PROPOSIÇÃO 7.24

Jefferson Peruzzo

PROFMAT

Proposiçao 7.24

Seja $\mathcal{C}(e, R)$ o cilindro de eixo e e raio R. Se α é um plano que não é paralelo ou perpendicular a e, então a seção de $\mathcal{C}$ por α é uma elipse.

PROFMAT

Elipse

Uma elipse é um conjunto de pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante e maior do que a distância entre eles. Os pontos fixos são os focos da elipse.

Demonstração

Se assume sem demonstração que $\alpha \cap \mathcal{C}$ é uma curva plana, simples, contínua e fechada. Sejam $\Sigma_1(O_1; R)$ e $\Sigma_2(O_2; R)$ duas esferas centradas em e e tangentes a α em F_1 e F_2, respectivamente. Como α não é perpendicular a e, temos que $F_1 \neq F_2$. (Cf. Figura 1)

PROFMAT

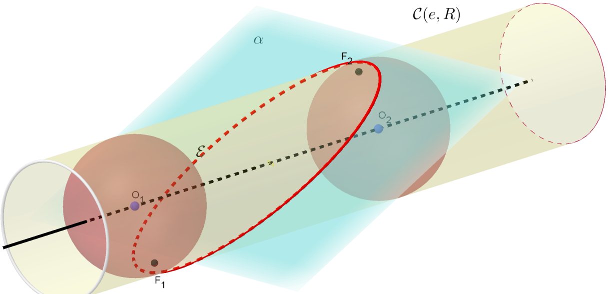

Figura: $\alpha \cap \mathcal{C}$

Afirmação

F_1 e F_2 são focos e $\overline{O_1 O_2}$ é o comprimento do eixo maior da elipse de interseção.

Seja P um ponto comum a α e a $\mathcal{C}$, e g a geratriz de $\mathcal{C}$ que contém P. Temos que Σ_1 intersecta $\mathcal{C}$ ao longo de um equador Γ_1, com reta medial e, em um único ponto Q_1 e Σ_2 intersecta $\mathcal{C}$ ao longo de um equador Γ_2, com reta medial e, em um único ponto Q_2. (Figura 2)

PROFMAT

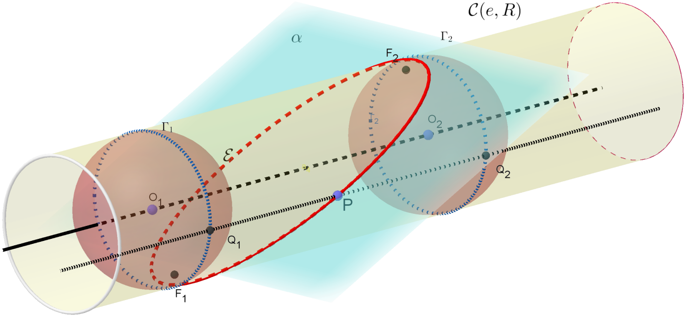

Figura: $P \in \mathcal{E} \cap g$

Temos, assim, que g tangencia Σ_1 em Q_1 e Σ_2 em Q_2. Do item (a) do exemplo 22, temos que $\overline{PF_1} = \overline{PQ_1}$ e $\overline{PF_2} = \overline{PQ_2}$. Portanto,

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_1} = \overline{PQ_1} + \overline{PQ_2} = \overline{Q_1 Q_2} = \overline{O_1 O_2}$$

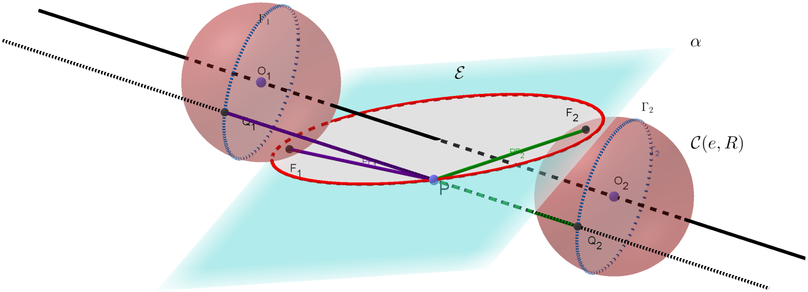

Figura: Distância entre F_1 e P e F_2 e P

Concluímos que a soma das distâncias PF_1 e PF_2 é constante. Assim, $\mathcal{E} = \alpha \cap \mathcal{C}$ é de fato uma elipse com focos F_1 e F_2.

PROFMAT