Propriedades de matrizes

Soma de matrizes

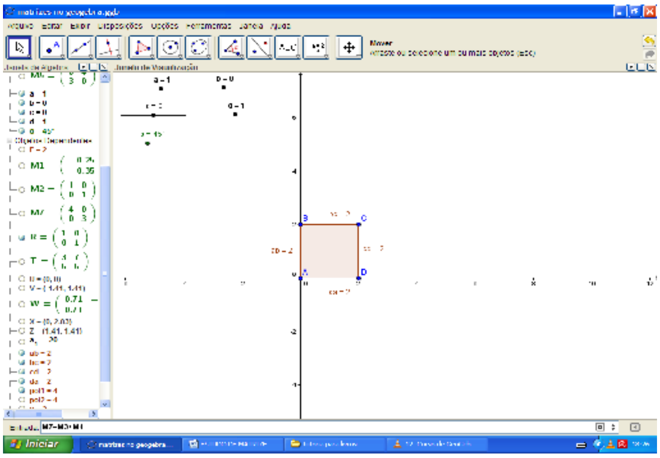
A adição de matrizes só pode ocorrer quando as matrizes são quadradas de mesma ordem, por exemplo: $A=[aij]_{2x2}$ e $B=[bij]_{2x2}$ ou $A=[aij]_{3x3}$ e $B=[bij]_{3x3}$ ou $A=[aij]_{mxn}$ e $B=[bij]_{mxn}$.

Esta soma resulta em outra matriz C=[cij] de mesma ordem.

Esta soma é dada da seguinte maneira, cada elemento (a11) da matriz A é somado ao seu elemento respectivo da matriz B (b11) para resultar o elemento respectivo da matriz C o elemento (c11).

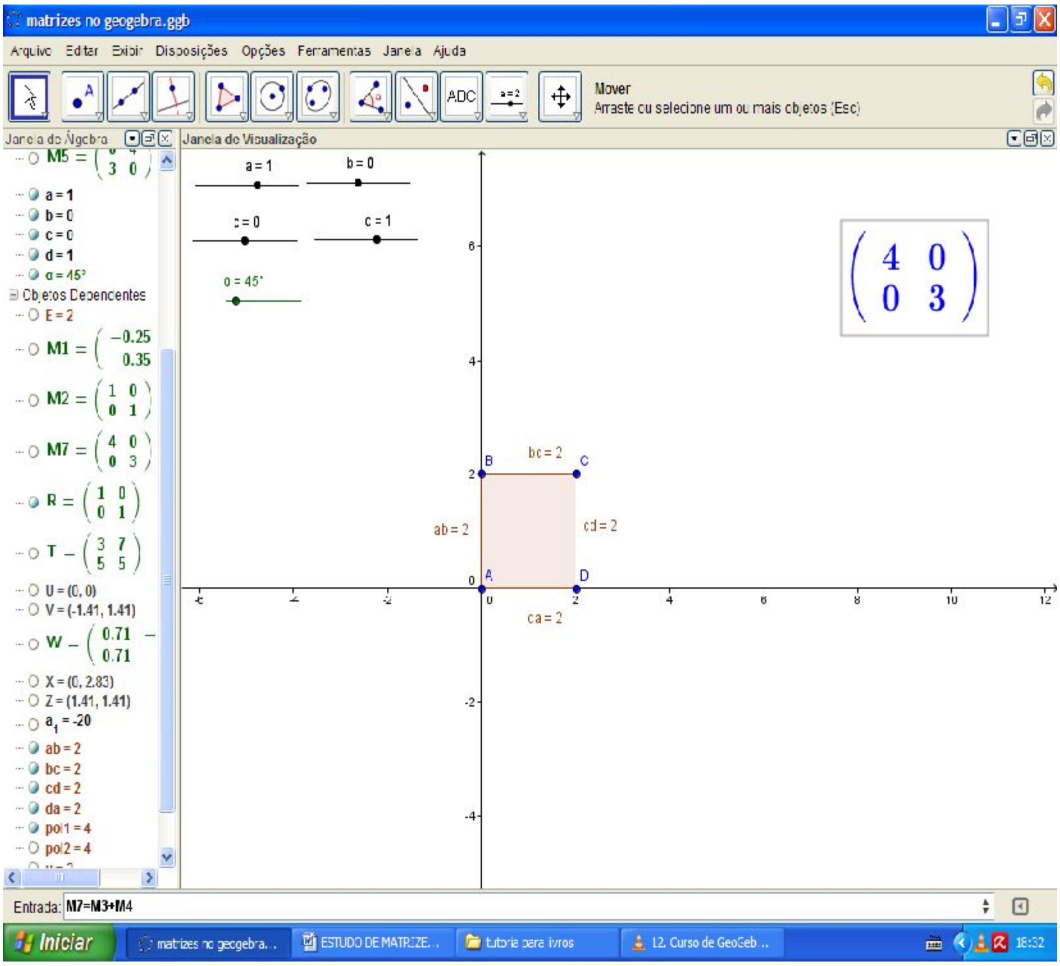
Da mesma forma se faz com os elementos de a12, a21 e a22, para com b12, b21 e b22 para gerar c12, c21 e c22.

Observe no software, digite na caixa de entrada M7=M3+M4 onde a matriz M7 será a soma das matrizes de ordem 2x2 M3 e M4.



ISBN N° 978-85-8196-091-3

Perceba na janela de álgebra ou insira com a ferramenta “texto” como já feito nos trabalhos anteriores.



ISBN N° 978-85-8196-091-3

Sobre as propriedades da soma de matrizes, dizemos que ela é:

Associativa.
Pois a somas das matrizes A+(B+C)=(A+B)+C.

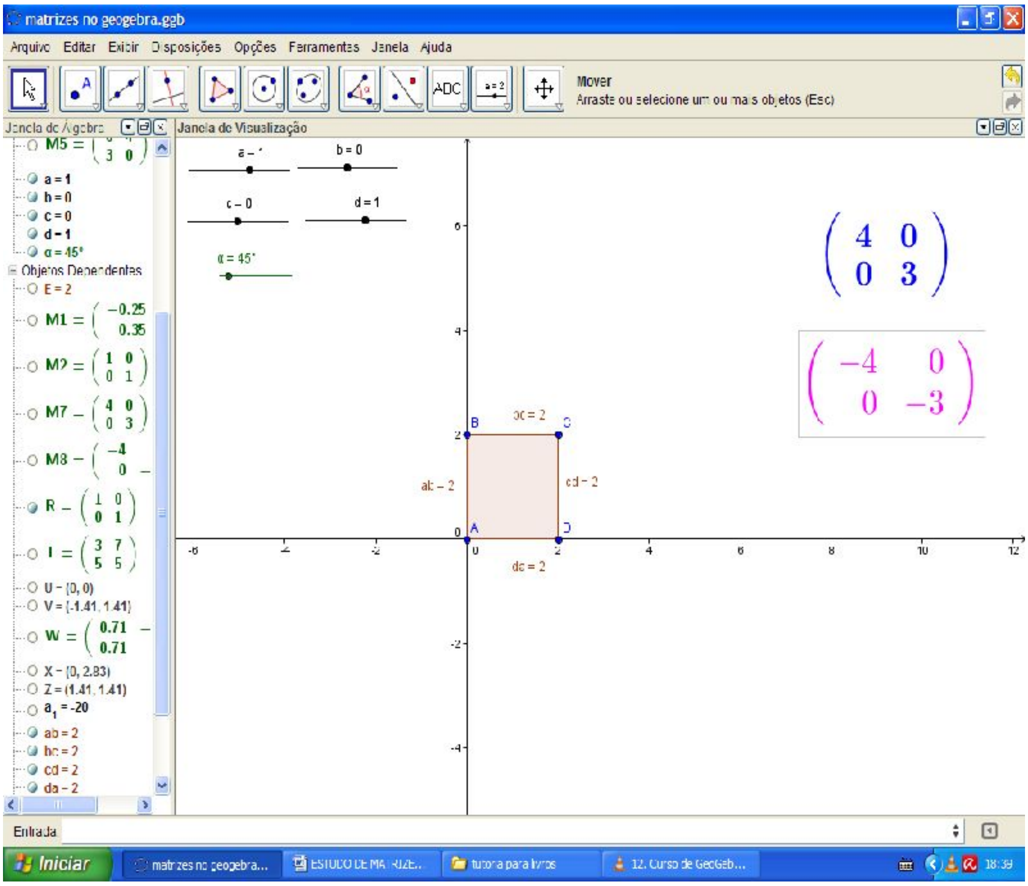
Comutativa.
Pois a soma das matrizes A+B=B+A.

Existe elemento neutro.
Pois se a soma das matrizes E+A=A+E então E é a matriz nula de mesma ordem que a matriz A.

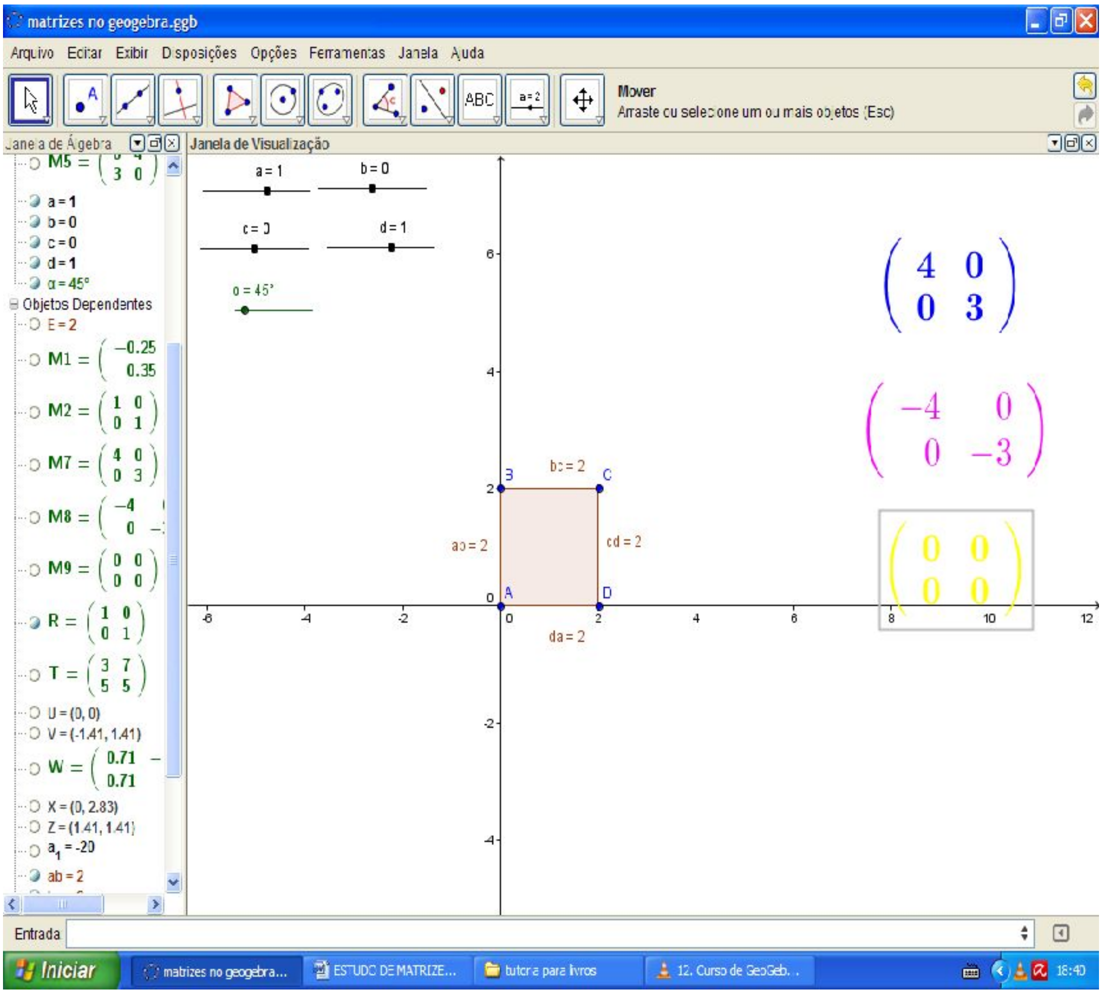
Existe elemento oposto.
Pois existe a matriz A e (-A) tal que sua soma é igual à matriz E.
Ou seja, a matriz (-A) é a matriz oposta a matriz A.

Veja no software.
Digite “M8=-M7” onde M8 é a matriz oposta a matriz M7 e depois insira na tela.
Agora faça “M9=M7+M8” e perceba a existência da matriz oposta.

ISBN N° 978-85-8196-091-3



ISBN N° 978-85-8196-091-3



Fala sério, tá ficando fácil não?

ISBN N° 978-85-8196-091-3

Multiplicação por escalar

Seja k pertencente ao conjunto dos reais, e a matriz $A=[aij]_{mxn}$, definimos a multiplicação do escalar K a multiplicação pela matriz A, como outra matriz $C=[c_{ij}]=kA=k(a_{ij})$, conforme notação anterior.

A operação de multiplicação em matrizes também respeita as seguintes propriedades.

Multiplicação por escalar 1.
Pois para toda matriz A multiplicada por 1 fornecerá a própria matriz A.

Multiplicação por escalar 0.
Pois para toda matriz A multiplicada por 0 fornecerá a matriz nula.

Distributiva das matrizes.
Para quaisquer que sejam as matrizes A e B de mesma ordem (A+B).K= KA+KB.

Distributiva dos escalares.
Para quaisquer que sejam os escalares q e p de mesma ordem (q+p).A= qA+pA.

Multiplicação de matrizes

A multiplicação de matrizes só pode ocorrer quando a matriz primeira tem uma quantidade de colunas igual ao número de linhas da matriz segunda, por exemplo: $A=[aij]_{2x1}$ e $B=[bij]_{1x2}$ ou $A=[aij]_{3x3}$ e $B=[bij]_{3x7}$ ou $A=[aij]_{mxn}$ e $B=[bij]_{nxt}$. Onde a quantidade de colunas da matriz A é igual a quantidade de linhas da matriz B, e podemos fazer no software A vezes B.

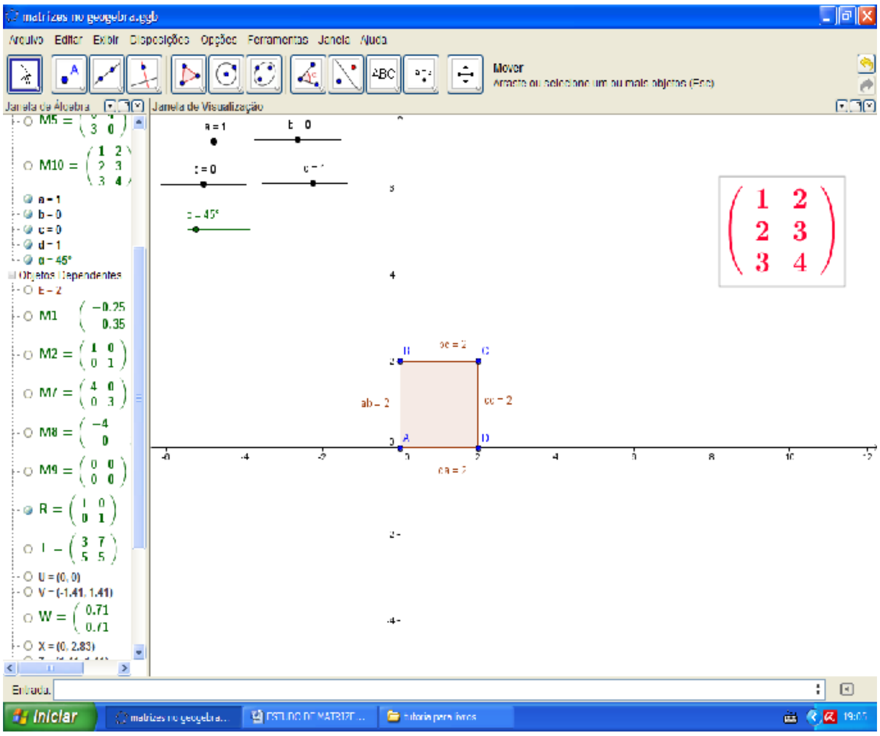
Ou seja, para a multiplicação das matrizes $A=[aij]_{3x3}$ e $B=[bij]_{3x7}$ que irá gerar $C=[cij]_{3x7}$ deve respeitar esta ordem.

ISBN N° 978-85-8196-091-3

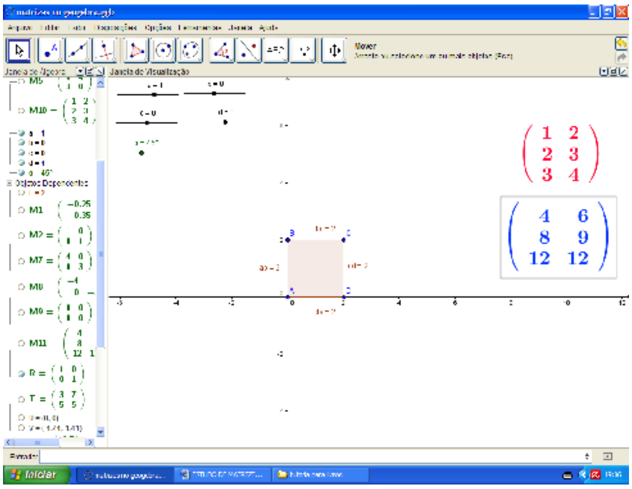
Reforço.
A quantidade de colunas da matriz A tem que ser igual à quantidade de linhas da matriz B e a ordem da matriz gerada C será dada pelo número de linhas da matriz A e de colunas da matriz B.

Por exemplo: seja a matriz M7 já construído e M10={{1,2},{2,3},{3,4}}, escreva no GeoGebra na caixa de entrada “M11= M10*M7” e perceberá o que tem se falado até o momento.

Perceba que a matriz M10 tem ordem 3x2 e a matriz M7 de ordem 2x2 que irá gerar a matriz M11 de ordem 3x2.



ISBN N° 978-85-8196-091-3



Importante, a multiplicação de matrizes é um pouco mais complexa do que soma de matrizes, e respeita a seguinte ordem:
Seja:

$$A=\begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} b1 & b12 \\ b21 & b22 \end{pmatrix}$$ o produto entre elas irão gerar

$$C=\begin{pmatrix} c11 & c12 \\ c21 & c22 \end{pmatrix}$$ da seguinte maneira.

$$C11 = \begin{pmatrix} C11 = a11 \,.\, b11 + a12 \,.\, b21 \\ C12 = a11 \,.\, b12 + a12 \,.\, b22 \\ C21 = a21 \,.\, b11 + a22 \,.\, b21 \\ C22 = a21 \,.\, b12 + a22 \,.\, b22 \end{pmatrix}$$

Para qualquer matriz A e B que respeitem o que se diz necessário à cima.

ISBN N° 978-85-8196-091-3

Esta operação de multiplicação entre matrizes também obedece a algumas propriedades.

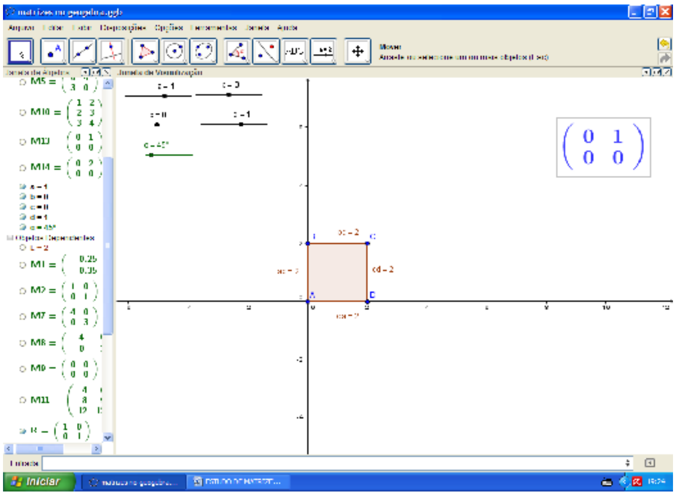
Observe:
Nem sempre A.B = B.A logo a operação de multiplicação entre matrizes não é comutativa. (veja M12=M7*M10, porque não multiplica?).

Distributiva da soma a direita ou à esquerda.
A(B+C) = AB+AC e (A+B)C = AC+BC respectivamente.

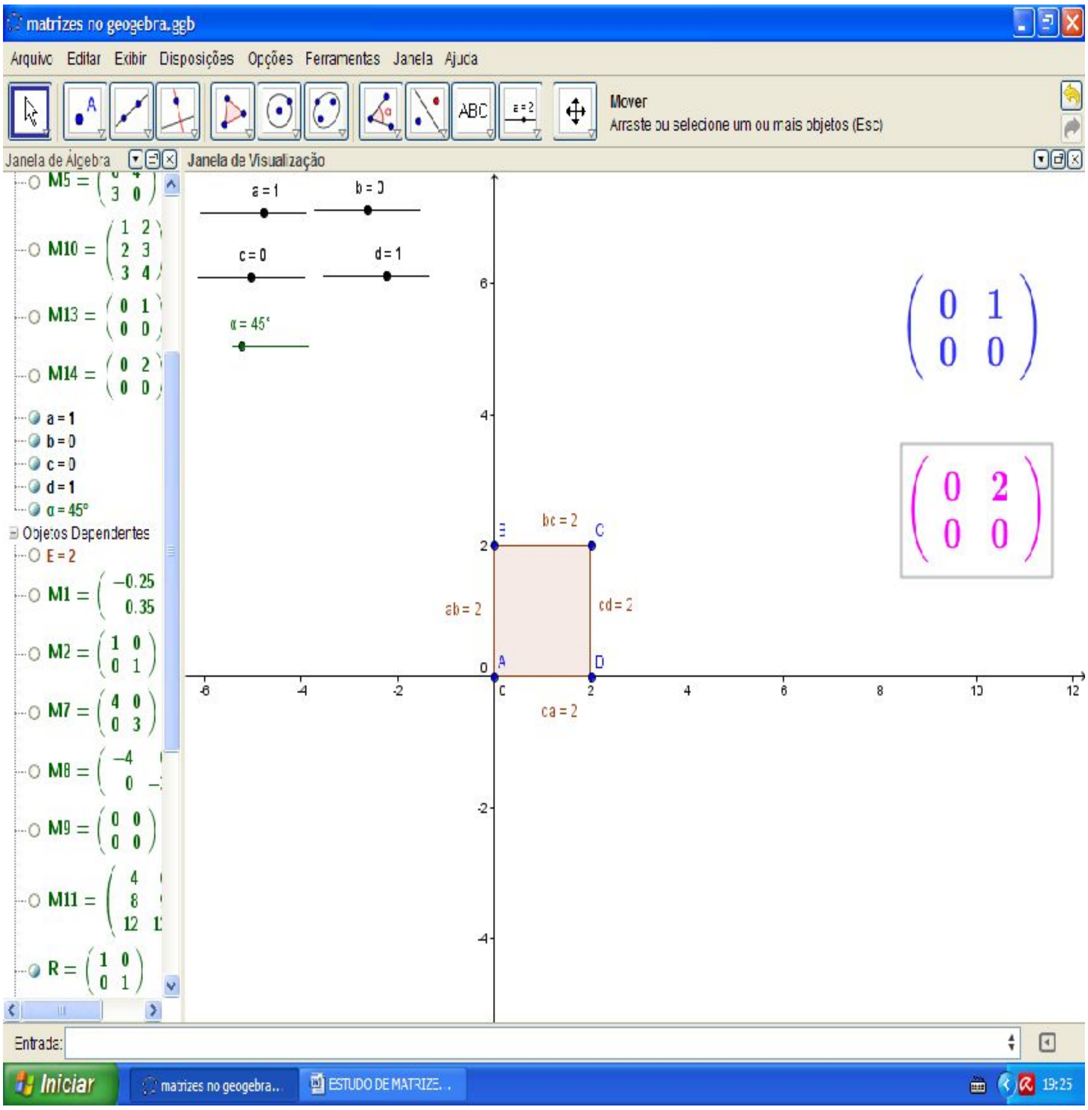
Associativa
A.(B.C) =(A.B).C para todo A_{mxp}, B_{mxp}, C_{pxn}

Nulidade do produto
Pode acontecer que o produto de duas matrizes seja uma matiz nula, isto é: AB=0.
O que não quer dizer que a matriz A ou B seja nula.
Seja M13={{0,1},{0,0}} e M14={{0,2},{0,0}}.

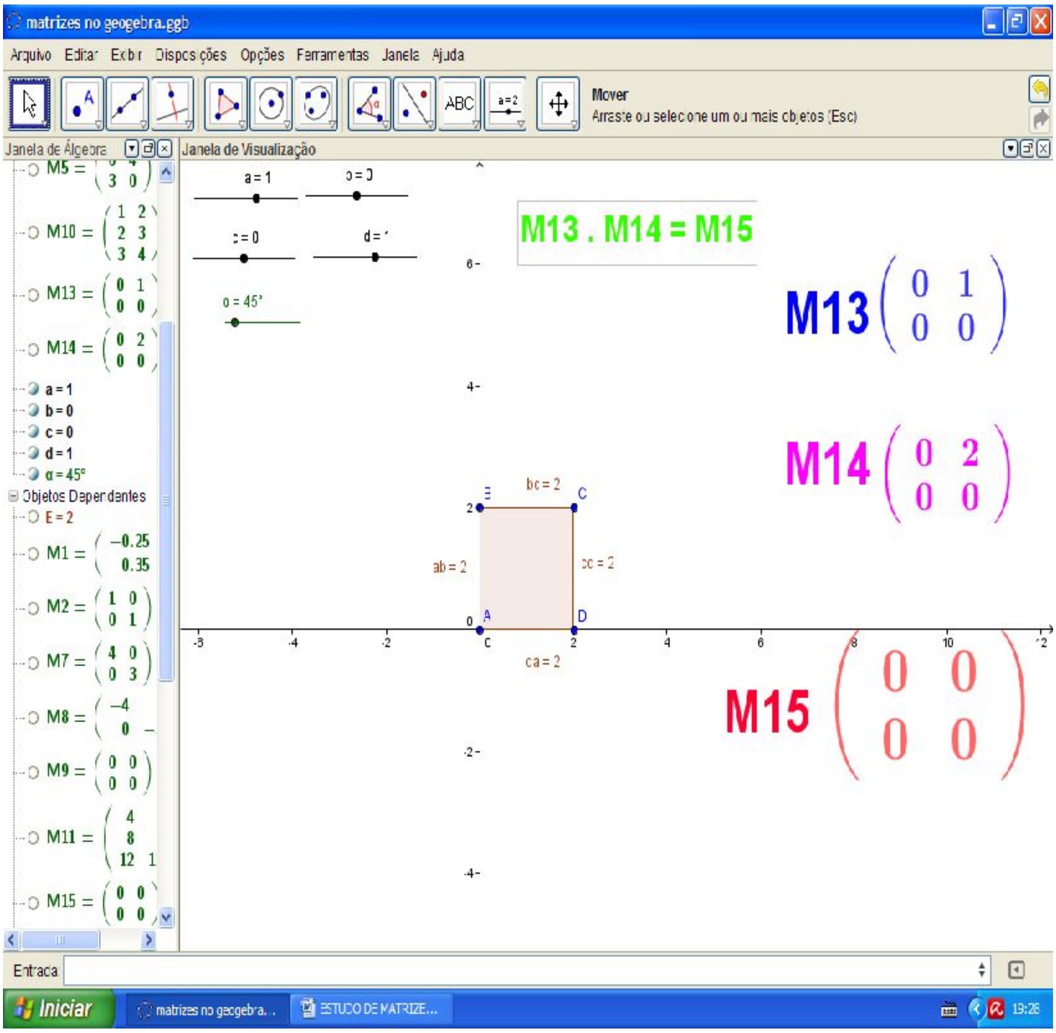
Faça M15=M13*M14.
Perceba que M15 é a matriz nula.



ISBN N° 978-85-8196-091-3



ISBN N° 978-85-8196-091-3



ISBN N° 978-85-8196-091-3