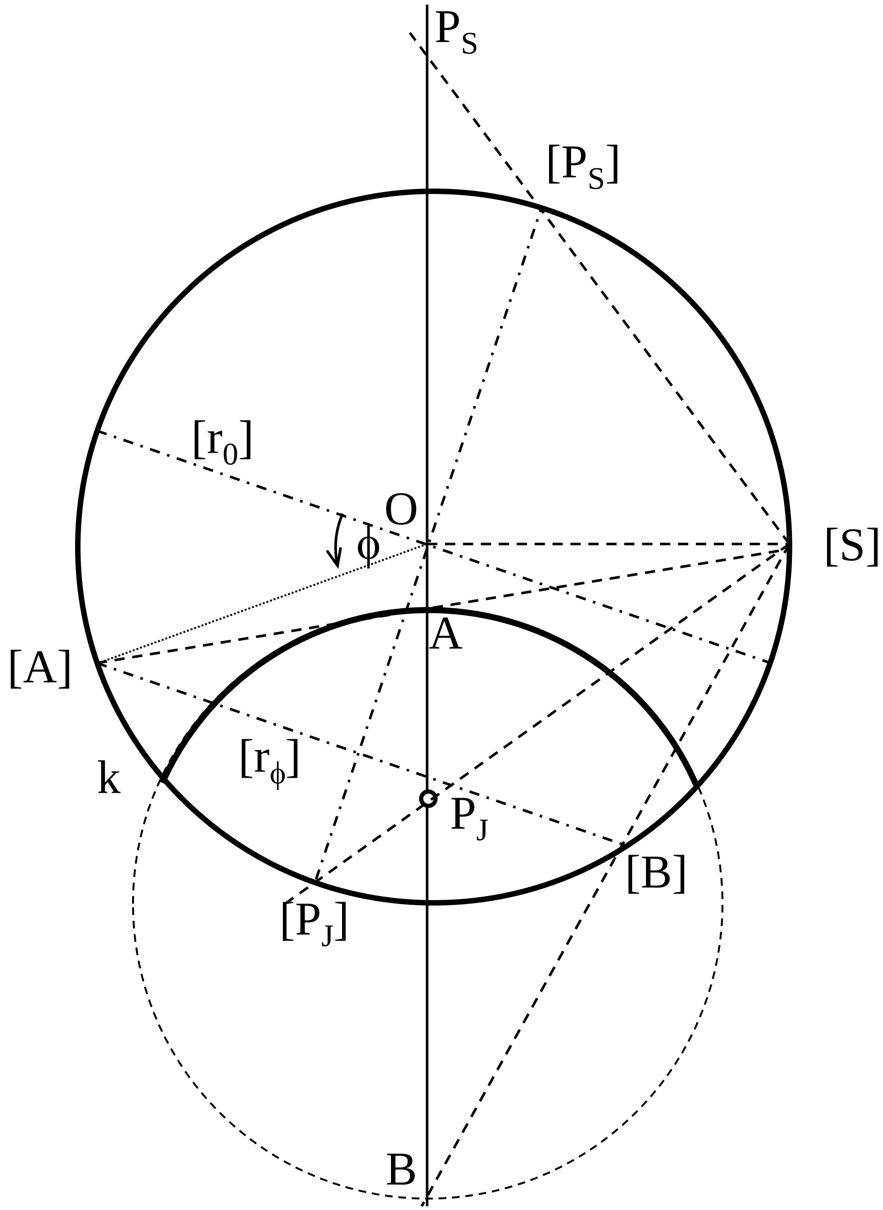




Průnikovou kružnici sféry a průmětny označme *k*. Pro určení polohy sféry vzhledem k průmětně zadáme průmět jižního pólu P_J. Střed *S* nechť leží na nultém poledníku. Sklopíme promítací rovinu osy a určíme P_S. Zeměpisná délka se zobrazí ve skutečné velikosti, odměříme ji od nultého poledníku

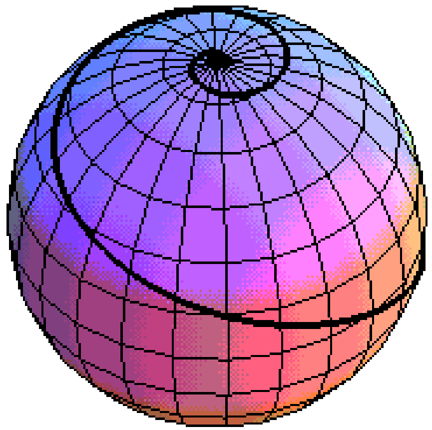
Obecná stereografická projekce - rovnoběžky



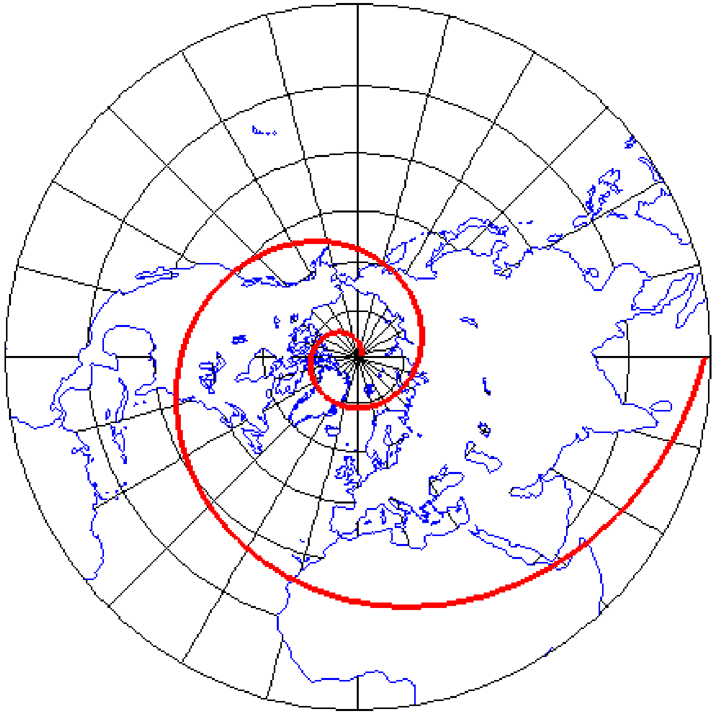


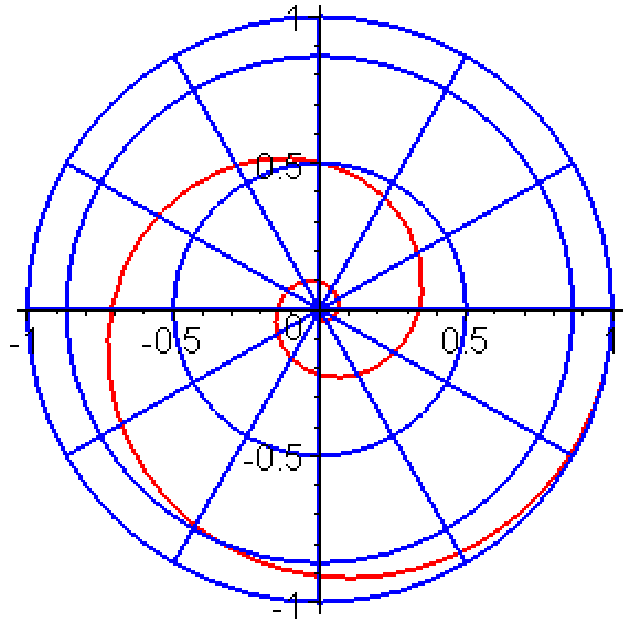
Průmětem rovnoběžek jsou kružnice se středem na ose o.
Sklopíme promítací rovinu osy, ve sklopení vyznačíme řezy rovinami rovnoběžek.
Průmět rovnoběžky určíme pomocí průsečíků AB rovnoběžky a nultého poledníku.

Loxodroma

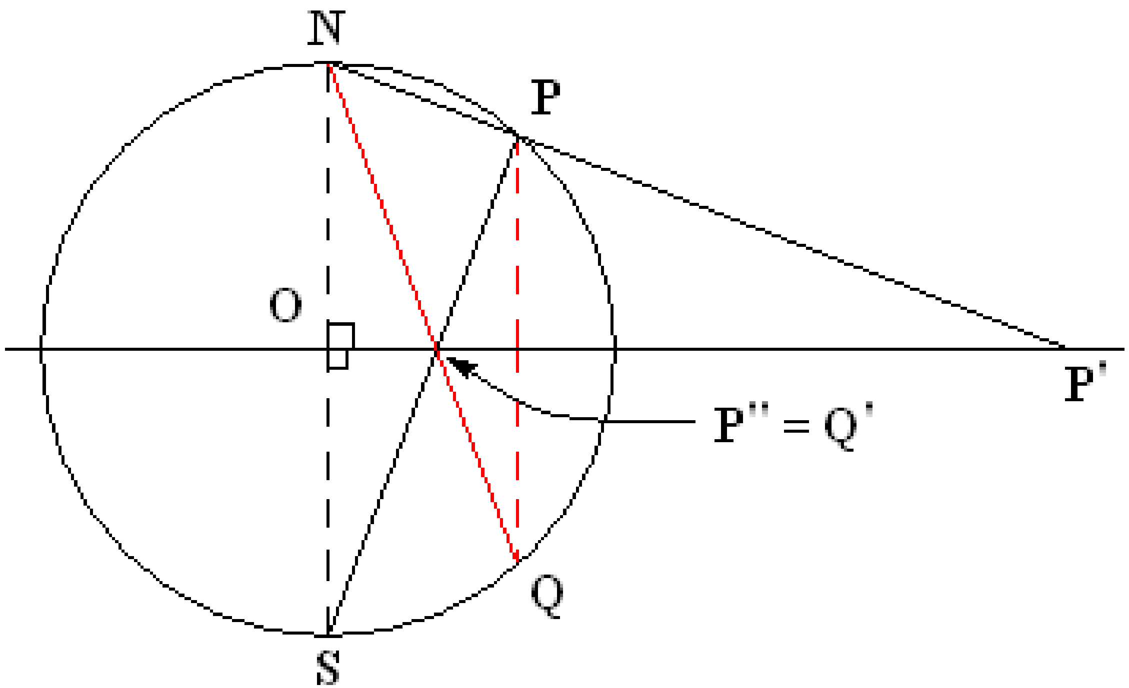


1. ve stereografické projekci 2. v ortografické projekci





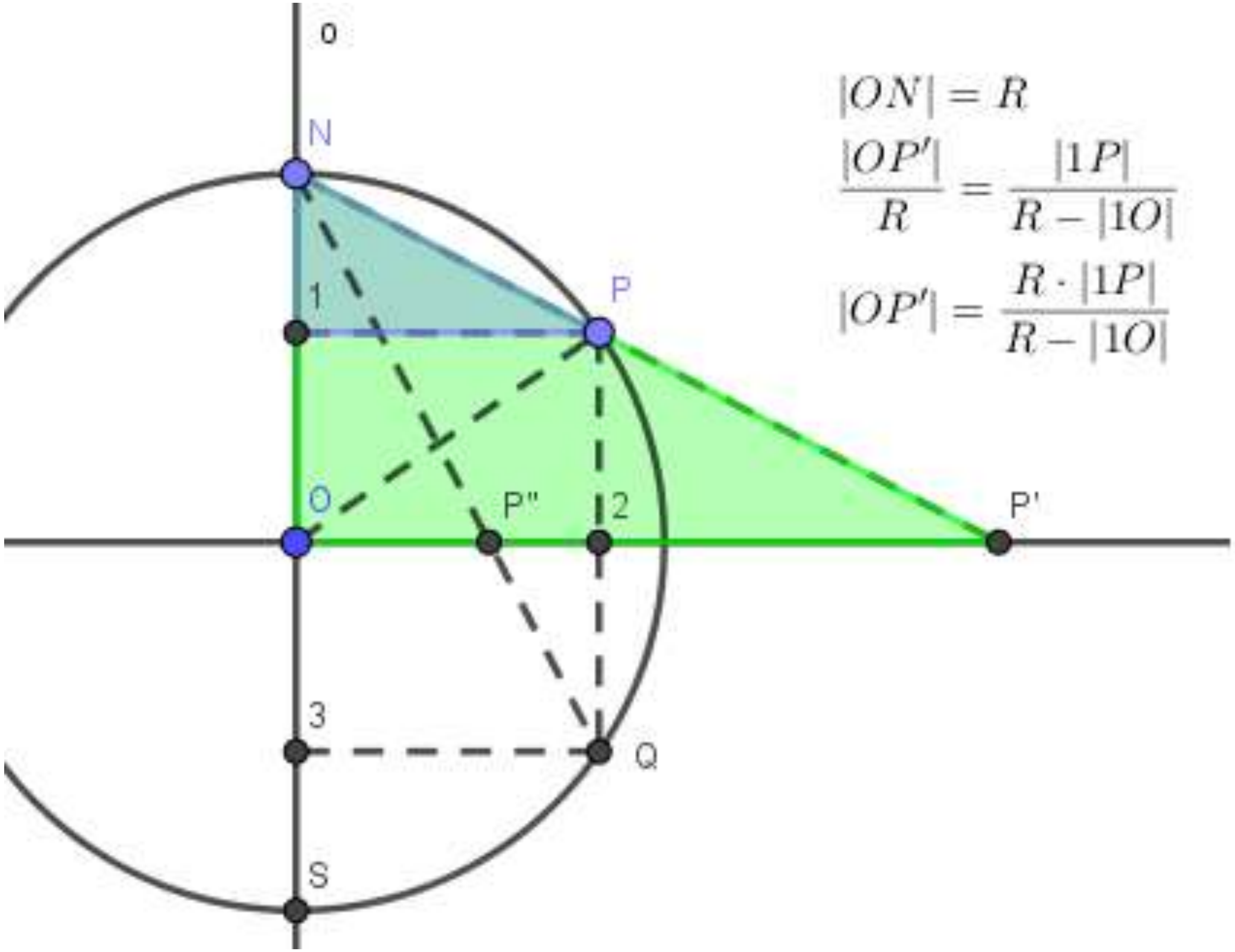
Stereografická projekce a kruhová inverze



Je dána sféra a dva její body P, Q rovinově souměrné podle roviny rovníku.
P’ - středový průmět P ze severního pólu N
P’’ - středový průmět P z jižního pólu S a také středový průmět Q
Body P’, P’’ si odpovídají v kruhové inverzi podle rovníku.

Stereografická projekce a kruhová inverze

Důkaz: Trojúhelník OP’N je podobný trojúhelníku 1PN
Trojúhelník 3QN je podobný trojúhelníku OP’’N



$$|ON| = R$$

$$\frac{|OP'|}{R} = \frac{|1P|}{R - |1O|} \qquad \frac{|OP''|}{R} = \frac{|3Q|}{R + |1O|}$$

$$|OP'| = \frac{R \cdot |1P|}{R - |1O|} \qquad |OP''| = \frac{R \cdot |3Q|}{R + |1O|}$$

$$|OP'| \cdot |OP''| = \frac{R^2 \cdot |1P|^2}{R^2 - |1O|^2}$$

$$|OP'| \cdot |OP''| = \frac{R^2 \cdot |1P|^2}{R^2 - |P2|^2}$$

$$|OP'| \cdot |OP''| = \frac{R^2 \cdot |O2|^2}{|O2|^2} = R^2$$